KÖZVETLEN BIZONYÍTÁS AZ ELDÖNTÉSPROBLÉMÁNAK ÁLTALÁNOS REKURZÍV ALGORITMUSSAL VALÓ MEGOLDHATATLANSÁGÁRA[1]

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

Előadta az 1955. december 16-án tartott felolvasó ülésen

1. Eldöntésproblémán ebben a dolgozatban a szűkebb logikai függvénykalkulus eldöntésproblémáját[2] értem. Ez a probléma olyan eljárás keresésében áll, amelynek segítségével bármely adott (a szűkebb logikai függvénykalkulus értelmében vett) logikai formuláról[3] véges számú lépésben el lehet dönteni, vajon kielégíthető-e.

A logikai formulák halmaza, mint ismeretes és könnyen látható, megszámlálható. Tekintsük a logikai formulák valamely

$$(1) \qquad A_0, A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$$

megszámlálását. Minden ilyen megszámláláshoz hozzárendelhetjük a következőképpen definiált aritmetikai függvényt[4], amelyet az eldöntésproblémának a kérdéses megszámláláshoz tartozó karakterisztikus függvényének nevezhetünk:

$$\chi(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{ha az } A_\nu \text{ formula kielégíthető,} \\ 1, & \text{ha az } A_\nu \text{ formula nem elégíthető ki.} \end{cases}$$

Világos, hogy annak eldöntése, hogy az A_ν formula kielégíthető-e, ekvivalens a $\chi(\nu)$ függvényérték kiszámításával, ennélfogva, amennyiben az (1) megszámlálás effektív, vagyis olyan, hogy bármely A logikai formulához véges számú lépésben meg tudjuk találni azt a ν sorszámot, amelyre $A = A_\nu$ és

[1] 1954. november 22-én a berlini Humboldt-Egyetem matematikai kollokviumán tartott előadás részletes kidolgozása. Német nyelvű változata a berlini *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* c. folyóiratban jelenik meg.

[2] Az eldöntésprobléma mibenlétére és jelentőségére nézve lásd pl. a szerző [1] dolgozatának bevezető részét (163—169. oldal), vagy SURÁNYI JÁNOS [1] dolgozatának **1—3.** fejezetét (180—186. oldal); ezekből a jelen dolgozatban felhasznált matematikai logikai fogalmakat is meg lehet ismerni. (A nevek után szögletes zárójelbe tett számok a jelen dolgozat végén található irodalomra utalnak.)

[3] Logikai formulán ebben a dolgozatban mindig a szűkebb logikai függvénykalkulus értelmében vett formulát értünk; megengedjük, hogy az azonosság-reláció is előforduljon a formulában.

[4] Aritmetikai függvényen olyan függvényt értünk, amelynek független változója (vagy ha többváltozós függvényről van szó, mindegyik független változója) a természetes számokon fut át és értékei is természetes számok. Természetes számon ebben a dolgozatban nemnegatív egész számot értünk.

viszont, bármely ν természetes számhoz meg tudjuk találni az A_ν formulát, akkor az eldöntésprobléma ekvivalens olyan eljárás keresésével, amelynek segítségével a χ függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani.

Az olyan aritmetikai függvényeket, amelyekhez van olyan eljárás, amelynek segítségével a függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, kiszámítható függvényeknek nevezzük. Egy CHURCH-féle hipotézis szerint[5] a kiszámítható függvények osztálya azonos az általános rekurzív függvények osztályával[6]. Ez a hipotézis — amennyiben az „eljárás" fogalmát a legáltalánosabb, tehát nem valamilyen matematikai definíció segítségével szabatosan elhatárolt és egyben leszűkített értelemben értjük[7] — ismeretelméleti jellegű. Itt nem megyek bele annak a kérdésnek a tárgyalásába, mennyiben fogadható el CHURCH e hipotézise, csak megemlítem, hogy vele szemben alapos (természetesen filozófiai) érveket lehet felhozni[8].

Már most CHURCH bebizonyította[9], hogy az eldöntésproblémának a logikai formulák szokásos (effektív) megszámlálásához tartozó karakterisztikus függvénye nem tartozik az általános rekurzív függvények osztályába. CHURCH e tételét gyakran úgy fogalmazzák, hogy az eldöntésprobléma megoldhatatlan. E fogalmazás az említett CHURCH-féle hipotézisen alapul; maga a tétel azonban független a CHURCH-féle hipotézistől, és azt mondja ki, hogy az eldöntés-

[5] CHURCH [1], 356. oldal. — CHURCH definíció alakjába öltözteti ezt a hipotézist; azonban már az a tény is, hogy felveti azt a kérdést, mennyiben fedi definíciója a definiált fogalom (a kiszámítható függvény fogalma) „intuitív" tartalmát, mutatja, hogy valójában hipotézisről van szó.

[6] Az általános rekurzív függvény fogalmát illetően lásd KLEENE [1] dolgozatát, vagy magyarul PÉTER RÓZSA [1] művének 130—131. oldalát, vagy pedig a szerző [2] dolgozatának 1. pontját (103—113. oldal). Maga az általános rekurzív függvény definíciója a jelen dolgozatban is elő fog fordulni.

[7] Az eljárás (algoritmus), nevezetesen valamely aritmetikai függvénynek (természetes számokból álló sorozatnak) bármely adott helyen felvett értékének (adott indexű tagjának) kiszámítására szolgáló eljárás fogalmának szabatos elhatárolására számos definiciót javasoltak (lásd pl. CHURCH [1], 356—358. oldal; TURING [1], 232—233. oldal; MARKOV [1]); ha a kiszámítható függvény fogalmában eljáráson e definíciók bármelyike által szabatosan elhatárolt eljárás-fogalmat értjük, akkor CHURCH hipotézise bebizonyítható tétellé válik (lásd KLEENE [2], TURING [2], ill. GYETLOVSZ [1]). Azonban az eljárás ilyenféle elhatárolt fogalma esetén már nem evidens (hanem ismét csak ismeretelméleti jellegű hipotézis), hogy az eldöntésprobléma ekvivalens olyan, az *elhatárolt értelemben vett* eljárás keresésével, amelynek segítségével az eldöntésproblémának a logikai formulák valamely effektív megszámlálásához tartozó karakterisztikus függvényének értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani.

[8] Lásd a szerző [2] dolgozatának 125. oldalán a [30] jegyzetet. Erre a kérdésre még máshol vissza szándékozom térni.

[9] CHURCH [2] és [3].

probléma *bizonyos fajta* eljárással nem oldható meg, ti. olyannal, amely a következő alakú (vagy ilyen alakra hozható). Adva van egy egyváltozós φ általános rekurzív függvény; és az eljárásnak valamely A_ν logikai formulára való alkalmazása abban áll (vagy azzal ekvivalens), hogy kiszámítjuk a φ függvény értékét a ν helyen. Ha azt találjuk, hogy $\varphi(\nu)=0$, akkor az eljárás arra az eredményre vezet, hogy az A_ν formula kielégíthető; ha pedig $\varphi(\nu)\neq 0$, akkor az eljárás arra az eredményre vezet, hogy az A_ν formula nem elégíthető ki. Az ilyen eljárást *általános rekurzív algoritmusnak* nevezzük[10]; eszerint CHURCH tétele azt mondja ki, hogy az eldöntésprobléma nem oldható meg általános rekurzív algoritmussal. CHURCH tételének jelentőségét az mutatja, hogy mindazok az eljárások, amelyek segítségével az eldöntésprobléma bizonyos speciális eseteit sikerült megoldani, általános rekurzív algoritmusnak bizonyulnak.

CHURCH tételének eddig közzétett bizonyításai[11], tudomásom szerint, valamennyien a következő alakúak. Mindenekelőtt egy másik P problémaseregről[12] mutatjuk meg, hogy nem oldható meg általános rekurzív algoritmussal[12]; majd a P problémasereget „általános rekurzív módon", vagyis olyan redukciós eljárás segítségével vezetjük vissza az eldöntésproblémára, amely azt mutatja, hogy ha az eldöntésprobléma megoldható általános rekurzív algoritmussal, akkor a P problémasereg is megoldható volna ilyen algoritmussal. Éppen ezért ezeknek a bizonyításoknak megértéséhez nemcsak a szűkebb logikai függvénykalkulusnak, valamint az általános rekurzív függvények elméletének alapfogalmait kell ismerni, amelyekre már a CHURCH-tétel kimondásához is szükség van, hanem, legalábbis részben, azt a diszciplínát is, amelyhez

[10] Általánosabban, legyen adva egy megszámlálható problémasereg, vagyis egy, megszámlálható sok értéket felvevő, paramétertől függő olyan problémák összessége, amelyek mindegyikére „igen" vagy „nem" választ várunk. (Ilyen megszámlálható problémasereg az eldöntésprobléma is; a paraméter az a logikai formula, amelyről el akarjuk dönteni, kielégíthető-e, vagy nem.) Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a paraméter a természetes számokon fut át; tehát a problémasereg problémái egy

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

sorozatot alkotnak. Mármost e problémasereg megoldására szolgáló általános rekurzív algoritmuson olyan eljárást értünk, amely a következő alakú (vagy ilyen alakra hozható). Adva van egy egyváltozós φ általános rekurzív függvény; az eljárás a P_ν problémára aszerint adja azt a választ, hogy „igen" vagy „nem", hogy a $\varphi(\nu)$ függvényérték 0-e, vagy 0-tól különböző szám-e. Könnyen látható, hogy a problémasereg akkor és csak akkor oldható meg általános rekurzív algoritmussal, ha karakterisztikus függvénye, vagyis a következőképpen definiált aritmetikai függvény általános rekurzív függvény:

$$\chi(\nu)=\begin{cases} 0, & \text{ha a } P_\nu \text{ problémára a helyes válasz: „igen"}, \\ 1, & \text{ha a } P_\nu \text{ problémára a helyes válasz: „nem"}. \end{cases}$$

[11] Lásd CHURCH [2], [3]; TURING [1], különösen 259—263. oldal, továbbá [3].

[12] Lásd a [10] jegyzetet.

a kérdéses P problémasereg problémái tartoznak. A jelen dolgozatban közvetlen, vagyis olyan bizonyítását adom az eldöntésproblémának általános rekurzív algoritmussal való megoldhatatlanságára vonatkozó CHURCH-féle tételnek, amely elkerüli az ilyen P problémaseregen át vezető kerülő utat s ennélfogva a szűkebb logikai függvénykalkulusnak és az általános rekurzív függvények elméletének elemein kívül további előismeretet nem tételez fel[13]. Ezenkívül még az az előnye is megvan a jelen dolgozatban adott bizonyításnak, hogy világosabban megmutatja azoknak, a logikai formulák (1) megszámlálására vonatkozó, feltételeknek pontos alakját, amelyek elegendők a tétel érvényességéhez[14].

2. A CHURCH-tétel bizonyításához természetesen szükségünk lesz az általános rekurzív függvény fogalmára, valamint bizonyos, e fogalom definíciójához felhasznált fogalmakra. E fogalmak definíciója megtalálható a szerző [2] dolgozatának 1. pontjában (103—113. oldal). E dolgozat említett részét ismertnek teszem fel; azonban a CHURCH-tétel bizonyítása szempontjából célszerű lesz e dolgozat jelöléseit némileg megváltoztatni és bizonyos, ott nem teljesen rögzített jelöléseket rögzíteni.

Az egyik változtatás az, hogy az általános rekurzív függvények definíciójául szolgáló egyenletrendszerek felírására csupa *félkövér* betűt és egyéb jelet (zárójelet, vesszőt, 0 számjegyet, egyenlőség-jelet) használunk. Ezáltal, valamint annak folytán, hogy természetes számokat egyébként mindig csak görög kisbetűvel jelölünk[15], a közönséges (sovány) kurzív latin kisbetűk felszabadulnak a kifejezések (vagy másféle jelsorozatok) jelölésére (eszerint a kifejezéseket nem jelöljük kurzív nagybetűvel, mint az említett dolgozatban).

[13] A feltételezett előismeretek megtalálhatók pl. a szerző [1] dolgozatának bevezető részében (163—169. oldal), valamint [2] dolgozatának 1. pontjában (103—113. oldal).

[14] Az, hogy egy problémasereg megoldható-e általános rekurzív algoritmussal vagy nem, függ attól, milyen sorrendben rendezzük a hozzátartozó problémákat; így az is, hogy az eldöntésprobléma megoldható-e általános rekurzív algoritmussal, függ a logikai formulák (1) megszámlálásától. Így pl., ha a logikai formulákat úgy számláljuk meg, hogy páros indexet kapjanak a kielégíthető, páratlant a ki nem elégíthető formulák, akkor az A_ν formula akkor és csak akkor elégíthető ki, ha $\varphi(\nu) = 0$, ahol a φ függvény, amely a következőképpen van definiálva:

$$\varphi(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \nu \text{ páros,} \\ 1, & \text{ha } \nu \text{ páratlan,} \end{cases}$$

mint könnyen látható, általános rekurzív függvény. Azonban ilyen *effektív* megszámlálást — legalább is addig, amíg meg nem oldjuk az eldöntésproblémát — nem tudunk megadni. — A CHURCH-tétel pontos kimondásában valójában nem az összes, hanem csak a zárt, azaz szabad változót nem tartalmazó logikai formulák megszámlálására vonatkozó feltétel szerepel majd; ugyanis az eldöntésprobléma, mint ismeretes és könnyen látható, ekvivalens olyan eljárás keresésével, amelynek segítségével bármely adott *zárt* formuláról el lehet dönteni, vajon kielégíthető-e.

[15] Görög kisbetűkkel, mégpedig a ζ, η, ϑ, ξ, φ, χ, ψ, ω betűkkel jelölünk majd bizonyos matematikai függvényeket is (aritmetikai függvényeket, vagy olyan függvényeket, ame-

Ez azért célszerű, mert a kifejezések később majd egy I individuumtartomány elemeiként szerepelnek; márpedig az individuumtartomány elemeit kurzív latin kisbetűkkel szokás jelölni. Hasonlóan, kurzív latin kisbetűkkel jelöljük majd egy másik I' individuumtartomány elemeit is[16].

A másik változtatás az, hogy ebben a dolgozatban azt a (rekurzív függvények elméletében kitüntetett) függvényt is funktorral, nevezetesen az $\mathbf{f}_1$ funktorral jelöljük, amely a tetszőleges ν helyen a $\nu+1$ értéket veszi fel (ν a természetes számokon fut át). Ily módon a $'$ jelölés, amely a szerző [2] dolgozatában e függvényt jelölte, felszabadul a szokásos (megkülönböztető jelként való) használatra és a kifejezés fogalmának definiciója is egyöntetűbben mondható ki (a szerző [2] dolgozatában a $'$ jellel is, funktorokkal is képeztünk kifejezés(ek)ből új kifejezést); ez az előny kárpótol bennünket azért a hátrányért, hogy egyenletrendszerekben $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ helyett a nehézkesebb $\mathbf{0}, \mathbf{f}_1(\mathbf{0}), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0}))), \ldots$ kifejezéseket kell a $0, 1, 2, 3, \ldots$ természetes számok jelölésére használnunk.

A harmadik változtatás az, hogy szigorúbban rögzítjük, mely betűket használunk számváltozóként vagy funktorként. Valamely általános rekurzív függvény definíciójául szolgáló egyenletrendszerben szereplő számváltozóként mindig a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$, funktorként pedig mindig az $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ betűket használjuk. Itt tehát α és β egyenletrendszerről egyenletrendszerre változó természetes számok (az egyenletrendszerben szereplő számváltozók, ill. funktorok száma, de választhatunk ezeknél nagyobb számokat is α és β gyanánt, hiszen nem kötjük ki, hogy $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ és $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ mind szerepeljenek az egyenletrendszerben). Mint mondtuk, az $\mathbf{f}_1$ funktor mindig az $\mathbf{f}_1(\nu) = \nu+1$ függvényt jelöli; az $\mathbf{f}_2$ funktort pedig mindig az egyenletrendszer által definiálandó általános rekurzív függvény jelölésére használjuk[17].

lyeknek (mindegyik) független változója természetes számokon fut át ugyan és értékei is természetes számok, de amelyek nincsenek minden helyen értelmezve; továbbá olyan függvényeket, amelyeknek (mindegyik) független változója valamelyik individuumtartomány elemein fut át és értékei is ezen, vagy másik individuumtartomány elemei). A többi görög kisbetűvel mindig természetes számot jelölünk. (Amikor arról beszélünk, milyen fogalmak jelölésére használunk valamilyen betűt, ezt mindig úgy értjük, hogy akár index nélkül, akár indexszel, egy vagy több vesszővel szerepel, mindig ilyen fogalmat jelölünk vele.)

[16] Az I vagy I' halmazon értelmezett logikai függvényeket görög nagybetűkkel jelöljük; egyes latin nagybetűket, nevezetesen az F, G, H és T betűket logikai függvényváltozók, vagyis olyan változók jelölésére használjuk, amelyek (az I vagy az I' halmazon értelmezett) logikai függvényeken futnak át. A többi latin nagybetűket különböző fogalmak jelölésére használjuk; pl. I, mint már mondottuk, individuumtartományt jelöl; P-vel pedig fentebb valamely problémasereget jelöltünk.

[17] Ez a jelölésrögzítés nem jelenti az általánosság megszorítását, hiszen szükség esetén jelölésváltoztatással mindig elérhető, hogy az egyenletrendszer által definiált függvényt jelöljük az $\mathbf{f}_2$ funktorral.

Egy-egy egyenletrendszer felírása esetén rögzíteni kell a benne szereplő $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ funktorok argumentumszámát, vagyis az általuk jelölt aritmetikai függvények független változóinak számát is; legyenek ezek rendre $\varrho_1, \ldots, \varrho_\beta$. Itt ϱ_1 mindig 1, hiszen $\mathbf{f}_1$ egyváltozós függvényt jelöl; ϱ_2 azonban egyenletrendszerről egyenletrendszerre változik, hiszen mindig az egyenletrendszerrel definiált általános rekurzív függvény független változóinak számával egyenlő. Hasonlóan, azt is megengedjük, hogy $\varrho_3, \ldots, \varrho_\beta$ is egyenletrendszerről egyenletrendszerre változzanak.

Az a körülmény, hogy $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ nem egyszer s mindenkorra rögzített számok, változást tesz szükségessé a kifejezés fogalmának definíciójában, hiszen pl. $\mathbf{f}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ nyilván akkor és csak akkor kifejezés, ha $\varrho_2 = 2$. Világos e példából, hogy az, hogy milyen jelsorozatokat nevezünk kifejezéseknek, függ a $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásától. Ez a körülmény nem okoz nehézséget, hiszen amikor valamely adott E egyenletrendszerről beszélünk, a $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számokat is adottaknak tekinthetjük[18].

Célszerű lesz némileg módosítani a triviális következmény fogalmát is. Ahelyett, hogy valamely v számváltozó (azaz a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ jelek valamelyike) helyébe tetszőleges számnak (pontosabban: a $\mathbf{0}, \mathbf{f}_1(\mathbf{0}), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})), \ldots$ kifejezések bármelyikének) helyettesítését engednők meg (ezt a műveletet neveztük a szerző [2] dolgozatában specializálásnak), mindössze kétféle helyettesítést engedünk

[18] Eszerint az, amit a jelen dolgozatban kifejezésnek nevezünk, nem fedi pontosan a szerző [2] dolgozatában szereplő kifejezés-fogalmat, hanem az olyan kifejezés fogalmának felel meg, amelyben nem szerepel sem más számváltozó, sem pedig más funktor, mint az adott E egyenletrendszerben szereplő $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ számváltozók és sorra $\varrho_1 = 1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ argumentumszámú $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ funktorok. (Ez a fogalom, és vele együtt az egyenletnek és egyenletrendszernek a jelen dolgozatban használt fogalma is, függ az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásától.) Ez a „relatív" kifejezés-fogalom elegendő akkor is, ha az E egyenletrendszernek a szerző a [2] dolgozatában definiált értelemben vett triviális következményeit vizsgáljuk, hiszen ezekben sem szerepelhet más számváltozó, mint $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\beta$, sem pedig más funktor, mint $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$. Ugyanis azok a műveletek (a „specializálás" és az „alkalmazás"), amelyek ismételt végrehajtása segítségével az E egyenletrendszer egyenleteiből az E egyenletrendszer triviális következményeit megkaphatjuk, olyanok, hogy egyikük sem vezet olyan egyenlethez, amely „új" számváltozót, vagy „új", $\mathbf{f}_1$-től különböző funktort tartalmaz.

Az a körülmény, hogy az egyenletrendszer fogalma függ az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásától, ezek pedig attól az egyenletrendszertől, amelyet (triviális következményeivel együtt) vizsgálni akarunk, csak látszólag jelent circulus vitiosust. Valójában az a helyzet, hogy ha egy, a szerző [2] dolgozata értelmében vett, E egyenletrendszert akarunk vizsgálni, akkor az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számokat úgy kell választanunk, hogy E, megfelelő jelölésváltozás után, egyenletrendszer legyen a jelen dolgozatban használt, az $\alpha, \beta, \varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ számok e választásához tartozó, értelemben. (Pl. α gyanánt az E egyenletrendszerben szereplő számváltozók számát, β gyanánt a benne szereplő funktorok számát választhatjuk (a $'$ jelet is beleértve), $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ gyanánt pedig sorra e funktoroknak az E egyenletrendszerből leolvasható argumentumszámát.)

meg: v helyébe a **0**, vagy az $\mathbf{f}_1(v)$ kifejezés helyettesítését. Könnyen látható, hogy ez az, egyébként KLEENEtől származó[19] módosítás változatlanul hagyja az általános rekurzív függvény fogalmát[20].

3. Hogy az említett jelölésváltozások és a velük kapcsolatos további módosítások ne nehezítsék meg a jelen dolgozat olvasását, röviden elismétlem — e módosításokat alkalmazva — az általános rekurzív függvény fogalmának definícióját, a hozzá szükséges fogalmak definíciójával együtt[21]. Ez utóbbiak között olyan fogalmak is szerepelnek, a megfelelő jelölésekkel együtt, amelyek a szerző [2] dolgozatában nem fordulnak elő, de amelyek megkönnyítik az általános rekurzív függvény fogalmának definícióját és majd a továbbiak szempontjából is célszerűnek bizonyulnak; ezeket a fogalmakat könnyebb érthetőség kedvéért példákkal illusztrálom.

Legyenek α, β, továbbá $\varrho_2, \ldots, \varrho_\beta$ adott pozitív egész számok; a jelen **3.** pontban definiálandó fogalmak, az általános rekurzív függvény fogalmát kivéve, mind e számok választásától függnek. Legyen továbbá $\varrho_1 = 1$.

Jelsorozaton olyan véges sorozatot értünk, amelynek minden tagja az alábbi jelek egyike[22]:

(a) a **0** *konstans;*

(b) a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ *számváltozók;*

(c) az $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ *funktorok;*

(d) az **(**, **)** és **,** *írásjelek (kezdőzárójel, végzárójel* és *vessző)*;

(e) az **=** *egyenlőség-jel.*

A $\varrho_1(=1), \ldots, \varrho_\beta$ számokat sorra az $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\beta$ funktorok *argumentumszámának* nevezzük.

A jelsorozatokat úgy adjuk meg, hogy tagjaikat egymásután írjuk. Pl. az $\mathbf{f}_1(\mathbf{0})$ jelsorozat első tagja az $\mathbf{f}_1$ funktor, második tagja a kezdőzárójel, harmadik tagja a **0** konstans, negyedik tagja a végzárójel; a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ jelsorozat tagjai sorra a kezdőzárójel, a $\mathbf{v}_1$ számváltozó, a vessző, a $\mathbf{v}_2$ számváltozó, a vessző, a $\mathbf{v}_3$ számváltozó és a végzárójel (nem pedig a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ számváltozók). Az egytagú jelsorozatokat azonosaknak tekintjük egyetlen tagjukkal.

[19] Lásd KLEENE [1], 731. oldal (utolsó két bekezdés).

[20] Ez a tény azon alapul, hogy valamely v számváltozó helyébe pl. az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})))$ kifejezést helyettesíteni úgy is lehet, hogy v helyébe előbb háromszor egymásután az $\mathbf{f}_1(v)$ kifejezést helyettesítjük (ezáltal először az $\mathbf{f}_1(v)$, majd az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(v))$, majd az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(v)))$ kifejezés kerül mindenhova, ahol eredetileg v állott), majd végül a **0** kifejezést helyettesítjük v helyébe; és hasonló áll az $\mathbf{f}_1(\mathbf{0}), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})), \ldots$ kifejezések bármelyikére.

[21] A rövidséghez az is hozzátartozik, hogy nem ismétlem el azokat a megjegyzéseket, amelyek az egyes fogalmak jelentésének megvilágítására szolgálnak; ezek megtalálhatók a szerző [2] dolgozatában.

[22] Az alábbi felsorolásban dőlt írással megadjuk azokat a neveket, amiken az egyes jeleket vagy jelfajtákat a továbbiakban említeni fogjuk.

Tetszőleges jelsorozatokat kurzív latin kisbetűvel jelölünk. Néha úgy adunk meg egy jelsorozatot, hogy vegyesen írunk egymásután jelsorozatokat jelölő latin kisbetűket és a fenti jelek közül egyeseket. Ilyenkor természetesen azt a jelsorozatot értjük, amely úgy jön létre, hogy a latin kisbetűket azokkal a jelsorozatokkal pótoljuk, amelyeket jelölnek. Pl. ha k az $\mathbf{f}_1(\mathbf{0})$, l pedig az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0}))$ jelsorozatot jelöli, akkor $\mathbf{f}_2(k, l)$-en az $\mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(\mathbf{0}), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})))$ jelsorozatot értjük.

Bizonyos jelsorozatokat *kifejezéseknek* nevezünk; mégpedig

(a) a $\mathbf{0}$ konstans kifejezés;

(b) a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ számváltozók kifejezések;

(c) ha $\lambda = 1, \ldots, \beta$, továbbá $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések, akkor az $\mathbf{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ jelsorozat[23] is kifejezés;

(d) más jelsorozat nem kifejezés[24].

Világos, hogy a $\mathbf{0}, \mathbf{f}_1(\mathbf{0}), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})), \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0}))), \ldots$ jelsorozatok mind kifejezések; ezeket a kifejezéseket *számkifejezéseknek* nevezzük és sorra s_0-val, s_1-gyel, s_2-vel, s_3-mal, ... is jelöljük.

Egyenleten tetszőleges $k = l$ alakú jelsorozatot értünk, ahol k és l kifejezések; *egyenletrendszeren* pedig olyan véges halmazt, amelynek elemei egyenletek.

Legyen k és l két kifejezés, v pedig egy számváltozó. Azt a jelsorozatot, amely úgy keletkezik a k jelsorozatból, hogy minden olyan tagja helyébe, amely v-vel azonos, az l jelsorozatot helyettesítjük, így jelöljük: $k(v/l)$. Könnyű látni, hogy $k(v/l)$ is mindig kifejezés. Pl. ha $k = \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_1))$ (ahol $\varrho_\lambda = 3$), akkor $k(\mathbf{v}_1/\mathbf{f}_1(\mathbf{0})) = \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_1(\mathbf{0}), \mathbf{0}, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})))$.

Egy l kifejezést valamely k kifejezés *részének* nevezzük, ha a k jelsorozat bizonyos közvetlenül egymásután következő tagjai sorra az l jelsorozat tagjaival azonosak. Pl. az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0}))$ számkifejezés része az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{0})))$ számkifejezésnek, mert ez utóbbinak harmadik, negyedik, ötödik, hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik tagja sorra azonos az előbbinek egymásután következő tagjaival.

Ha az l kifejezés része a k kifejezésnek, akkor a k jelsorozat tetszőleges olyan, közvetlenül egymásután következő tagjainak sorozatát, amelyek sorra azonosak az l jelsorozat tagjaival, azt is beleértve, hogy a k jelsorozat mely tagjai alkotják ezt a sorozatot, az l kifejezés egy *előfordulásának* nevezzük a k kife-

[23] Vagyis $\varrho_\lambda = 1$ esetén az $\mathbf{f}_\lambda(k_1)$, $\varrho_\lambda = 2$ esetén az $\mathbf{f}_\lambda(k_1, k_2)$, $\varrho_\lambda = 3$ esetén az $\mathbf{f}_\lambda(k_1, k_2, k_3)$ jelsorozat stb.

[24] Más szóval a kifejezések halmaza mindazon jelsorozathalmazok metszete, amelyeknek a 0 konstans és a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ számváltozók elemei, továbbá amelyeknek $\lambda = 1, \ldots, \beta$ esetén a $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ jelsorozatokkal együtt az $\mathbf{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ jelsorozat is eleme. A definíció fenti fogalmazására nézve lásd a szerző [2] dolgozatának 105. oldalán a [6] jegyzetet.

jezésben. Pl. az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0))$ kifejezésnek csak egy előfordulása van az $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0)))$ kifejezésben (csak egyszer fordul elő benne); az $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_1(\underline{\mathbf{f}_1(0)}), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(\underline{\mathbf{f}_1(0)})))$ kifejezésben (ahol $\varrho_\lambda = 3$) azonban két előfordulása van (kétszer fordul elő benne, ti. az aláhúzott helyeken).

Legyen k, l, m három kifejezés. Azoknak a jelsorozatoknak a halmazát, amelyek a k jelsorozatból úgy keletkeznek, hogy kijelöljük az l kifejezésnek tetszőleges számú előfordulását a k kifejezésben (esetleg egyet sem, esetleg mindet, általában azonban csak némelyiket), majd a kijelölt előfordulások mindegyikét az m kifejezéssel pótoljuk, a többi esetleges előfordulását pedig változatlanul hagyjuk, így jelöljük: $k(l//m)$. Pl. ha $k = \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_\mu(0,0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\mu(0,0)))$ (ahol $\varrho_\lambda = 3, \varrho_\mu = 2$), $l = \mathbf{f}_\mu(0,0)$, $m = \mathbf{f}_1(0)$, akkor a $k(l//m)$ halmaz a következő négy elemből áll: $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_\mu(0,0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\mu(0,0)))$ (vagyis k maga; úgy keletkezik k-ból, hogy l-nek *egyik előfordulását sem* pótoljuk m-mel); $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_1(0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\mu(0,0)))$ (úgy keletkezik k-ból, hogy l-nek *első előfordulását* pótoljuk m-mel); $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_\mu(0,0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0)))$ (úgy keletkezik k-ból, hogy l-nek *második előfordulását* pótoljuk m-mel); végül $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{f}_1(0), 0, \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1(0)))$ (úgy keletkezik k-ból, hogy l-nek *mindkét előfordulását* m-mel pótoljuk). Maga k mindig eleme a $k(l//m)$ halmaznak; ha l nem része k-nak, akkor a $k(l//m)$ halmaz egyedül a k elemből áll. Ha $l = m$, akkor a $k(l//m)$ halmaz szintén egyedül a k elemből áll (mert l akárhány előfordulását pótoljuk m-mel, vagyis l-lel, k mindig változatlanul marad); ha azonban $l \neq m$, akkor, mint könnyű látni, a $k(l//m)$ halmaz elemeinek száma 2^ν, ahol ν az l kifejezés előfordulásainak száma k-ban. Azt is könnyű látni, hogy a $k(l//m)$ halmaz elemei mindig valamenynyien kifejezések[25].

Legyen mármost adva egy E egyenletrendszer. Bizonyos egyenleteket az E egyenletrendszer (triviális[26]) *következményeinek* nevezünk, mégpedig

(a) az E egyenletrendszer egyenletei következményei E-nek;

(b) valahányszor a $k = l$ egyenlet következménye az E egyenletrendszernek (k és l kifejezések), továbbá v valamely számváltozó, mindannyiszor a $k(v/0) = l(v/0)$ és $k(v/\mathbf{f}_1(v)) = l(v/\mathbf{f}_1(v))$ egyenletek is következményei E-nek;

[25] A $k(v/l)$ jelsorozatot és a $k(l//m)$ jelsorozat-halmazt (a jelsorozat részének, valamint az l jelsorozatnak a k jelsorozatban való előfordulásának fogalmával együtt) tetszőleges k és l, ill. k, l és m jelsorozatok (nemcsak kifejezések) esetén lehet definiálni; ebben az általános esetben természetesen $k(v/l)$ nem mindig kifejezés és $k(l//m)$ elemei sem mindig azok. (A $k(l//m)$ halmaz definíciójában némi bonyodalmat okoz az, hogy ebben az általános esetben l egyes előfordulásai k-ban „egymásba nyúlhatnak“, ami olyankor, amikor k és l kifejezések, mint könnyen látható, nem lehetséges.) Azonban erre az általánosításra nem lesz szükségünk.

[26] A szerző [2] dolgozatában azért volt szükség a *triviális* jelzőre, mert az egyenletrendszer más, általánosabb értelemben vett következményeiről is szó volt; a jelen dolgozatban azonban elhagyjuk ezt a jelzőt, mert másféle következményről nem lesz szó.

(c) valahányszor a $k=l$ és $k'=l'$ egyenletek következményei az E egyenletrendszernek (k, l, k' és l' kifejezések), továbbá $k''\in k(k'/\!/l')$ és $l''\in l(k'/\!/l')$, mindannyiszor a $k''=l''$ egyenlet is következménye E-nek;

(d) más egyenlet nem következménye E-nek[27].

Egy E egyenletrendszert (az $\mathfrak{f}_2$ funktorra nézve[28]) *általános rekurzív definíciónak* nevezünk, ha tetszőleges $\nu_1,\ldots,\nu_{\varrho_2}$ természetes számokhoz egy és csak egy olyan ν természetes szám van, amelyre az $\mathfrak{f}_2(s_{\nu_1},\ldots,s_{\nu_{\varrho_2}})=s_\nu$ egyenlet következménye E-nek. Ha E általános rekurzív definíció, akkor azt a ϱ_2 változós φ aritmetikai függvényt, amelynek a $(\nu_1,\ldots,\nu_{\varrho_2})$ helyen felvett $\varphi(\nu_1,\ldots,\nu_{\varrho_2})$ értéke, tetszőleges $\nu_1,\ldots,\nu_{\varrho_2}$ természetes számok esetén, ezzel az egyértelműen meghatározott ν számmal egyenlő, *az E általános rekurzív definíció által definiált függvénynek* nevezzük.

Egy φ aritmetikai függvényt *általános rekurzív függvénynek* nevezünk, ha az $\alpha,\beta,\varrho_2,\ldots,\varrho_\beta$ pozitív egész számok alkalmas választása esetén van olyan E általános rekurzív definíció, hogy φ az E által definiált függvény; minden ilyen E egyenletrendszert a függvény *általános rekurzív definíciójának* nevezünk[29].

4. A továbbiakban az $\alpha,\beta,\varrho_2,\ldots,\varrho_\beta$ pozitív egész számokat adottaknak gondoljuk, tehát nem mondjuk meg mindig külön, ha valami függ tőlük; mégpedig (a [47] jegyzetben szereplő E_2 egyenletrendszer kivételével) legyen mindig $\varrho_2=1$.

A CHURCH-tételnek a jelen dolgozatban adandó bizonyítása a következő segédtételen alapul.

SEGÉDTÉTEL. *Bármely E egyenletrendszerhez meg lehet adni olyan (az $\alpha,\beta,\varrho_3,\ldots,\varrho_\beta$ számokon kívül csak E-től függő) $B=B(E)$ zárt logikai formulát, továbbá bármely τ természetes számhoz meg lehet adni olyan (csak τ-tól függő*[30]*) $C=C(\tau)$ zárt logikai formulát, hogy az (E-től és τ-tól függő)*

[27] Más szóval az E egyenletrendszer következményeinek halmaza mindazon egyenlethalmazok metszete, amelyeknek E minden egyenlete eleme, továbbá bármely $k=l$ egyenlettel együtt minden $k(v/0)=l(v/0)$ és $k(v/\mathfrak{f}_1(v))=l(v/\mathfrak{f}_1(v))$ alakú egyenlet is eleme, ahol v tetszőleges számváltozó, végül bármely két $k=l$ és $k'=l'$ egyenlettel együtt minden olyan $k''=l''$ egyenlet is eleme, ahol $k''\in k(k'/\!/l')$ és $l''\in l(k'/\!/l')$. (Lásd a [24] jegyzetet.)

[28] Hasonlóan lehetne definiálni az $\mathfrak{f}_3,\ldots,\mathfrak{f}_\beta$ funktorok valamelyikére nézve általános rekurzív definíció fogalmát; azonban erre nem lesz szükségünk (hiszen az E egyenletrendszer által definiálandó függvény jelölésére, mint mondtuk, mindig az $\mathfrak{f}_2$ funktort használjuk).

[29] A szerző [2] dolgozatában az a kikötés is szerepelt, hogy az E egyenletrendszer nemcsak az $\mathfrak{f}_2$, hanem a benne szereplő többi ($\mathfrak{f}_1$-től különböző) funktorra nézve is általános rekurzív definíció legyen (lásd a megelőző jegyzetet). Azonban ugyanabban a dolgozatban (a 115. oldalon) megjegyeztük, hogy ez a kikötés nem lényeges.

[30] A $C(\tau)$ formula még az $\alpha,\beta,\varrho_3,\ldots,\varrho_\beta$ számok választásától sem függ.

$A = A(E, \tau) = B(E) \& C(\tau)$ logikai formula akkor és csak akkor (vagyis az E egyenletrendszer és a τ természetes szám azon és csak azon választásai esetén) elégíthető ki, ha az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek. Mégpedig $C(\tau)$ gyanánt választhatjuk az alábbi (23) formulát.

BIZONYÍTÁS. Jelöljük I-vel a kifejezések halmazát. Világos, hogy I megszámlálható halmaz, sőt, az is, hogy van olyan (ismétlés nélküli) $i_0, i_1, \ldots$ megszámlálása, hogy

(a) $i_0 = 0,\ i_1 = \mathfrak{v}_1, \ldots, i_\alpha = \mathfrak{v}_\alpha$;

(b) az $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ kifejezés ($\lambda = 1, \ldots, \beta$; $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ tetszőleges kifejezések) később fordul elő az $i_0, i_1, \ldots$ megszámlálásban, mint a $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések bármelyike.

Rögzítsük az I halmaz egy ilyen $i_0, i_1, \ldots$ megszámlálását. Akkor i_μ, $\mu = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots$ esetén, valamely $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ alakú kifejezés, ahol a λ index is, továbbá a $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések és így ezek sorszámai is az $i_0, i_1, \ldots$ megszámlálásban, amelyek (b) folytán mind kisebbek, mint μ, egyértelműen meg vannak határozva μ megadása által. Más szóval van olyan ξ egyváltozós függvény, amely az α-nál nagyobb természetes számok halmazán van értelmezve és értékei β-nál nem nagyobb pozitív egész számok, továbbá van olyan η kétváltozós függvény, amely akkor van értelmezve a (μ, ϱ) helyen, ha μ valamely α-nál nagyobb természetes szám, ϱ pedig valamely $\varrho_{\xi(\mu)}$-nél nem nagyobb pozitív egész szám, és értékei természetes számok, hogy $\mu = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots$ esetén

(2) $$i_\mu = \mathfrak{f}_{\xi(\mu)}(i_{\eta(\mu, 1)}, \ldots, i_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}),$$

továbbá $\mu = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots$; $\varrho = 1, \ldots, \varrho_{\xi(\mu)}$ esetén

(3) $$\eta(\mu, \varrho) < \mu.$$

Legyen adva egy E egyenletrendszer; elemei legyenek (mindegy, milyen sorrendben) az

$$i_{\gamma_1} = i_{\delta_1},$$
$$\cdots\cdots$$
$$i_{\gamma_\sigma} = i_{\delta_\sigma}$$

egyenletek. Legyen továbbá

$$\varepsilon = \max(\gamma_1, \delta_1, \ldots, \gamma_\sigma, \delta_\sigma).$$

Definiáljuk az $\Omega, \Phi_1, \ldots, \Phi_\beta, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$ és Θ logikai függvényeket az I halmazon a következőképpen[31].

$$\Omega(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x = 0, \\ \downarrow & \text{különben}; \end{cases}$$

[31] Itt $x, y, z, u, x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}$ az I halmaz tetszőleges elemei, vagyis tetszőleges kifejezések; $\uparrow$ az „igaz", $\downarrow$ a „hamis" logikai érték jele.

$\lambda = 1, \ldots, \beta$ esetén

$$\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x = \mathfrak{f}_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}), \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

$$\Psi_0(x, y, z) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } y \text{ a } \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_\alpha \text{ számváltozók egyike és } z = x(y\,0), \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

$$\Psi_1(x, y, z) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } y \text{ a } \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_\alpha \text{ számváltozók egyike és } z = x(y\,\mathfrak{f}_1(y)), \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

$$\Psi_2(x, y, z, u) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u \in x(y\,z), \\ \downarrow & \text{különben;} \end{cases}$$

$$\Theta(x, y) \begin{cases} \uparrow, & \text{ha az } x = y \text{ egyenlet az } E \text{ egyenletrendszer következménye,} \\ \downarrow & \text{különben.} \end{cases}$$

Akkor az alábbi (4)—(22) formulák $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$; $\varkappa' = 1, \ldots, \alpha$, de $\varkappa' \neq \varkappa$; $\lambda = 1, \ldots, \beta$; $\mu = \alpha + 1, \ldots, \varepsilon$; $\nu = 1, \ldots, \sigma$ esetén az $\uparrow$ logikai értéket veszik fel, ha az $u_0, \ldots, u_\varepsilon$ szabad individuumváltozók helyébe sorra az $i_0, \ldots, i_\varepsilon$ kifejezéseket, a H, $F_1, \ldots, F_\beta$, G_0, G_1, G_2 és T logikai függvényváltozók helyébe sorra az Ω, $\Phi_1, \ldots, \Phi_\beta$, Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 és Θ logikai függvényeket helyettesítjük, a kvantorokat pedig úgy értjük, hogy változóik az I individuumtartományon futnak át. Minden egyes formula után megadjuk annak rövid indokolását, miért van ez így[32].

$$(4) \qquad H(u_0).$$

Valóban, az Ω logikai függvény definíciója folytán $\Omega(i_0) = \Omega(0) = \uparrow$.

$$(5) \qquad F_{\xi(\mu)}(u_{\eta(\mu,1)}, \ldots, u_{\eta(\mu,\varrho_{\xi(\mu)})}, u_\mu).$$

Valóban, a $\Phi_{\xi(\mu)}$ logikai függvény definíciója folytán, (2) miatt, $\Phi_{\xi(\mu)}(i_{\eta(\mu,1)},$ $\ldots, i_{\eta(\mu,\varrho_{\xi(\mu)})}, i_\mu) = \uparrow$.

$$(6) \qquad (x_1)\ldots(x_{\varrho_\lambda})(Ex)F_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x).$$

Valóban, a Φ_λ logikai függvény definíciója folytán tetszőleges $x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekhez van olyan x kifejezés, ti. $x = \mathfrak{f}_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda})$, hogy $\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x) = \uparrow$.

$$(7) \qquad (x_1)\ldots(x_{\varrho_\lambda})(x)(y)((F_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x) \,\&\, F_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, y)) \rightarrow x = y).$$

[32] Az indokolásból látszik, hogy a (4) és (5) formulák bizonyos értelemben az $i_0, i_1, \ldots$ sorozat képzésmódját, a (6) és (7) formulák a kifejezéseknek egymásból való képzésmódját, a (8)—(11) formulák a 0 kifejezés helyettesítését valamely $\mathrm{v}_\varkappa$ számváltozó helyébe, a (12)—(15) formulák az $\mathfrak{f}_1(\mathrm{v}_\varkappa)$ kifejezés helyettesítését $\mathrm{v}_\varkappa$ helyébe, a (16)—(18) formulák valamely egyenlet „alkalmazását" (baloldalának egy másik egyenlet bal- és jobboldalán való bizonyos számú előfordulásának jobboldalával való pótlását), a (19)—(22) formulák pedig az E egyenletrendszer következményeinek képzésmódját „axiómatizálják". Az indokolás egyelőre csak azt mutatja, hogy az „axiómákat" kielégíti az „alapfogalmak" (ti. a bennük előforduló logikai függvényváltozók) e választása; a bizonyítás második fele azt is mutatja majd, hogy ezek az „axiómák" bizonyos értelemben „teljes axiómarendszert" alkotnak. — A (7) formulában $x = y$ természetesen az azonosság-relációt jelöli.

Valóban, ha $\Phi_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda},x) = \Phi_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda},y) = \uparrow$ ($x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda}$, x és y kifejezések), akkor a Φ_λ logikai függvény definíciója folytán $x = \mathbf{f}_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda}) = y$.

(8) $$G_0(u_0, u_\varkappa, u_0).$$

Valóban, a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_0(i_0, i_\varkappa, i_0) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_0(i_\varkappa/0) = 0(\mathbf{v}_\varkappa/0) = 0 = i_0$.

(9) $$G_0(u_\varkappa, u_\varkappa, u_0).$$

Valóban, a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_0(i_\varkappa, i_\varkappa, i_0) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_\varkappa(i_\varkappa/0) = \mathbf{v}_\varkappa(\mathbf{v}_\varkappa/0) = 0 = i_0$.

(10) $$G_0(u_{\varkappa'}, u_\varkappa, u_{\varkappa'}).$$

Valóban, a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_0(i_{\varkappa'}, i_\varkappa, i_{\varkappa'}) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_{\varkappa'}(i_\varkappa/0) = \mathbf{v}_{\varkappa'}(\mathbf{v}_\varkappa/0) = \mathbf{v}_{\varkappa'} = i_{\varkappa'}$.

(11) $$(x_1)\ldots(x_{\varrho_\lambda})(x)(y_1)\ldots(y_{\varrho_\lambda})(y)\Big(\Big(F_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda},x)\,\&\,\&\prod_{\varrho=1}^{\varrho_\lambda} G_0(x_\varrho, u_\varkappa, y_\varrho)\,\&\,F_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda},y)\Big) \to G_0(x, u_\varkappa, y)\Big).$$

Valóban[33], ha $\Phi_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda},x) = \Phi_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda},y) = \uparrow$ és $\varrho = 1,\ldots,\varrho_\lambda$ esetén $\Psi_0(x_\varrho, i_\varkappa, y_\varrho) = \uparrow$ ($x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda}, x, y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda}$ és y kifejezések), akkor a Φ_λ és Ψ_0 logikai függvények definíciója folytán $x = \mathbf{f}_\lambda(x_1,\ldots,x_{\varrho_\lambda})$, $y = \mathbf{f}_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda})$ és $\varrho = 1,\ldots,\varrho_\lambda$ esetén $y_\varrho = x_\varrho(i_\varkappa/0) = x_\varrho(\mathbf{v}_\varkappa/0)$; tehát $x(i_\varkappa/0) = x(\mathbf{v}_\varkappa/0) = \mathbf{f}_\lambda(x_1(\mathbf{v}_\varkappa/0),\ldots,x_{\varrho_\lambda}(\mathbf{v}_\varkappa/0)) = \mathbf{f}_\lambda(y_1,\ldots,y_{\varrho_\lambda}) = y$, úgy hogy a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_0(x, i_\varkappa, y) = \uparrow$.

(12) $$G_1(u_0, u_\varkappa, u_0).$$

Valóban, a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_1(i_0, i_\varkappa, i_0) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_0(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = 0(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = 0 = i_0$.

(13) $$(x)(F_1(u_\varkappa, x) \to G_1(u_\varkappa, u_\varkappa, x))$$

Valóban, ha $\Phi_1(i_\varkappa, x) = \uparrow$ (x kifejezés), akkor a Φ_1 logikai függvény definíciója folytán $x = \mathbf{f}_1(i_\varkappa) = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)$, tehát a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_1(i_\varkappa, i_\varkappa, x) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_\varkappa(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = \mathbf{v}_\varkappa(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa) = x$.

(14) $$G_1(u_{\varkappa'}, u_\varkappa, u_{\varkappa'}).$$

[33] A Π jellel a (11), (15), (18) és (23) formulákban a megfelelő tagok konjunkcióját rövidítjük. Ha egy konjunkciós tag sincs (ha a (23) formulában $\tau = 0$), akkor a Π jellel rövidített konjunkció $\left(\prod_{t=1}^{\tau} F_1(x_{t-1}, x_t)\right)$ elmarad; ha csak egy konjunkciós tag van (pl. ha a (11) formulában $\varrho_\lambda = 1$), akkor a Π jellel rövidített konjunkció természetesen ezt az egy tagot jelenti.

Valóban, a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_1(i_{\varkappa'}, i_\varkappa, i_{\varkappa'}) = \uparrow$, mert $i_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa$ számváltozó és $i_{\varkappa'}(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = \mathbf{v}_{\varkappa'}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{v}_{\varkappa'} = i_{\varkappa'}$.

(15) $$(x_1)\dots(x_{\varrho_\lambda})(x)(y_1)\dots(y_{\varrho_\lambda})(y)((F_\lambda(x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda},x)\,\&$$
$$\& \prod_{\varrho=1}^{\varrho_\lambda} G_1(x_\varrho, u_\varkappa, y_\varrho)\,\&\, F_\lambda(y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda},y)) \to G_1(x,u_\varkappa,y)).$$

Valóban, ha $\Phi_\lambda(x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda},x) = \Phi_\lambda(y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda},y) = \uparrow$ és $\varrho = 1,\dots,\varrho_\lambda$ esetén $\Psi_1(x_\varrho, u_\varkappa, y_\varrho) = \uparrow$ ($x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda}$, x, $y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda}$ és y kifejezések), akkor a Φ_λ és Ψ_1 logikai függvények definíciója folytán $x = \mathbf{f}_\lambda(x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda})$, $y = \mathbf{f}_\lambda(y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda})$ és $\varrho = 1,\dots,\varrho_\lambda$ esetén $y_\varrho = x_\varrho(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = x_\varrho(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$; tehát $x(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = x(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{f}_\lambda(x_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)),\dots,x_{\varrho_\lambda}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))) = \mathbf{f}_\lambda(y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda}) = y$, úgy, hogy a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_1(x, i_\varkappa, y) = \uparrow$.

(16) $$(x)(y)(z)G_2(x,y,z,x).$$

Valóban, a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán tetszőleges x, y, és z kifejezések esetén $\Psi_2(x,y,z,x) = \uparrow$, mert $x \in x(y//z)$ (ti. ha az x kifejezésben az y kifejezés egyik előfordulását sem pótoljuk a z kifejezéssel, akkor az x kifejezés változatlan marad).

(17) $$(x)(y)G_2(x,x,y,y).$$

Valóban, a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán tetszőleges x és y kifejezések esetén $\Psi_2(x,x,y,y) = \uparrow$, mert $y \in x(x//y)$ (ti. ha az x kifejezésben az x kifejezés egyetlen előfordulását az y kifejezéssel pótoljuk, akkor az y kifejezés keletkezik belőle). .

(18) $$(x_1)\dots(x_{\varrho_\lambda})(x)(z)(w)(y_1)\dots(y_{\varrho_\lambda})(y)((F_\lambda(x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda},x)\,\&$$
$$\& \prod_{\varrho=1}^{\varrho_\lambda} G_2(x_\varrho, z, w, y_\varrho)\,\&\, F_\lambda(y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda},y)) \to G_2(x,z,w,y)).$$

Valóban, ha $\Phi_\lambda(x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda},x) = \Phi_\lambda(y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda},y) = \uparrow$ és $\varrho = 1,\dots,\varrho_\lambda$ esetén $\Psi_2(x_\varrho, z, w, y_\varrho) = \uparrow$ ($x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda}$, x, $y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda}$, y, z és w kifejezések), akkor a Φ_λ és Ψ_2 logikai függvények definíciója folytán $x = \mathbf{f}_\lambda(x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda})$, $y = \mathbf{f}_\lambda(y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda})$ és $\varrho = 1,\dots,\varrho_\lambda$ esetén $y_\varrho \in x_\varrho(z//w)$, vagyis az y_ϱ kifejezés úgy keletkezik az x_ϱ kifejezésből, hogy benne a z kifejezés bizonyos előfordulásait (esetleg egyet sem, esetleg mindet) a w kifejezéssel pótoljuk. A z kifejezés ugyanezen előfordulásait pótolva az $x = \mathbf{f}_\lambda(x_1,\dots,x_{\varrho_\lambda})$ kifejezésben a w kifejezéssel, az $\mathbf{f}_\lambda(y_1,\dots,y_{\varrho_\lambda}) = y$ kifejezés keletkezik; tehát $y \in x(z//w)$ és így a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán $\Psi_2(x,z,w,y) = \uparrow$.

(19) $$T(u_{\gamma_\nu}, u_{\delta_\nu}).$$

Valóban, a Θ logikai függvény definíciója folytán $\Theta(i_{\gamma_\nu}, i_{\delta_\nu}) = \uparrow$, mert az $i_{\gamma_\nu} = i_{\delta_\nu}$ egyenlet az E egyenletrendszer eleme, tehát következménye az E egyenletrendszernek.

(20) $(x)(y)(z)(w)((T(x,y) \,\&\, G_0(x, u_\varkappa, z) \,\&\, G_0(y, u_\varkappa, w)) \rightarrow T(z, w))$.

Valóban, ha $\Theta(x,y) = \Psi_0(x, i_\varkappa, z) = \Psi_0(y, i_\varkappa, w) = \uparrow$ (x, y, z és w kifejezések), akkor a Θ és Ψ_0 logikai függvények definíciója folytán egyrészt az $x = y$ egyenlet következménye az E egyenletrendszernek, másrészt $z = x(i_\varkappa/\mathbf{0}) = x(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ és $w = y(i_\varkappa/\mathbf{0}) = y(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$; tehát a $z = w$ egyenlet is következménye az E egyenletrendszernek és így, a Θ logikai függvény definíciója folytán, $\Theta(z, w) = \uparrow$.

(21) $(x)(y)(z)(w)((T(x,y) \,\&\, G_1(x, u_\varkappa, z) \,\&\, G_1(y, u_\varkappa, w)) \rightarrow T(z, w))$.

Valóban, ha $\Theta(x,y) = \Psi_1(x, i_\varkappa, z) = \Psi_1(y, i_\varkappa, w) = \uparrow$ (x, y, z és w kifejezések), akkor a Θ és Ψ_1 logikai függvények definíciója folytán egyrészt az $x = y$ egyenlet következménye az E egyenletrendszernek, másrészt $z = x(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = x(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$ és $w = y(i_\varkappa/\mathbf{f}_1(i_\varkappa)) = y(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$; tehát a $z = w$ egyenlet is következménye az E egyenletrendszernek és így, a Θ logikai függvény definíciója folytán, $\Theta(z, w) = \uparrow$.

(22) $(x)(y)(z)(t)(u)(w)((T(x,y) \,\&\, T(z,t) \,\&\, G_2(x, z, t, u) \,\&$
$\& \, G_2(y, z, t, w) \rightarrow T(u, w))$.

Valóban, ha $\Theta(x,y) = \Theta(z,t) = \Psi_2(x, z, t, u) = \Psi_2(y, z, t, w) = \uparrow$ (x, y, z, t, u és w kifejezések), akkor a Θ és Ψ_2 logikai függvények definíciója folytán egyrészt az $x = y$ és a $z = t$ egyenletek következményei az E egyenletrendszernek, másrészt $u \in x(z//t)$ és $w \in y(z//t)$; tehát az $u = w$ egyenlet is következménye az E egyenletrendszernek és így, a Θ logikai függvény definíciója folytán, $\Theta(u, w) = \uparrow$.

Legyen mármost adva egy olyan τ természetes szám, amelyre az $\mathbf{f}_2(s_\tau) = \mathbf{0}$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek. Akkor a

$$(23) \qquad (x_0)\dots(x_\tau)(y)\left(\left(H(x_0) \,\&\, \prod_{\iota=1}^{\tau} F_1(x_{\iota-1}, x_\iota) \,\&\, F_2(x_\tau, y)\right) \rightarrow \overline{T}(y, x_0)\right)$$

formula is az $\uparrow$ logikai értékét veszi fel, ha a H, F_1, F_2 és T logikai függvényváltozók helyébe sorra az Ω, Φ_1, Φ_2 és Θ logikai függvényeket helyettesítjük. Valóban, ha $\Omega(x_0) = \Phi_2(x_\tau, y) = \uparrow$ és $\iota = 1, \dots, \tau$ esetén $\Phi_1(x_{\iota-1}, x_\iota) = \uparrow$ ($x_0, \dots, x_\tau$ és y kifejezések), akkor az Ω, Φ_1 és Φ_2 logikai függvények definíciója folytán $x_0 = \mathbf{0}$, $y = \mathbf{f}_2(x_\tau)$ és $\iota = 1, \dots, \tau$ esetén $x_\iota = \mathbf{f}_1(x_{\iota-1})$; tehát $x_0 = s_0$, $x_1 = \mathbf{f}_1(x_0) = \mathbf{f}_1(\mathbf{0}) = s_1$, $x_2 = \mathbf{f}_1(x_1) = \mathbf{f}_1(s_1) = s_2, \dots, x_\tau = \mathbf{f}_1(x_{\tau-1}) = \mathbf{f}_1(s_{\tau-1}) = s_\tau$ és $y = \mathbf{f}_2(x_\tau) = \mathbf{f}_2(s_\tau)$. Ennélfogva az $y = x_0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek, úgy, hogy a Θ logikai függvény definíciója folytán $\Theta(y, x_0) = \downarrow$ és így $\overline{\Theta}(y, x_0) = \uparrow$.

Jelöljük mármost B-vel azt a zárt logikai formulát, amely úgy keletkezik, hogy az (5) formulában μ helyébe az $\alpha+1, \ldots, \varepsilon$ számokat, a (6), (7) és (18) formulákban λ helyébe az $1, \ldots, \beta$ számokat, a (8), (9), (12), (13), (20) és (21) formulákban $\varkappa$ helyébe az $1, \ldots, \alpha$ számokat, a (10) és (14) formulákat $\varkappa$ és $\varkappa'$ helyébe az $1, \ldots, \alpha$ számokat, de $\varkappa$ és $\varkappa'$ helyébe különböző számokat, a (11) és (15) formulákban $\varkappa$ helyébe az $1, \ldots, \alpha$, λ helyébe pedig az $1, \ldots, \beta$ számokat, a (19) formulában ν helyébe az $1, \ldots, \sigma$ számokat helyettesítjük, majd az így keletkező logikai formuláknak, valamint a (4), (16), (17) és (22) formuláknak (valamilyen sorrendben) a konjunkcióját képezzük, végül a kapott logikai formulában az $u_0, \ldots, u_\varepsilon$ szabad változókat (a formula elejére írt és a formula egész további részére vonatkozó) $(Eu_0) \ldots (Eu_\varepsilon)$ exisztenciális kvantorok segítségével lekötjük. Ez a B formula (az α, β, $\varrho_3, \ldots, \varrho_\beta$ számok választásán kívül) nyilván csak az E egyenletrendszertől függ[34]. Jelöljük továbbá C-vel a (23) zárt logikai formulát; ez pedig nyilván csak a τ természetes számtól függ. Az eddigiekből látszik, hogy ha az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek, akkor az $A = B \,\&\, C$ logikai formula kielégíthető, hiszen az I individuumtartományon kielégül, ha a $H, F_1, \ldots, F_\beta, G_0, G_1, G_2$ és T logikai függvényváltozók helyébe sorra az $\Omega, \Phi_1, \ldots, \Phi_\beta, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$ és Θ logikai függvényeket helyettesítjük.

5. Eszerint a segédtétel bizonyításához azt kell még csak megmutatnunk, hogy fordítva, ha az A logikai formula kielégíthető, akkor az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek.

Tegyük fel tehát, hogy az A formula kielégíthető, mégpedig legyen I' olyan halmaz, továbbá $\Omega', \Phi'_1, \ldots, \Phi'_\beta, \Psi'_0, \Psi'_1, \Psi'_2$ és Θ' olyan, az I' halmazon értelmezett logikai függvények, hogy az A formula kielégül az I' individuumtartományon, ha a $H, F_1, \ldots, F_\beta, G_0, G_1, G_2$ és T logikai függvényváltozók helyébe sorra az $\Omega', \Phi'_1, \ldots, \Phi'_\beta, \Psi'_0, \Psi'_1, \Psi'_2$ és Θ' logikai függvényeket helyettesítjük, a kvantorokat pedig úgy értjük, hogy változóik az I' individuumtartományon futnak át[35]. Akkor a (4)—(22) formulák $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$; $\varkappa' = 1, \ldots, \alpha$, de $\varkappa' \neq \varkappa$; $\lambda = 1, \ldots, \beta$; $\mu = \alpha+1, \ldots, \varepsilon$; $\nu = 1, \ldots, \sigma$ esetén az $\uparrow$ logikai értéket veszik fel, ha az $u_0, \ldots, u_\varepsilon$ szabad individuumváltozók helyébe sorra az I' halmaz alkalmas $i'_0, \ldots, i'_\varepsilon$ elemeit, a $H, F_1, \ldots, F_\beta$ G_0, G_1, G_2 és T logikai függvényváltozók helyébe pedig sorra az $\Omega', \Phi'_1, \ldots, \Phi'_\beta$, $\Psi'_0, \Psi'_1, \Psi'_2$ és Θ' logikai függvényeket helyettesítjük.

[34] Az E egyenletrendszer a (19) konjunkcióstagon át befolyásolja a B logikai formulát, hiszen a $\gamma_1, \delta_1, \ldots, \gamma_\sigma, \delta_\sigma$ számok az E egyenletrendszertől függnek.

[35] A kvantorok ebben és a következő pontban mindig így értendők, anélkül, hogy ezt mindig külön megmondanók.

(6) és (7) miatt[36] vannak olyan, az I' halmazon értelmezett, sorra $\varrho_1, \ldots, \varrho_\beta$ változós $\varphi_1, \ldots, \varphi_\beta$ matematikai függvények, hogy $\lambda = 1, \ldots, \beta$; $x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}$, $x \in I'$ esetén $\Phi'_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda}, x)$ logikai értéke akkor és csak akkor $\dagger$, ha $x = \varphi_\lambda(x_1, \ldots, x_{\varrho_\lambda})$. Ennélfogva (5) miatt[37] $\mu = \alpha + 1, \ldots, \varepsilon$ esetén

$$(24) \qquad i'_\mu = \varphi_{\xi(\mu)}(i'_{\eta(\mu,1)}, \ldots, i'_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}).$$

Definiáljuk az I halmaznak az I' halmazba való ω (egyértelmű) leképezését a következőképpen[38]. Legyen

$$(25) \qquad \omega(0) = i'_0,$$

továbbá $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$ esetén

$$(26) \qquad \omega(\mathrm{v}_\varkappa) = i'_\varkappa,$$

ha végül a k kifejezés $\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ alakú ($\lambda = 1, \ldots, \beta$; $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések), akkor legyen

$$(27) \qquad \omega(k) = \omega(\mathfrak{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})) = \varphi_\lambda(\omega(k_1), \ldots, \omega(k_{\varrho_\lambda})).$$

A kifejezés fogalmának definíciója alapján (különösen (d) figyelembevételével, lásd a 8. oldalon) világos, hogy (25), (26) és (27) által $\omega(k)$ minden k kifejezésre értelmezve van és mindig I' eleme.

Megmutatjuk, hogy $\mu = 0, 1, \ldots, \varepsilon$ esetén

$$(28) \qquad \omega(i_\mu) = i'_\mu.$$

Valóban, ez $i_0 = 0, i_1 = \mathrm{v}_1, \ldots, i_\alpha = \mathrm{v}_\alpha$ folytán (25) és (26) miatt áll, ha $\mu = 0, 1, \ldots, \alpha$. Ha pedig $\mu = \alpha + 1, \ldots, \varepsilon$ és feltesszük, hogy (28) μ helyett minden μ-nél kisebb természetes számra áll, akkor (2) és (27) miatt

$$\omega(i_\mu) = \omega(\mathfrak{f}_{\xi(\mu)}(i_{\eta(\mu,1)}, \ldots, i_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})})) = \varphi_{\xi(\mu)}(\omega(i_{\eta(\mu,1)}), \ldots, \omega(i_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}));$$

itt (3) miatt, az indukciós feltevés folytán $\varrho = 1, \ldots, \varrho_{\xi(\mu)}$ esetén

$$\omega(i_{\eta(\mu,\varrho)}) = i'_{\eta(\mu,\varrho)},$$

tehát (24) miatt

$$\omega(i_\mu) = \varphi_{\xi(\mu)}(i'_{\eta(\mu,1)}, \ldots, i'_{\eta(\mu, \varrho_{\xi(\mu)})}) = i'_\mu,$$

amivel (28)-at $\mu = \alpha + 1, \ldots, \varepsilon$ esetén is bebizonyítottuk.

[36] Vagyis amiatt, hogy a (6) és (7) formulák $\lambda = 1, \ldots, \beta$ esetén az $\dagger$ logikai értéket veszik fel, ha bennük az F_λ logikai függvényváltozó helyébe a Φ'_λ logikai függvényt helyettesítjük. Hasonlóan értendők a továbbiak során is a (4)—(23) formulákra való ilyen utalások. (Az olyan formulák esetén, amelyekben az $u_0, \ldots, u_\varepsilon$ szabad változók egy része is szerepel, úgy értendő az ilyen utalás, hogy ezek helyébe sorra az I' halmaz $i'_0, \ldots, i'_\varepsilon$ elemeit helyettesítjük.)

[37] Lásd a megelőző jegyzetet (utolsó, zárójelbe tett mondatával együtt).

[38] Az ω tehát olyan egyváltozós függvény, amely a kifejezések I halmazán van értelmezve és értékei az I' halmaz elemei. Az ω leképezés nem szükségképpen *kölcsönösen* egyértelmű és nem szükségképpen az *egész* I' halmazra képezi le az I halmazt.

(28) folytán nem okoz félreértést, ha valamely k kifejezésnek az ω leképezés szolgáltatta $\omega(k)$ képét rövidség kedvéért általában k'-vel is jelöljük. Ezt a jelölést használjuk, valahányszor a k kifejezés egyetlen jelből áll, vagy ha egyetlen (esetleg indexes) betűvel jelöljük; más esetben megmaradunk az $\omega(k)$ jelölés mellett. Eszerint (25) és (26) így is írható:

(25') $$\mathbf{0}' = i_0',$$

(26') $$\mathbf{v}_\varkappa' = i_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, \ldots, \alpha);$$

(27)-et pedig így is kimondhatjuk: ha $k = \mathbf{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$ $(\lambda = 1, \ldots, \beta;$ $k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}$ kifejezések), akkor $k' = \varphi_\lambda(k_1', \ldots, k_{\varrho_\lambda}')$.

6. Legyen Φ az $\Omega, \Phi_1, \ldots, \Phi_\beta, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Theta$ logikai függvények valamelyike, π pedig a Φ logikai függvény független változóinak száma (tehát $\Phi = \Omega$ esetén $\pi = 1$; $\Phi = \Phi_\lambda$ esetén $\pi = \varrho_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, \beta)$; $\Phi = \Psi_0$ és $\Phi = \Psi_1$ esetén $\pi = 3$; $\Phi = \Psi_2$ esetén $\pi = 4$; végül $\Phi = \Theta$ esetén $\pi = 2$). Jelöljük Φ'-vel $\Phi = \Omega$ esetén az Ω', $\Phi = \Phi_\lambda$ esetén $(\lambda = 1, \ldots, \beta)$ a Φ_λ', $\Phi = \Psi_\nu$ esetén $(\nu = 0, 1, 2)$ a Ψ_ν', végül $\Phi = \Theta$ esetén a Θ' logikai függvényt. Megmutatjuk, hogy *valahányszor $k_1, \ldots, k_\pi$ olyan kifejezések, amelyekre $\Phi(k_1, \ldots, k_\pi)$ logikai értéke $\uparrow$, mindannyiszor $\Phi'(k_1', \ldots, k_\pi')$ logikai értéke is $\uparrow$.*

Ez az állítás $\Phi = \Omega$ esetén igaz, mert akkor $\Phi(k_1)$ logikai értéke, az Ω logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha $k_1 = \mathbf{0}$; már pedig ekkor (25') és (4) miatt

$$\Phi'(k_1') = \Omega'(\mathbf{0}') = \Omega'(i_0') = \uparrow.$$

Ha $\Phi = \Phi_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, \beta)$, akkor $\Phi(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda}, k_{\varrho_\lambda+1})$ logikai értéke, a Φ_λ logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha $k_{\varrho_\lambda+1} = \mathbf{f}_\lambda(k_1, \ldots, k_{\varrho_\lambda})$; ekkor (27) (már említett átfogalmazása) folytán $k_{\varrho_\lambda+1}' = \varphi_\lambda(k_1', \ldots, k_{\varrho_\lambda}')$ tehát a φ_λ matematikai függvény bevezetésekor említett tulajdonsága miatt

$$\Phi'(k_1', \ldots, k_{\varrho_\lambda}', k_{\varrho_\lambda+1}') = \Phi_\lambda'(k_1', \ldots, k_{\varrho_\lambda}', k_{\varrho_\lambda+1}') = \uparrow,$$

tehát állításunk ekkor is igaz.

Ha $\Phi = \Psi_0$, akkor $\Phi(k_1, k_2, k_3)$ logikai értéke, a Ψ_0 logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\uparrow$, ha k_2 a számváltozók egyike, mondjuk $k_2 = \mathbf{v}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ és $k_3 = k_1(k_2/\mathbf{0}) = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$. Ebben az esetben, (26') folytán,

$$\Phi'(k_1', k_2', k_3') = \Psi_0'(k_1', \mathbf{v}_\varkappa', k_3') = \Psi_0'(k_1', i_\varkappa', k_3');$$

azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha $k_3 = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$, akkor $\Psi_0'(k_1', i_\varkappa', k_3') = \uparrow$. Ez áll, ha $k_1 = \mathbf{0}$, mert akkor $k_3 = \mathbf{0}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tehát (25') folytán, $k_1' = k_3' = \mathbf{0}' = i_0'$, már pedig (8) miatt $\Psi_0'(i_0', i_\varkappa', i_0') = \uparrow$. Ha $k_1 = \mathbf{v}_\varkappa$, akkor $k_3 = \mathbf{v}_\varkappa(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tehát, (26') és (25') folytán, $k_1' = \mathbf{v}_\varkappa' = i_\varkappa'$, $k_3' = \mathbf{0}' = i_0'$; ennélfogva állításunk ekkor is igaz, mert (9) miatt $\Psi_0'(i_\varkappa', i_\varkappa', i_0') = \dagger$. Ha $k_1 = \mathbf{v}_{\varkappa'}$ ($\varkappa' = 1,\dots,\alpha$, de $\varkappa' \neq \varkappa$), akkor $k_3 = \mathbf{v}_{\varkappa'}(\mathbf{v}_\varkappa/0) = \mathbf{v}_{\varkappa'}$, tehát, (26') folytán, $k_1' = k_3' = \mathbf{v}_{\varkappa'}' = i_{\varkappa'}'$; ennélfogva állításunk ekkor is igaz, mert (10) miatt $\Psi_0'(i_{\varkappa'}', i_\varkappa', i_{\varkappa'}') = \dagger$. Legyen mármost $k_1 = \mathbf{f}_\lambda(l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda})$ ($\lambda = 1,\dots,\beta$; $l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda}$ kifejezések) és tegyük fel, hogy állításunk igaz k_1 helyett az $l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekre; vagyis, hogy ha $m_\varrho = l_\varrho(\mathbf{v}_\varkappa/0)$ ($\varrho = 1,\dots,\varrho_\lambda$), akkor $\Psi_0'(l_\varrho', i_\varkappa', m_\varrho') = \dagger$. A Φ_λ logikai függvény definíciója folytán egyrészt $\Phi_\lambda(l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda}, k_1) = \dagger$, másrészt, $k_3 = \mathbf{f}_\lambda(l_1(\mathbf{v}_\varkappa/0),\dots,l_{\varrho_\lambda}(\mathbf{v}_\varkappa/0)) = \mathbf{f}_\lambda(m_1,\dots,m_{\varrho_\lambda})$ miatt, $\Phi_\lambda(m_1,\dots,m_{\varrho_\lambda},k_3) = \dagger$; tehát, állításunknak a $\Phi = \Phi_\lambda$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része miatt, $\Phi_\lambda'(l_1',\dots,l_{\varrho_\lambda}',k_1') = \Phi_\lambda'(m_1',\dots,m_{\varrho_\lambda}',k_3') = \dagger$. Ennélfogva, (11) miatt, $\Psi_0'(k_1', i_\varkappa', k_3') = \dagger$; ezzel állításunkat a $\Phi = \Psi_0$ esetben tetszőleges k_1 kifejezésre bebizonyítottuk[39].

Ha $\Phi = \Psi_1$, akkor $\Phi(k_1,k_2,k_3)$ logikai értéke, a Ψ_1 logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\dagger$, ha k_2 a számváltozók egyike, mondjuk $k_2 = \mathbf{v}_\varkappa$ ($\varkappa = 1,\dots,\alpha$) és $k_3 = k_1(k_2/\mathbf{f}_1(k_2)) = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$. Ebben az esetben, (26') folytán,

$$\Phi'(k_1',k_2',k_3') = \Psi_1'(k_1', \mathbf{v}_\varkappa', k_3') = \Psi_1'(k_1', i_\varkappa', k_3');$$

azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha $k_3 = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$, akkor $\Psi_1'(k_1', i_\varkappa', k_3') = \dagger$. Ez áll, ha $k_1 = 0$, mert akkor $k_3 = 0(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = 0$, tehát, (25') folytán, $k_1' = k_3' = 0' = i_0'$, már pedig (12) miatt $\Psi_1'(i_0', i_\varkappa', i_0') = \dagger$. Ha $k_1 = \mathbf{v}_\varkappa$, akkor $k_3 = \mathbf{v}_\varkappa(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)$, tehát, a Φ_1 logikai függvény definíciója folytán, $\Phi_1(\mathbf{v}_\varkappa, k_3) = \dagger$ és így, állításunknak a $\Phi = \Phi_1$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része, valamint (26') miatt, $\Phi_1'(\mathbf{v}_\varkappa', k_3') = \Phi_1'(i_\varkappa', k_3') = \dagger$; ennélfogva (13) miatt $\Psi_1'(i_\varkappa', i_\varkappa', k_3') = \dagger$, ami azt jelenti, hogy állításunk ebben az esetben is igaz, hiszen (26') folytán $k_1' = \mathbf{v}_\varkappa' = i_\varkappa'$. Ha $k_1 = \mathbf{v}_{\varkappa'}$ ($\varkappa' = 1,\dots,\alpha$, de $\varkappa' \neq \varkappa$), akkor $k_3 = \mathbf{v}_{\varkappa'}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)) = \mathbf{v}_{\varkappa'}$, tehát, (26') folytán, $k_1' = k_3' = \mathbf{v}_{\varkappa'}' = i_{\varkappa'}'$; ennélfogva állításunk ekkor is igaz, mert (14) miatt $\Psi_1'(i_{\varkappa'}', i_\varkappa', i_{\varkappa'}') = \dagger$. Legyen mármost $k_1 = \mathbf{f}_\lambda(l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda})$ ($\lambda = 1,\dots,\beta$; $l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda}$ kifejezések) és tegyük fel, hogy állításunk igaz k_1 helyett az $l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekre; vagyis, hogy ha $m_\varrho = l_\varrho(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$ ($\varrho = 1,\dots,\varrho_\lambda$), akkor $\Psi_1'(l_\varrho', i_\varkappa', m_\varrho') = \dagger$. A Φ_λ logikai függvény definíciója folytán egyrészt $\Phi_\lambda(l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda},k_1) = \dagger$, másrészt, $k_3 = \mathbf{f}_\lambda(l_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa)),\dots,l_{\varrho_\lambda}(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))) = \mathbf{f}_\lambda(m_1,\dots,m_{\varrho_\lambda})$ miatt, $\Phi_\lambda(m_1,\dots,m_{\varrho_\lambda},k_3) = \dagger$; tehát állításunknak a $\Phi = \Phi_\lambda$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része miatt, $\Phi_\lambda'(l_1',\dots,l_{\varrho_\lambda}',k_1') = \Phi_\lambda'(m_1',\dots,m_{\varrho_\lambda}',k_3') = \dagger$. Ennélfogva, (15) miatt,

[39] A bizonyítás azon alapul, hogy ha egy állítás igaz a $0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\alpha$ kifejezésekre és valahányszor bizonyos $l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekre igaz, mindannyiszor igaz az $\mathbf{f}_\lambda(l_1,\dots,l_{\varrho_\lambda})$ kifejezésre is ($\lambda = 1,\dots,\beta$), akkor ez az állítás minden kifejezésre igaz. Ez nyilvánvalóan adódik a kifejezés-fogalom definíciójából (lásd a 8. oldalon, különösen a definíció (d) pontját). E módon később is fogunk bizonyos állításokat valamennyi kifejezésre bebizonyítani.

$\Psi_1'(k_1', i_\varkappa', k_3') = \dagger$; ezzel állításunkat a $\Phi = \Psi_1$ esetben is bebizonyítottuk tetszőleges k_1 kifejezésre.

Ha $\Phi = \Psi_2$, akkor $\Phi(k_1, k_2, k_3, k_4)$ logikai értéke, a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\dagger$, ha $k_4 \in k_1(k_2//k_3)$; azt kell megmutatnunk, hogy ebben az esetben $\Phi'(k_1', k_2', k_3', k_4') = \Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_4')$ logikai értéke is $\dagger$. Ez áll, ha $k_4 = k_1$, tehát $k_4' = k_1'$ és így (16) miatt $\Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_4') = \Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_1') = \dagger$; továbbá akkor is, ha $k_2 = k_1$ és $k_4 = k_3$, tehát $k_2' = k_1'$ és $k_4' = k_3'$ és igy (17) miatt $\Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_4') = \Psi_2'(k_1', k_1', k_3', k_3') = \dagger$. Ennélfogva állításunk a $k_1 = \mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\alpha$ esetben mindenesetre igaz, hiszen ekkor a $k_1(k_2//k_3)$ halmaz $k_2 \neq k_1$ esetén egyedül a k_1 kifejezésből, $k_2 = k_1$ esetén pedig a k_1 és k_3 kifejezésekből áll. Legyen mármost $k_1 = \mathbf{f}_\lambda(l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda})$ ($\lambda = 1, \ldots, \beta$; $l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezések) és tegyük fel, hogy állításunk igaz k_1 helyett az $l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezésekre; vagyis, hogy valahányszor $\varrho = 1, \ldots, \varrho_\lambda$ esetén $m_\varrho \in l_\varrho(k_2//k_3)$, mindannyiszor $\Psi_2'(l_\varrho', k_2', k_3', m_\varrho') = \dagger$. Akkor a $k_1(k_2//k_3)$ halmaz $k_2 \neq k_1$ esetén az összes olyan $\mathbf{f}_\lambda(m_1, \ldots, m_{\varrho_\lambda})$ kifejezésekből áll, ahol $\varrho = 1, \ldots, \varrho_\lambda$ esetén $m_\varrho \in l_\varrho(k_2//k_3)$ (mert ekkor a k_2 kifejezésnek csak olyan előfordulása lehetséges a k_1 kifejezésben, amely az $l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}$ kifejezések valamelyikéhez tartozik); $k_2 = k_1$ esetén pedig a k_1 és k_3 kifejezésekből áll. Minthogy a $k_4 = k_1$, továbbá a $k_2 = k_1$ és $k_4 = k_3$ eset már el van intézve, elég azt az esetet tekintenünk még, amikor $k_4 = \mathbf{f}_\lambda(m_1, \ldots, m_{\varrho_\lambda})$, ahol $\varrho = 1, \ldots, \varrho_\lambda$ esetén $m_\varrho \in l_\varrho(k_2//k_3)$. Ekkor a Φ_λ logikai függvény definíciója folytán $\Phi_\lambda(m_1, \ldots, m_{\varrho_\lambda}, k_4) = \Phi_\lambda(l_1, \ldots, l_{\varrho_\lambda}, k_1) = \dagger$, tehát, állításunknak a $\Phi = \Phi_\lambda$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része miatt, $\Phi_\lambda'(m_1', \ldots, m_{\varrho_\lambda}', k_4') = \Phi_\lambda'(l_1', \ldots, l_{\varrho_\lambda}', k_1') = \dagger$. Ennélfogva, (18) miatt, $\Psi_2'(k_1', k_2', k_3', k_4') = \dagger$; ezzel állításunkat a $\Phi = \Psi_2$ esetben is bebizonyítottuk tetszőleges k_1 (és k_2, k_3, k_4) kifejezésre.

Ha végül $\Phi = \Theta$, akkor $\Phi(k_1, k_2)$ logikai értéke, a Θ logikai függvény definíciója folytán, (akkor és) csak akkor $\dagger$, ha a $k_1 = k_2$ egyenlet következménye az E egyenletrendszernek; azt kell megmutatnunk, hogy ebben az esetben $\Phi'(k_1', k_2') = \Theta'(k_1', k_2')$ logikai értéke is $\dagger$. Ez áll, ha a $k_1 = k_2$ egyenlet az E egyenletrendszer egyenleteinek valamelyike, mondjuk $k_1 = i_{\gamma_\nu}$ és $k_2 = i_{\delta_\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, \sigma$), mert akkor (19) miatt

$$\Theta'(k_1', k_2') = \Theta'(i_{\gamma_\nu}', i_{\delta_\nu}') = \dagger.$$

Tegyük fel, hogy állításunk bizonyos k_1 és k_2 kifejezésekre áll; megmutatjuk, hogy akkor, $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$ esetén, az $l_1 = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ és $l_2 = k_2(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{0})$, továbbá az $m_1 = k_1(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$ és $m_2 = k_2(\mathbf{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathbf{v}_\varkappa))$ kifejezésekre is áll, vagyis, hogy $\Theta'(l_1', l_2') = \Theta'(m_1', m_2') = \dagger$. Valóban, a Ψ_0 és Ψ_1 logikai függvények definíciója folytán, $\Psi_0(k_1, \mathbf{v}_\varkappa, l_1) = \Psi_0(k_2, \mathbf{v}_\varkappa, l_2) = \dagger$ és $\Psi_1(k_1, \mathbf{v}_\varkappa, m_1) = \Psi_1(k_2, \mathbf{v}_\varkappa, m_2) = \dagger$ és így állításunknak a $\Phi = \Psi_0$ és $\Phi = \Psi_1$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része, valamint (26') miatt, $\Psi_0'(k_1', \mathbf{v}_\varkappa', l_1') = \Psi_0'(k_1', i_\varkappa', l_1') = \dagger$, $\Psi_0'(k_2', \mathbf{v}_\varkappa', l_2') =$

$\Psi_0'(k_2', i_\varkappa', l_2') = \uparrow$ és $\Psi_1'(k_1', \mathrm{v}_\varkappa', m_1') = \Psi_1'(k_1', i_\varkappa', m_1') = \uparrow$, $\Psi_1'(k_2', \mathrm{v}_\varkappa', m_2') = \Psi_1'(k_2', i_\varkappa', m_2') = \uparrow$; ennélfogva (20) és (21) miatt, valóban $\Theta'(l_1', l_2') = \uparrow$ és $\Theta'(m_1', m_2') = \uparrow$. Tegyük fel másrészt, hogy állításunk bizonyos k_1 és k_2, valamint[40] l_1 és l_2 kifejezésekre, amelyekre a $k_1 = k_2$ és $l_1 = l_2$ egyenletek következményei az E egyenletrendszernek, áll, vagyis $\Theta'(k_1', k_2') = \Theta'(l_1', l_2') = \uparrow$; megmutatjuk, hogy akkor áll tetszőleges olyan m_1 és m_2 kifejezésekre is, amelyekre $m_1 \in k_1(l_1/l_2)$ és $m_2 \in k_2(l_1/l_2)$, vagyis, hogy tetszőleges ilyen m_1 és m_2 kifejezésekre $\Theta'(m_1', m_2') = \uparrow$. Valóban, a Ψ_2 logikai függvény definíciója folytán, $\Psi_2(k_1, l_1, l_2, m_1) = \Psi_2(k_2, l_1, l_2, m_2) = \uparrow$ és így, állításunknak a $\Phi = \Psi_2$ esetre vonatkozó, már bebizonyított része miatt, $\Psi_2'(k_1', l_1', l_2', m_1') = \Psi_2'(k_2', l_1', l_2', m_2') = \uparrow$; ennélfogva, (22) miatt, valóban $\Theta'(m_1', m_2') = \uparrow$. Ezzel állításunkat a $\Phi = \Theta$ esetben is bebizonyítottuk az E egyenletrendszer tetszőleges $k_1 = k_2$ következményére[41].

Eszerint annak bizonyításához, hogy valamely $k_1 = k_2$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek, elegendő azt megmutatnunk, hogy $\Theta'(k_1', k_2') = \downarrow$. Alkalmazzuk ezt a $k_1 = \mathbf{f}_2(s_\tau)$, $k_2 = \mathbf{0}$ esetre. Minthogy $\iota = 1, 2, \ldots$ esetén $s_\iota = \mathbf{f}_1(s_{\iota-1})$, azért, a Φ_1 logikai függvény definíciója folytán, $\Phi_1(s_{\iota-1}, s_\iota) = \uparrow$, tehát, a most bebizonyított állítás ($\Phi = \Phi_1$ esete) miatt, $\Phi_1'(s_{\iota-1}', s_\iota') = \uparrow$; ez többek között $\iota = 1, 2, \ldots, \tau$ esetén is áll. Továbbá, a Φ_2 logikai függvény definíciója folytán, $\Phi_2(s_\tau, k_1) = \uparrow$, tehát, ugyanazon állítás ($\Phi = \Phi_2$ esete) miatt, $\Phi_2'(s_\tau', k_1') = \uparrow$. Minthogy végül, az Ω logikai függvény definíciója és $s_0 = \mathbf{0}$ folytán, $\Omega(s_0) = \uparrow$, tehát, ugyanazon állítás ($\Phi = \Omega$ esete) miatt, $\Omega'(s_0') = \uparrow$, azért, (23) és $s_0 = \mathbf{0} = k_2$ miatt, $\Theta'(k_1', s_0') = \Theta'(k_1', k_2') = \uparrow$, tehát $\Theta'(k_1', k_2') = \downarrow$; ennélfogva a $k_1 = k_2$, vagyis az $\mathbf{f}_2(s_\tau) = \mathbf{0}$ egyenlet valóban nem következménye az E egyenletrendszernek. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

7. A segédtétel felhasználásával mármost bebizonyithatjuk az eldöntésproblémának általános rekurzív algoritmussal való megoldhatatlanságára vonatkozó CHURCH-féle tételt a következő, szabatosan megfogalmazott alakban[42].

[40] Itt tehát l_1 és l_2 nem feltétlenül azokat a $k_1(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ és $k_2(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ kifejezéseket jelölik, mint az előbb.

[41] A bizonyítás azon alapul, hogy ha egy állítás igaz valamely E egyenletrendszer minden egyes egyenletére, továbbá, valahányszor valamely $k_1 = k_2$ egyenletre igaz, mindannyiszor igaz $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$ esetén a $k_1(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{0}) = k_2(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{0})$ és a $k_1(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathrm{v}_\varkappa)) = k_2(\mathrm{v}_\varkappa/\mathbf{f}_1(\mathrm{v}_\varkappa))$ egyenletekre is, végül valahányszor bizonyos $k_1 = k_2$ és $l_1 = l_2$ egyenletekre igaz, mindannyiszor igaz minden olyan $m_1 = m_2$ egyenletre, ahol $m_1 \in k_1(l_1/l_2)$ és $m_2 \in k_2(l_1/l_2)$, akkor ez az állítás az E egyenletrendszer minden következményére igaz. Ez nyilvánvalóan adódik a következmény-fogalom definíciójából (lásd a 9—10. oldalon, különösen a definíció (d) pontját).

[42] A CHURCH-tétel itt kimondott alakja nemcsak abban különbözik a bevezető 1. pontban vázolt alakjától, hogy azokat, a logikai formulák (1) megszámlálására vonatkozó feltételeket, amelyek mellett bebizonyitjuk a tételt, most szabatosan megfogalmazzuk (míg ott a „szokásos" megszámlálásokról beszéltünk), továbbá, hogy az összes logikai formulák

TÉTEL. *Legyen* $\nu_0, \nu_1, \ldots$ *csupa különböző természetes számokból álló végtelen sorozat; legyen* $A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots$ *az összes zárt formulák egy olyan megszámozása a* $\nu_0, \nu_1, \ldots$ *indexekkel*[43], *amely eleget tesz a következő feltételeknek. Létezzék olyan egyváltozós* ζ *és olyan kétváltozós* ϑ *általános rekurzív függvény, hogy*

(a) $\tau = 0, 1, \ldots$ *esetén* $C(\tau) = A_{\zeta(\tau)}$, *ahol* $C(\tau)$ *a* (23) *logikai formulát*[44] *jelenti*[45];

---

helyett csak a zárt logikai formulákról van szó (lásd a [14] jegyzet utolsó mondatát); hanem abban is, hogy *megszámlálás*, vagyis az összes természetes számokkal mint indexekkel való megszámozás helyett tetszőleges (csupa különböző) $\nu_0, \nu_1, \ldots$ természetes számokkal mint indexekkel való *megszámozásról* van szó (a közönséges megszámlálás az ilyen megszámozásnak az a speciális esete, amikor $\nu_0 = 0, \nu_1 = 1, \ldots$). Ennek a módosításnak nem az a célja, hogy általánosabban mondjuk ki a tételt, hanem az, hogy könnyebben lehessen alkalmazni. Ugyanis magának a (zárt) logikai formulák halmazának legkönnyebb úgy megadni egy effektív megszámlálását, hogy mindenekelőtt az olyan jelekből képezett összes véges sorozatok halmazát számláljuk meg, amelyek segítségével minden logikai formulát (alkalmas jelöléssel) fel lehet írni (ilyen jelek gyanánt választhatjuk pl. a következőket: $\bar{}$ (negáció jele), &, V, $\rightarrow$, $\leftarrow\rightarrow$, (,), E, , (vessző), továbbá az individuumváltozók és a logikai függvényváltozók gyanánt használt, pl. $x, y, z, t, u, v, w, x_0, y_0, z_0, t_0, u_0, v_0, w_0, x_1, y_1, z_1, t_1, u_1, v_1, w_1, \ldots$ ill. $F, G, H, T, F_0, G_0, H_0, T_0, F_1, G_1, H_1, T_1, \ldots$ betűket; egyébként a negáció jelét célszerű másképp választani, pl. $\bar{A}$ helyett mindig $\rceil A$-t írni (ha szükséges, A-t zárójelbe téve), hogy minden logikai formulát e jelekből alkotott véges, *lineáris* sorozatként írhassunk). Az e jelekből képezett véges sorozatok között természetesen nemcsak zárt logikai formulák vannak, hanem szabad változót tartalmazó logikai formulák is, sőt olyanok is, amelyek nem logikai formulák, hanem jelek értelmetlen egymásutánjából állnak, pl. $))x \rightarrow F$. A zárt logikai formulák megszámlálásához e sorozatok megszámlálásából úgy juthatunk, hogy az ilyen értelmetlen képződményeket, továbbá a szabad változót tartalmazó logikai formulákat utólag elhagyjuk. Mármost azt, hogy egy adott zárt logikai formula milyen sorszámot kap e megszámlálásban, körülményes megállapítani, hiszen e sorszám attól függ, hány értelmetlen képződmény, valamint szabad változót tartalmazó logikai formula előzte meg az adott zárt logikai formulát az említett jelekből képezett véges sorozatok megszámlálásában. Ezért nehézkes annak ellenőrzése is, vajon eleget tesz-e egy így kapott megszámlálás a tétel feltételeinek. Egyszerűbb úgy eljárni, hogy az értelmetlen képződmények, valamint a szabad változót tartalmazó logikai formulák elhagyása után is megtartjuk a zárt logikai formulák *eredeti* sorszámait; csakhogy akkor e sorszámok nem lesznek az *összes* természetes számok. A zárt logikai formulák ilymódon keletkező megszámozásairól már rendszerint könnyebb megmutatni, hogy eleget tesznek a tétel feltételeinek.

[43] Nem kötjük ki, hogy az $A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots$ zárt logikai formulák különbözőek legyenek, csak azt, hogy minden zárt logikai formula legalább egyszer előforduljon köztük. Eszerint a zárt logikai formulák megszámozásai nem egyebek, mint a természetes számok halmaza valamely részhalmazának (a $\{\nu_0, \nu_1, \ldots\}$ indexhalmaznak) egyértelmű, de nem szükségképpen kölcsönösen egyértelmű leképezései a zárt logikai formulák halmazára.

[44] Vagy bármely más olyan formulát, amely (minden egyes E egyenletrendszerhez) alkalmasan választott $B(E)$ formulával együtt rendelkezik a $B(E)$ és $C(\tau)$ formuláknak a segédtételben kimondott tulajdonságával.

[45] Ebbe természetesen az is beleértendő, hogy a ζ függvény csak olyan értékeket vesz fel, amely a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok valamelyike.

(b) $\mu, \nu = \nu_0, \nu_1, \ldots$ *esetén*

$$A_\mu \,\&\, A_\nu \rightarrow A_{\vartheta(\mu,\nu)}\text{[46]}.$$

Akkor nincs olyan egyváltozós φ általános rekurzív függvény, hogy az A_ν logikai formula $\nu = \nu_0, \nu_1, \ldots$ esetén akkor és csak akkor elégíthető ki, ha $\varphi(\nu) = 0$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, van ilyen φ általános rekurzív függvény; akkor tehát az A_ν logikai formula $\nu = \nu_0, \nu_1, \ldots$ és $\varphi(\nu) = 0$ esetén kielégíthető, $\varphi(\nu) \neq 0$ esetén nem. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen, mégpedig úgy, hogy megadunk egy ellenpéldát, vagyis olyan ν számot a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok közül, amelyre vagy $\varphi(\nu) = 0$ és az A_ν logikai formula mégsem elégíthető ki, vagy pedig $\varphi(\nu) \neq 0$ és az A_ν logikai formula mégis kielégíthető.

A

$$\psi(\nu) = \varphi(\vartheta(\nu, \zeta(\nu))) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

egyenlettel definiált ψ aritmetikai függvény általános rekurzív függvény[47]. Legyen E a ψ függvény valamely általános rekurzív definíciója és legyen $B = B(E)$ a segédtétel értelmében az E egyenletrendszerhez tartozó zárt logikai formula[48]. Legyen τ a $B(E)$ formula (valamelyik[49]) sorszáma az $A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots$ megszámozásban, vagyis legyen $B(E) = A_\tau$ (τ a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok egyike). Akkor az $A = B(E) \,\&\, C(\tau)$ logikai formula a segédtétel szerint akkor és csak akkor elégíthető ki, ha az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$ egyenlet nem következménye az E egyenletrendszernek. Minthogy másrészt az E egyenletrendszer a ψ függvény általános rekurzív definíciója, azért az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = 0$, vagyis az $\mathfrak{f}_2(s_\tau) = s_0$ egyenlet

[46] Ebbe természetesen az is beleértendő, hogy a ϑ függvény olyan (μ, ν) helyen, ahol μ is, ν is a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok valamelyike, csak olyan értéket vesz fel, amely szintén a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok valamelyike.

[47] Valóban, legyen E_1, E_2 és E_3 a ζ, ϑ, ill. φ függvények egy-egy általános rekurzív definíciója, E_1', E_2' és E_3' pedig olyan egyenletrendszerek, amelyek úgy keletkeznek az E_1, E_2, ill. E_3 egyenletrendszerből, hogy megváltoztatjuk a bennük szereplő, $\mathfrak{f}_1$-től különböző funktorok jelöléseit, mégpedig úgy, hogy két olyan egyenletben, amelyek az E_1', E_2' és E_3' egyenletrendszerek közül két különbözőhöz tartoznak, ne szerepeljen közös, $\mathfrak{f}_1$-től különböző funktor, továbbá, hogy az $\mathfrak{f}_2$ funktor egyáltalában ne szerepeljen az E_1', E_2' és E_3' egyenletrendszerekben. Legyen $\mathfrak{f}_\varkappa$, $\mathfrak{f}_\lambda$ és $\mathfrak{f}_\mu$ az a három funktor, amely e jelölésváltoztatás során az E_1, E_2, ill. E_3 egyenletrendszerben szereplő $\mathfrak{f}_2$ funktor helyébe lép. (Az $\mathfrak{f}_2$ funktort az E_1 egyenletrendszerben a ζ, az E_2 egyenletrendszerben a ϑ, az E_3 egyenletrendszerben pedig a φ függvény jelölésére használtuk; az E_1', E_2', ill. E_3' egyenletrendszerben ezeknek a függvényeknek jelölésére az $\mathfrak{f}_\varkappa$, $\mathfrak{f}_\lambda$, ill. $\mathfrak{f}_\mu$ funktort használjuk.) Akkor könnyű látni, hogy az az egyenletrendszer, amely az E_1', E_2' és E_3' egyenletrendszerek egyenleteiből, továbbá az

$$\mathfrak{f}_2(\mathfrak{v}_1) = \mathfrak{f}_\mu(\mathfrak{f}_\lambda(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{f}_\varkappa(\mathfrak{v}_1)))$$

egyenletből áll, általános rekurzív definíció, és az általa definiált függvény éppen ψ.

[48] Vagyis olyan zárt logikai formula, amely a tételben szereplő $C(\tau)$ logikai formulával együtt (lásd a [44] jegyzetet) rendelkezik a segédtételben kimondott tulajdonsággal.

[49] A $B(E)$ formula többször is előfordulhat az $A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots$ megszámozásban (lásd a [43] jegyzetet), tehát több sorszámot is kaphat.

akkor és csak akkor következménye az E egyenletrendszernek, ha $\psi(\tau) = 0$, tehát akkor és csak akkor nem következménye, ha $\psi(\tau) \neq 0$. Eszerint az A logikai formula akkor és csak akkor elégíthető ki, ha $\psi(\tau) \neq 0$. Azonban a ψ függvény definíciója szerint

$$\psi(\tau) = \varphi(\vartheta(\tau, \zeta(\tau)) = \varphi(\nu),$$

ahol $\nu = \vartheta(\tau, \zeta(\tau))$; másrészt a tételben szereplő (a) és (b) feltételek, továbbá $B(E) = A_\tau$ folytán

$$A = B(E) \& C(\tau) = A_\tau \& A_{\zeta(\tau)} = A_{\vartheta(\tau, \zeta(\tau))} = A_\nu .$$

Eszerint, ha $\varphi(\nu) = \psi(\tau) = 0$, akkor az A_ν logikai formula nem elégíthető ki, ha pedig $\varphi(\nu) = \psi(\tau) \neq 0$, akkor kielégíthető; tehát a $\nu = \vartheta(\tau, \zeta(\tau))$ szám valóban ellenpélda[50] a φ függvény feltételezett tulajdonságára. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Könnyen látható, hogy a zárt logikai formulák „szokásos" megszámozásai, pl. a GÖDEL-féle megszámozás[51] és a lexikografikus megszámozás[52], eleget tesznek a tétel feltételeinek; így tehát a tétel többek között ezekre a megszámozásokra is érvényes.

[50] A $\nu = \vartheta(\tau, \zeta(\tau))$ szám a ζ és ϑ függvényeknek a [45] és [46] jegyzetben említett tulajdonsága folytán a $\nu_0, \nu_1, \ldots$ számok valamelyike.

[51] A zárt logikai formulák GÖDEL-féle megszámozásához a következő módon jutunk. Mindenekelőtt megszámozzuk a pozitív egész számokkal valamilyen módon azokat a jeleket, amelyeket a logikai formulák felírásához használunk; pl. az 1, 2, ... számokhoz sorra a $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, (,), E, , (vessző), x, y, z, t, u, v, w, F, G, H, T, x_0, y_0, z_0, t_0, u_0, v_0, w_0, F_0, G_0, H_0, T_0, x_1, y_1, z_1, t_1, u_1, v_1, w_1, F_1, G_1, H_1, T_1, ... jeleket rendeljük. Majd minden $\nu = \pi_0^{\mu_0} \ldots \pi_\varrho^{\mu_\varrho}$ pozitív egész számhoz, ahol $\pi_0 = 2$, $\pi_1 = 3$, $\pi_2 = 5, \ldots$ a prímszámok növekvő sorozata, hozzárendeljük azt a fenti jelekből képezett véges sorozatot, amely sorra azokból a jelekből áll, amelyek a fent említett megszámozásban a $\mu_0, \ldots, \mu_\varrho$ sorszámot kapták. (Ha $\mu_0, \ldots, \mu_\varrho$ valamelyike 0, akkor ez elhagyandó.) Ilymódon többek között minden egyes zárt logikai formulát is hozzárendeltünk valamilyen pozitív egész számhoz, a formula ún. GÖDEL-számához. Pl. a $(x)(F(x) \rightarrow G(x))$ formula GÖDEL-számaként $2^6 3^{10} 5^7 7^6 11^{17} 13^6 17^{10} 19^7 23^4 29^{18} 31^6 37^{10} 41^7 43^7$ (vagy pl. $2^6 3^{10} 5^7 11^6 13^{17} 17^6 19^{10} 23^7 31^4 41^{18} 43^6 \cdot 47^{10} 53^7 59^7$) választható.

[52] A zárt logikai formulák lexikografikus megszámozásához a következő módon jutunk. Mindenekelőtt megszámláljuk valamilyen (pl. a megelőző jegyzetben szereplő) sorrendben azokat a jeleket, amelyeket a logikai formulák felírásához használunk; majd az e jelekből képezett véges sorozatokat a következőképpen rendezzük. Két különböző hosszúságú véges sorozat közül az jön előbb, amelyik rövidebb; két egyenlő hosszúságú sorozat közül pedig vagy az, amelyiknek a jelek megszámlálásában legkésőbb előforduló jele e megszámlálásban megelőzi a másik sorozatnak a jelek megszámlálásában legkésőbb előforduló jelét; vagy pedig, ha a két sorozat olyan, hogy a jelek megszámlálásában legkésőbb előforduló jelük ugyanaz, akkor az jön előbb, amelynek az első olyan jele, amelyik különbözik a másik sorozat ugyanannyadik jelétől, a jelek megszámlálásában megelőzi a másik sorozat ugyanannyiadik jelét. Mármost minden ν természetes számhoz hozzárendeljük azt az említett jelekből képezett véges sorozatot, amely ebben az elrendezésben a $\nu + 1$-edik helyre került; ilymódon többek között a zárt logikai formulákat is hozzárendeltük bizonyos természetes számokhoz.

IRODALOM

A. CHURCH [1], An unsolvable problem in elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, 58 (1936), 345—363.

[2], A note on the Entscheidungsproblem, *The Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), 40—41.

[3], Correction to *A note on the Entscheidungsproblem*, ugyanott, 1 (1936), 101—102.

V. K. GYETLOVSZ (В. К. ДЕТЛОВС) [1], Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, Доклады Академии Наук СССР, 90 (1953), 723—725.

KALMÁR LÁSZLÓ [1], Az eldöntésprobléma visszavezetése logikai formulák véges halmazon való kielégíthetőségének kérdésére, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1950. aug. 27—szept. 2), Budapest, 1952, 163—190.

[2], K. Schröter egy, az általános rekurzív függvény fogalmának definíciójára vonatkozó problémájának megoldása, *A Magyar Tudományos Akadémia III. (matematikai és fizikai) Osztályának Közleményei*, 5 (1955), 103—127.

S. C. KLEENE [1], General recursive functions of natural numbers, *Mathematische Annalen*, 112 (1936), 727—742.

[2], λ-definability and recursiveness, *Duke Mathematical Journal*, 2 (1936), 340—353.

A. MARKOV (A. МАРКОВ) [1] Теория алгорифмов, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1950. aug. 27—szept. 2), Budapest, 1952, 191—203.

R. PÉTER [1], *Rekursive Funktionen*, Budapest, 1951.

SURÁNYI JÁNOS [1], A matematikai logika eldöntésproblémájáról, *Matematikai Lapok*, 6 (1955), 180—187.

A. M. TURING [1], On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2), 42 (1937), 230—265.

[2], Computability and λ-definability, *The Journal of Symbolic Logic*, 2 (1937), 153—163.

[3], On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction, *Proceedings of the London Mathematical Society* (2) 43 (1937), 544—546.