ELEKTRONCSÖVEK ANÓDÁRAM-INGADOZÁSÁNAK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TÁRGYALÁSÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Elektroncsövek anódáram-ingadozásának vizsgálatánál általában két kérdés játszik lényeges szerepet. Az egyik kérdés az, hogy a pillanatnyi anódáram értékét milyen törvény határozza meg. A másik pedig az, hogy az áram különböző frekvenciájú komponensei milyen amplitudókkal fordulnak elő, azaz, milyen az áram „teljesítmény-spektruma". Tekintve, hogy az elektroncsövek anódárama véletlen ingadozást mutat, ezért a fenti kérdésre adandó válaszok is a valószínűségszámítás körébe esnek. A feltett kérdések ilyen irányú első megoldását W. SCHOTTKY [14] adta meg 1918-ban. Jelen értekezésünkben W. SCHOTTKY említett eredményeinek általánosításával foglalkozunk és a problémák pontosabb megoldását adjuk meg.

Az alábbiakban közölt vizsgálatok egy része 1950-ben az Egyesült Izzó (Tungsram) Kutató Laboratóriumában készült. Az akkori tárgyalás alapjái szerző [17] dolgozatában közölt módszere képezte. Ennek lényege a következő: Az elektroncsövek anódáramának időbeli lefolyása általában nem-Markov típusú sztochasztikus folyamat, amely nehezen kezelhető. A jelenségnek időben visszafelé történő vizsgálatával azonban el lehet érni, hogy a folyamatot Markov-folyamatként lehessen kezelni, sőt, az időtengely szakaszokra osztásával a Markov-folyamat visszavezethető lényegében független valószínűségi változók összegezésével kapcsolatos problémák megoldására. Ezen észrevételeken alapuló tárgyalás korábbi hasonló kérdésekkel foglalkozó munkákkal szemben egyszerűsítést jelentett és ugyanakkor általánosabb eredmények kimondását tette lehetővé. A későbbiekben egy újabb észrevétel, amely az említett [17] munka függelékében nyert közlést, további egyszerűsítéseket engedett meg. A következőkben ezen észrevételen alapuló tárgyalás kerül ismertetésre, melyet szerző 1953-ban a Távközlési Kutató Intézet Újpesti Laboratóriumában (volt Egyesült Izzó Kutató Laboratórium) készített.*

* Jelen cikk rövidített formában a Távközlési Kutató Intézet Közleményei I. (1955) 2. szám 14—29. nyert közlést.

1. §. W. Schottky vizsgálatairól

Elektroncsöveknél W. SCHOTTKY [14] fedezte fel, hogy az anódáram állandó ingadozást mutat. Mint ismeretes, elektroncsövek katódjából az elektronok diszkrét időpontokban lépnek ki és minden egyes elektron véges töltést $\varepsilon = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *coulomb*ot visz magával. W. SCHOTTKY az áram klasszikus definícióját használta, amely szerint a létesített áram egyenlő az időegység alatt a katódról távozó töltéssel. Az időegység alatt a katódról kilépő elektronok száma azonban véletlen ingadozást mutat, azaz valószínűségi változó és így indokolt az anódáram ingadozása is. W. SCHOTTKY meggondolásaiban feltételezte, hogy a katódból adott t időtartam alatt kilépő elektronok száma, amelyet jelöljön ξ_t változó, Poisson-eloszlást követ, azaz annak a valószínűsége, hogy t időtartam alatt n elektron lép ki.

$$(1) \qquad \mathbf{P}(\xi_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

ahol λ jelenti az időegység alatt kilépő elektronok várható számát.

W. SCHOTTKY az anódáram ingadozásának vizsgálatával kapcsolatosan három kérdést vetett fel, amelyekre a fent leírt modell alapján az alábbiakban részletezett eredményeket nyerte. A következő eredmények arra az esetre vonatkoznak, midőn feltételezzük, hogy a katódról kilépő valamennyi elektron eljut az anódig.

A) *A pillanatnyi anódáram ingadozása.* Az áram klasszikus definíciója szerint, ha az időegység alatt ξ elektron lép ki a katódból, úgy a létesített áram $i = \varepsilon\xi$. Ennek várható értéke

$$\mathbf{E}(i) = \varepsilon\lambda,$$

ugyanis az (1) feltevés szerint $\mathbf{P}(\xi = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n$. Ha az $\mathbf{E}(i) = I$ jelölést bevezetjük az átlagáramra, úgy $\lambda = I/\varepsilon$ adódik az eddig ismeretlen λ paraméter értékére. Az i áram szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(i) = \varepsilon^2\lambda = \varepsilon I,$$

ugyanis, mint ismeretes, a Poisson-eloszlás átlaga és szórásnégyzete megegyezik egymással. A szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke a szórás vagy négyzetes ingadozás:

$$(A) \qquad \mathbf{D}(i) = \sqrt{\varepsilon I}.$$

W. SCHOTTKY eme első (A) eredménye azt fejezi ki, hogy I átlagos emissziós áram esetén az anódáram szórása $\sqrt{\varepsilon I}$, azaz az anódáram négyzetgyökével arányos.

B) *A T időre közepelt anódáram ingadozása.* Ha i_T jelöli a T időtartamra közepelt anódáramot, azaz $i_T = \varepsilon\xi_T/T$, ahol ξ_T jelöli a katódról T időtartam alatt kilépő elektronok számát, úgy

$$\mathbf{E}(i_T) = \varepsilon\lambda = I$$

és

(B) $$\mathbf{D}(i_T) = \sqrt{\frac{\varepsilon I}{T}},$$

ugyanis most $\mathbf{P}(\xi_T = n) = e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!$. W. SCHOTTKY eme második (B) eredménye azt fejezi ki, hogy minél hosszabb T, mérőműszerünk közepelési ideje, annál kisebb lesz az anódáram ingadozása, mégpedig a mérési idő négyzetgyökével fordítva arányos.

C) *Az anódáram frekvencia spektruma.* A fent vázolt felfogás szerint az áram pillanatnyi időtartamú áramlökésekből áll, amelyeket az egyes elektronok hoznak létre. Mivel minden egyes elektron véges töltést visz magával és az egyes áramlökések időszerinti integrálja ki kell hogy adja az ε töltést, következőleg ezen felfogás szerint az áramlökések amplitúdóinak végtelen nagynak kell lenniök. Eszerint az áram értéke olyan időpontokban, amikor egy elektron a katódot elhagyja, végtelenné válik és utána zérus lesz a következő elektron kilépésének időpontjáig. Ezen modell alapján meghatározta W. SCHOTTKY az anódáram ingadozásának spektrális eloszlását. Azt nyerte eredményül, hogy $\Delta\nu$ nagyságú frekvenciasávra jutó teljesítmény

(C) $$2\varepsilon I \Delta\nu$$

függetlenül attól, hogy hol helyezkedik el ez a $(\nu, \nu+\Delta\nu)$ frekvenciasáv. Ez az ún. fehérspektrum.

W. SCHOTTKY fenti eredményeihez néhány megjegyzést kell fűznünk. Az (A) eredmény (B)-nek az a speciális esete, midőn T-t egységnyinek választjuk. Így (A)-val külön nem kell foglalkoznunk. (B) eredmény ellen az a kifogás emelhető, hogy ha T-vel zérus felé közeledünk, akkor az áram szórása, $\mathbf{D}(i_T)$, minden határon túl nő, ami nem egyezik a tapasztalati tényekkel. A (C) eredmény pedig azt szolgáltatja, hogy $\Delta\nu \to \infty$ esetén a teljesítmény végtelenné válik, ami abszurdum. Kicsiny frekvencia értékekre ($\nu < 10^8 Hz$) azonban a tapasztalattal jól egyező eredményt szolgáltat.

2. §. A jelenségeket leiró modell

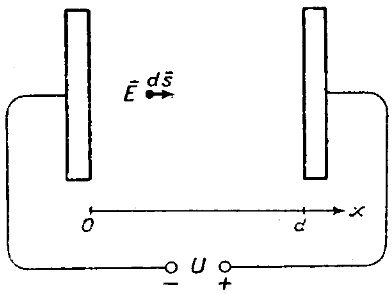
Most következő tárgyalásunkban W. SCHOTTKY (A), (B) és (C) képletekben kifejezésre jutó eredményeit általánosítjuk. Ezt azáltal nyerjük, hogy egyrészt az áram precízebb definícióját vesszük alapul, másrészt a jelenséget a valószínűségszámítás modern fejezete, a sztochasztikus folyamatok elmélete segítségével tárgyaljuk.

Egyszerűség kedvéért szorítkozzunk két elektródás elektroncsőre, ún diódára. Összes meggondolásaink azonban több elektródás elektroncsövekre is érvényesek.

1. *Az egyes elektronok által okozott áramimpulzusok időbeli lefolyásának megállapítása.* A Maxwell-egyenletek álláspontjára helyezkedve azt az első pillanatban meglepő eredményt kapjuk, hogy az elektroncső áramkörében nem akkor kapunk áramot, amikor az elektron a katódot elhagyja, vagy az anódhoz érkezik, hanem áthaladása során állandóan influál áramot. Ennek pillanatnyi értéke $i(t)$ a következő energiaegyenletekből nyerhető

$$\varepsilon \bar{E} d\bar{s} = U i(t) dt,$$

ahol U a katód-anód feszültség, $\bar{E}$ a térerősség az elektron helyén és ds jelöli az elektron dt idő alatti elmozdulását (1. ábra). A fenti egyenlet baloldalán az a munka szerepel, amelyet az elektron $d\bar{s}$ elmozdulás alatt nyer, míg a jobboldalon az a munka, amelyet a külső áramkörben dt idő alatt végez. A két oldal egyenlősége az energia megmaradási elvéből következik. Ha $v = d\bar{s}/dt$ jelöli az elektron pillanatnyi sebességét, úgy a fentiek szerint



1. ábra

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{U} \bar{E}\bar{v}.$$

Bennünket azonban az érdekel, hogy adott konkrét esetben egy elektron által influált áram milyen időbeli lefolyást mutat. Ez meghatározható a Poisson-egyenletből

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho,$$

ahol ρ a töltéssűrűséget jelenti (sík dióda esetén $\rho = I/v$, ahol I az emissziós áram sűrűsége) és az elektronok mozgásegyenlete segítségével, amely, mint ismeretes:

$$m \frac{dv}{dt} = \varepsilon \bar{E},$$

ahol $m(= 9{,}03 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{gr})$ az elektron tömege. Elő kell írni természetesen a kezdeti feltételeket: az elektroncső geometriai adatait, az anódfeszültséget (állandó vagy időben változó), a katódról kilépő elektronok sebességét (feltesszük, hogy az elektronok a katódfelületet annak normálisának irányában hagyják el), továbbá a katódról kilépő emissziós áram átlagértékét (amely lehet időben állandó vagy változó).

Megjegyezzük még, hogy ha az elektron gyorsító térben mozog, úgy energiát vesz fel a külső körtől és abban katód-anód irányú (pozitív irányú) áramot influál, míg ha fékezési térben mozog, úgy energiát ad át a térnek és a külső körben anód-katód irányú (negatív irányú, generátor hatású) áramot influált. Ugyanis a tér energiájának a megváltozása a külső körön áramot hajt át.

A fent felsorolt képletek birtokában bármilyen két elektródás elektroncsőre megállapítható a katódról v_0 kezdősebességgel kilépő elektron által infuált áram intenzitásának időbeli lefolyása. Jelölje egy a katódról t' időpontban v_0 kezdeti sebességgel kilépő elektron által infuált áram intenzitását t időpontban

$$i = f(t, t', v_0).$$

Ha az U anódfeszültség állandó (nem függ a t időtől), úgy a fenti áramintenzitás csupán az $u = t - t'$ időkülönbségtől, az ún. futásidőtől függ és ekkor legyen

$$i = f(u, v_0).$$

Ha például feltesszük, hogy a katódról $v_0 = 0$ kezdősebességgel lépnek ki az elektronok és a tértöltéstől eltekintünk, azaz $\bar{E} =$ állandó feltételezéssel élünk, úgy egymástól d távolságra levő egységnyi felületű párhuzamos sík anód és katódból álló dióda esetén az infuált áram időbeli lefolyása:

$$i = \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon}{\tau_0^2} u & \text{ha } 0 < u \leq \tau_0 \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{2}$$

ahol U az anódfeszültség és

$$\tau_0 = \frac{2d}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon U}{m}}}$$

a katód-anód repülési idő (2. ábra).

Ekkor ugyanis $E = U/d$ és így $i = \dfrac{\varepsilon v}{d}$. Meghatározandó tehát v. A mozgásegyenlet szerint $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{\varepsilon E}{m} = \dfrac{\varepsilon U}{md}$ és így $v = \dfrac{\varepsilon U}{md} u$ és $x = \dfrac{\varepsilon U}{md} \dfrac{u^2}{2}$. Ha most $x = d$ úgy $u = \tau_0$, azaz $d = \dfrac{\varepsilon U}{md} \dfrac{\tau_0^2}{2}$ (innen τ_0 kiszámítható). Az utóbbi egyenletekből $v/d = 2u/\tau_0^2$ és így $i = \dfrac{\varepsilon v}{d} = \dfrac{2\varepsilon}{\tau_0^2} u$, ami kiszámítandó volt.

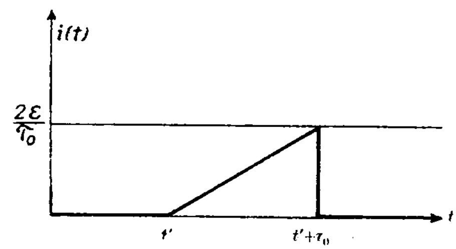
Ha a fenti példát azzal a módosítással tekintjük, hogy a tértöltést nem hanyagoljuk el, de feltesszük, hogy a katódnál $E=0$ (Langmuir-féle cső modell) úgy azt nyerjük, hogy

$$i=\begin{cases}\dfrac{4\varepsilon}{\tau_1^4}u^3 & \text{ha } 0\leq u\leq \tau_1\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}\tag{3}$$

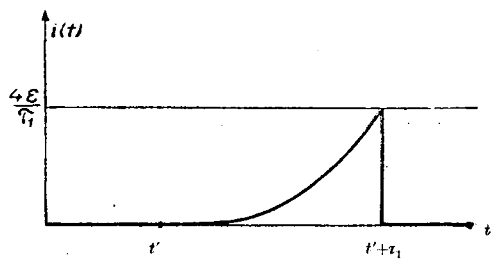
ahol most

$$\tau_1=\frac{3d}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon U}{m}}}$$

a katód-anód repülési idő, amely a korábbinál 50 százalékkal nagyobb, azaz $\tau_1=\frac{3}{2}\tau_0$ (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Ekkor ugyanis a Poisson-egyenlet $\frac{dE}{dx}=4\pi\varrho$, de itt $\varrho=I/v$ és $v=\frac{dx}{du}$. Ha az elektron kezdeti sebessége $v_0=0$ úgy innen $E=4\pi Iu$ és így a mozgásegyenletből $v=\frac{4\pi\varepsilon I}{m}\frac{u^2}{2}$ és $x=\frac{4\pi\varepsilon I}{m}\frac{u^3}{6}$. Ha most $x=d$ úgy $u=\tau_1$, és $d=\frac{4\pi\varepsilon I}{m}\frac{\tau_1^3}{6}$ (innen τ_1 kiszámítható). A fentiekből $v/d=3u^2/\tau_1^3$ és továbbá $U=\int\limits_0^{\tau_1}Ev\,dt=3\pi dI\tau_1$ tehát így $i=\frac{\varepsilon Ev}{U}=\frac{4\varepsilon}{\tau_1^4}u^3$, ami bizonyítandó volt. Megjegyezzük, hogy most I nem választható meg tetszőlegesen, hanem $d=\frac{4\pi\varepsilon I}{m}\frac{\tau_1^3}{6}$ és $U=3\pi dI\tau_1$ egyenletekből meghatározható éspedig

$$I=\frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\,\frac{U^{3/2}}{d^2}.$$

Amint látjuk, valamennyi esetben megállapitható az $i = f(u, v_0)$, illetve $i = f(t, t', v_0)$ függvény, amely a katódot v_0 kezdősebességgel elhagyó elektron által influált áram időbeli lefolyását írja le. A fenti példákban mindenütt $v_0 = 0$ feltevéssel éltünk. Általában azonban v_0 valószínűségi változó.

2. *A katódról kilépő elektronok sebességeloszlása.* A klasszikus statisztika tanítása szerint a katódról kilépő elektronok kezdősebességei egymástól független valószínűségi változók, mégpedig mindegyik Maxwell-eloszlást követ, azaz annak a valószínűsége, hogy $v_0 \leqq v$:

$$H(v) = 1 - e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

ha $v \geqq 0$, míg $H(v) = 0$, ha $v < 0$. Itt $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/grad a Boltzmann-féle állandó és T az abszolút hőmérséklet. v_0 sűrűségfüggvénye

$$H'(v) = e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \frac{mv}{kT}, \qquad (0 \leq v < \infty).$$

Eszerint a katódról kilépő elektronok átlagsebessége

$$\mathbf{E}(v_0) = \int_0^\infty v\, dH(v) = \sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}$$

és szórása

$$\mathbf{D}(v_0) = \sqrt{\frac{kT}{2m}(4 - \pi)}.$$

Amint látjuk, a katódból kilépő elektronok sebességeloszlásának a törvénye csupán T-től, a katód hőmérsékletétől függ. Ha T a vizsgálati idő folyamán állandó, úgy ez a törvény is változatlan marad, különben T változásával ez is mutat időbeli változást.

3. *Az elektronok katódról való kilépéseinek időpontjai.* Az elektronoknak a katódból való kilépéseinek időpontjai feltehetőleg leírhatók Poisson-folyamat eseményeinek előfordulási pontjaival. Mégpedig, ha legáltalánosabban feltesszük, hogy a $(0, t)$ időközben kilépő elektronok számának várható értéke $\Lambda(t)$, ahol $\Lambda(t)$ a t-nek nemcsökkenő folytonos függvénye és $\Lambda(0) = 0$, úgy annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben pontosan n elektron lép ki a katódból

$$P(\xi_t = n) = e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Poisson-folyamatot a legáltalánosabb feltevés mellett úgy nyerünk, hogy feltesszük, hogy diszjunkt időintervallumokban kilépő elektronok számai független valószínűségi változók és hogy az elektronok 1 valószínűséggel egyesével lépnek ki a katódból. A Poisson-folyamatnak ilyen általános tárgyalását C. RYLL-NARDZEWSKI [13] adta meg.

Legegyszerübb az az eset, midőn feltesszük, hogy az elektronoknak a katódból való kilépéseinek időpontjai homogén folyamatot alkotnak. Ez alatt azt értjük, midőn $\Lambda(t)=\lambda t$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy tetszőleges t hosszúságú időintervallumban pontosan n a kilépő elektronok száma

$$\mathbf{P}(\xi_t=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

ahol λ pozitív állandó jelöli a katódról időegység alatt kilépő elektronok várható számát. A fent leírt homogén Poisson-folyamat definiálására sokszor a következő szemléletes feltevéseket tesszük: 1. annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben egy elektron kilép a katódról $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, 2. annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ közben egynél több elektron lép ki a katódról $o(\Delta t)$, 3. közös pont nélküli időintervallumokban kilépő elektronok számai egymástól függetlenek. Ezen A. JA. HINCSIN [7] féle feltevéseknél sokkal enyhébb feltevésekkel is megkapjuk a Poisson-eloszlást, lásd pl. E. MARCZEWSKI [10], K. FLOREK, E. MARCZEWSKI és C. RYLL-NARDZWESKI [5], de az előbbi definíció szemléletes tartalma miatt sokszor alkalmazásra talál.

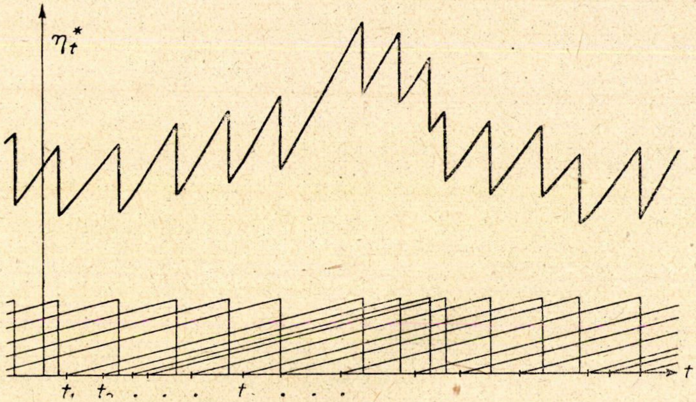
4. *Az anódáramot leíró modell.* Miután vázoltuk az általunk követett modell részleteit, rátérhetünk az anódáram megállapítására. Fel fogjuk tenni, hogy a vizsgált folyamat már végtelen hosszú ideje tart, azaz stacionárius esettel fogunk számolni. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az elektronok repülési idejénél hosszabb ideje vizsgáljuk a jelenséget. A Maxwell-egyenletek linearitásából következik, hogy az anódáram az egyes elektronok áltat influált áramimpulzusok lineáris szuperpoziciójaként adódik. Tehát, ha az elektronok kilépési időpontjait $\{t_k\}$ sorozat jelöli és a t_k időpontban kilépő elektron kezdősebessége v_k, úgy a t időpontban létesített anódáram értéke

$$\eta_t^* = \sum_{\{t_k\}}{}' f(t, t_k, v_k). \tag{5}$$

Megjegyezzük, hogy itt az összegezés csupán azon t_k értékekre terjesztendő ki, amelyekhez tartozó elektronok t időpontban a cső belsejében vannak (4. ábra).

Itt a $\{t_k\}$ időpontok és a $\{v_k\}$ sebességek valószínűségi változók és így az η_t^* áram is minden t időpontban egy valószínűségi változót jelent, azaz η_t^* a folytonos t paraméter minden értékére egy valószínűségi változó, azaz η_t^* egy sztochasztikus folyamatot ír le. Jelenleg a $\{t_k\}$ sorozat egy Poisson-folyamat (általában inhomogén vagy speciálisan homogén) eseményeinek előfordulási pontjait jelöli és a $\{v_k\}$-k egymástól és a $\{t_k\}$-tól is független valószínűségi változók ugyanazon $\mathbf{P}(v_k \leqq v) = H(v)$ eloszlásfüggvénnyel. Megjegyezzük, hogy a legutolsó feltevés nem lényeges, ugyanis megengedhető, hogy v_k eloszlása függjön a t_k időponttól. A következőkben ezt a függést explicite nem írjuk ki, de az eredmények erre az esetre is érvényesek.

Az η_t^* valószínűségi függvény által leírt sztochasztikus folyamat általában nem-Markov folyamat, kivéve azt a speciális esetet, midőn $f(u, v) = ve^{-\alpha u}$, $u > 0$-ra. Ez az eset azonban ritkán fordul elő az elektroncsövek problémájában. Az η_t^* folyamattal megegyező típusú folyamatokat [17] dolgozatunkban Markov-folyamatra való visszavezetés útján tárgyaltuk. Jelenleg a [17] dolgozat függelékében közölt segédtétel alapján közvetlen tárgyalást alkalmazunk.



4. ábra

3. §. Az η_t^* folyamatra vonatkozó eredmények

Az η_t^* valószínűségi változó jelöli az anódáram értékét t időpontban. A következő eredmények kimondásánál egyszerűség kedvéért és fontosságuk miatt is feltesszük, hogy az alapul szolgáló Poisson-folyamat időben homogén λ eseménysűrűséggel, továbbá hogy az elektroncső anódfeszültsége állandó, azaz, egy elektron által influált áramimpulzus intenzitásának időbeli lefolyását $i = f(u, v)$ függvény írja le, ahol u az elektron repülési ideje és v a kezdősebessége.

A következőkben W. SCHOTTKY (A), (B) és (C) eredményeinek általánosításaként megadjuk az anódáram pillanatnyi értékének szórását, eloszlását (legalábbis a karakterisztikus függvényét), a T időre közepelt áram szórását és végül az η_t^* áram korrelációs függvényét és spektrális felbontását.

A) *A pillanatnyi áram ingadozása.* W. SCHOTTKY (A) formulája szerint az áram szórása $\sqrt{\varepsilon I}$-vel egyenlő. Most meghatározzuk az ingadozás pontos értékét, az áram szórását $\mathbf{D}(\eta_t^*)$-t. Az η_t^* áramintenzitás várható értéke

$$\mathbf{E}(\eta_t^*) = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t, v)\, dH(v) \right] dt = \lambda \varepsilon. \tag{6}$$

Ha az átlagáramot $\mathbf{E}(\eta_t^*)=I$-vel jelöljük, úgy innen az ismeretlen λ paraméter értéke meghatározható, éspedig $\lambda=I/\varepsilon$. Az áram szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(\eta_t^*)=\lambda\int_0^\infty\left[\int_0^\infty (f(t,v))^2 dH(v)\right]dt. \tag{7}$$

A következőkben erre $\mathbf{D}^2(\eta_t^*)=\sigma^2$ jelölést fogjuk alkalmazni. Ennek pozitív négyzetgyöke $\mathbf{D}(\eta_t^*)=\sigma$ a szórás, amely az ingadozás mértéke. Mivel a (7) formulában $\lambda=I/\varepsilon$ és $f(t,v)$ értéke ε-nal arányos, következőleg azt nyerjük, hogy $\mathbf{D}(\eta_t^*)$ arányos $\sqrt{\varepsilon I}$-vel és az arányossági tényező függ a vizsgált elektroncső speciális adataiból.

A fentihez hasonló módon állíthatjuk elő az η_t^* áram magasabb momentumait is. A $\mathbf{P}(\eta_t^*<x)=F(x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható a

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dF(x)=e^{-\lambda\int_0^\infty [1-\varphi(u,\omega)]du} \tag{8}$$

karakterisztikus függvény ismeretében. Itt

$$\varphi(u,\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega f(u,v)} dH(v). \tag{9}$$

B) *A T időre közepelt anódáram ingadozása.* W. SCHOTTKY (B) formulája szerint a T időre közepelt anódáram szórása $\sqrt{\frac{\varepsilon I}{T}}$. Ennek pontos értéke az alábbi kifejezés pozitív négyzetgyöke

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta_t^* dt\right\}=\frac{\sigma^2}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(u-v)\,du\,dv=\frac{2\sigma^2}{T^2}\int_0^T (T-\tau)R(\tau)d\tau, \tag{10}$$

ahol $R(\tau)$ az η_t^* folyamat korrelációs függvénye, melynek értéke

$$R(\tau)=\frac{\mathbf{E}(\eta_t^*\eta_{t-\tau}^*)-I^2}{\sigma^2}=\frac{\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t-\tau,v)f(t,v)dH(v)\right]dt. \tag{11}$$

$R(\tau)$ τ-nak páros függvénye. A (10) kifejezésből kiadódik, hogy a T időre közepelt anódáram szórása arányos $\sqrt{\varepsilon I}$-vel, csak az arányossági tényező nem $1/\sqrt{T}$, hanem olyan függvény, amely $T=0$-nál is véges értéket vesz fel. A T időre közepelt áram eloszlása elvben megadható, de nagyon bonyolult formulák alkalmazását teszi szükségessé.

C) *Az anódáram frekvencia spektruma.* W. SCHOTTKY (C) formulája szerint a $(\nu,\nu+\Delta\nu)$ frekvenciasávra eső teljesítmény: $2\varepsilon I\Delta\nu$. Ha az η_t^* áram frekvencia spektrumát $G(\nu)$ függvény írja le, amely a $(0, \nu)$ frekvenciasávra eső teljesítményt szolgáltatja, úgy erre fennáll, hogy $G(0) = I^2$ és $0 < \nu < \infty$ értékekre $G(\nu)$ differenciálható éspedig

$$G'(\nu) = 8\pi^2\lambda \int_0^\infty |A(2\pi\nu, v)|^2 dH(v), \tag{12}$$

ahol

$$A(\omega, v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(t, v) e^{-i\omega t} dt. \tag{13}$$

A $G(\nu)$ spektrális eloszlásfüggvény fizikai jelentése a következő: Ha az η_t^* áramot egységnyi ellenálláson vezetjük keresztül, úgy a leadott átlagteljesítmény

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \eta_t^{*2} dt\right\} = I^2 + \sigma^2$$

és ennek a teljesítménynek a különböző frekvencia-tartományokra való eloszlását szolgáltatja $G(\nu)$, amely megadja a $(0, \nu)$ frekvencia tartományban disszipált átlagteljesítményt.

A szakirodalomban az anódáram ingadozásával az ún. sörétzajjal kapcsolatban főleg az áram spektrális eloszlásával foglalkoznak. Erre vonatkozó legtöbb eredmény mellőzi a sztochasztikus folyamatok elméletét és ehelyett más elvekből kiindulva jut eredményre. Ezek közül W. SCHOTTKY [14], [15] és E. SPENKE [16] munkáit emeljük ki, akik a kvadratikus szuperpozíció és inkoherencia elveiből indulnak ki. S. O. RICE [12], zajokra vonatkozó cikkében a sztochasztikus folyamatok elméletének alapján áll, de nem tárgyalja a kérdést olyan általánosan, mint arra az említett jelenségek vizsgálatánál szükség van és a stacionárius állapot létezésének kérdésével egyáltalán nem foglalkozik. A matematikai irodalomban szereplő hasonló kérdések tárgyalása is eltérést mutat az ittenitől. Az itt szükséges általánosítással éppen [17] dolgozatunkban foglalkozunk, de ott csupán részecskeszámlálásokkal kapcsolatos kérdéseket tárgyalunk.

Az előzőkhöz még néhány megjegyzést kívánunk fűzni. A fenti eredmények megadásánál feltételeztük, hogy az elektronemisszió időben homogenitást mutat, ami abban jutott kifejezésre, hogy az elektronok kilépési sűrűségét, λ-t állandónak vettük fel. Előfordulhat természetesen olyan probléma is, amelynél ezzel a feltevéssel nem élhetünk, hanem λ-t is időtől függőnek kell felvenni. (Például periodikusan változó függvénynek.) Ekkor $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$.

Továbbá a fenti eredmények az elektroncsövek egyenáramú viselkedésére vonatkoznak csupán. Ha feltesszük, hogy az anódfeszültség időben változik, például váltakozóáramú működésről van szó, úgy az influált áram értéke nemcsak a repülési időtől, hanem a kilépés időpontjától is függ, azaz $f(u, v_0)$ helyett $f(t, t', v_0)$ függvényt kell tekinteni. Továbbá általában megengedhető, hogy a kilépési sebesség is függ a kilépés időpontjától, azaz $H(v)$ helyett $H(t, v)$ eloszlásfüggvénnyel kell számolni. A következőkben megengedjük $H(v)$-nek t-től való függését, de ezt külön nem tüntetjük fel.

A következő matematikai tárgyalásban a fent vázolt szempontokra tekintettel leszünk és ezért az eredményeket általánosabban fogalmazzuk meg, mint azt fent említettük.

4. §. A vizsgált sztochasztikus folyamatokra vonatkozó tételek

1. *Az általános eset.* Legyen értelmezve $0 \leq t < \infty$ időpontokra egy Poisson-folyamat, amelynél a $(0, t)$ időközben előforduló események várható számát $\Lambda(t)$ monoton, nemcsökkenő, folytonos függvény jelöli, amelyre $\Lambda(0) = 0$. Tegyük fel, hogy minden egyes esemény bekövetkezésének időpontjában elindít egy véletlen jelet, amelynek nagyságát t időpontban $f(t, t', \chi)$ függvény írja le, ahol t' az esemény előfordulásának időpontja és χ egy véletlen paraméter. Feltesszük, hogy az egyes véletlen jelek lineárisan szuperponálódnak és tekintsük

$$\eta_t = \sum_{0 \leq t_n \leq t} f(t, t_n, \chi_n) \tag{14}$$

folyamatot, ahol $\{t_n\}$ sorozat jelöli a Poisson-folyamat eseményeinek előfordulási pontjait és a χ_n paraméterek az egyes eseményekhez tartozó véletlen paraméterek, amelyekről feltesszük, hogy egymástól és a $t_k (k \neq n)$ időpontoktól is függetlenek (a t_n-től való függőség általában megengedhető). Legyen $\mathbf{P}(\chi_n \leq x) = H(x)$, ahol az esetleges függést t-től nem tüntettük fel. Legyen továbbá $\mathbf{P}(\eta_t \leq x) = F(t, x)$. Most $F(t, x)$ eloszlásfüggvény meghatározását tűzzük ki feladatul.

Vezessük be az η_t valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, azaz legyen

$$\Phi(t, \omega) = \mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d_x F(t, x).$$

$\Phi(t, \omega)$ ismeretében az $F(t, x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható. (Lásd pl. H. CRAMÉR [1] 93. o.) $\Phi(t, \omega)$ meghatározására most a következő tételt bizonyítjuk be:

1 TÉTEL: *Ha*

$$\varphi(t, u; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(t, u, x)} dH(x) \tag{15}$$

integrál $0 \leq u \leq t$ *értékekre majdnem mindenütt létezik, úgy*

$$\Phi(t, \omega) = \exp\left\{-\int_0^t [1-\varphi(t, t-u, \omega)] dA(u)\right\}. \tag{16}$$

BIZONYÍTÁS: Felhasználjuk a következő segédtételt, amelyet [17] dolgozatunkban bebizonyítottunk.

SEGÉDTÉTEL: *Azon feltétel mellett, hogy a Poisson-folyamatban* $(0, t)$ *időközben pontosan* n *esemény fordult elő, ennek az* n *esemény időpontjainak együttes eloszlása megegyezik* n *számú, egymástól független véletlen pont eloszlásával a* $(0, t)$ *intervallumon, amelyek mindegyikére* $A(x)/A(t)$ *annak a valószínűsége, hogy* $(0, x)$ *közbe esik* $(0 \leq x \leq t)$.

Most jelölje ξ_t valószínűségi változó a $(0, t)$ időintervallumban a Poisson-folyamatban előforduló események számát. Ekkor $\xi_t = n$ esemény valószínűségét (4) szolgáltatja. Másrészt a feltételes várható értékekre vonatkozó ismert összefüggés alapján felírható

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_t = n)\, \mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = n\}.$$

Itt $\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = 0\} = 1$ és (15) tekintetbevételével segédtételünk alapján

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = 1\} = \frac{1}{A(t)} \int_0^t \varphi(t, t-u, \omega)\, dA(u). \tag{17}$$

Továbbá ugyancsak segédtételünk alapján felírható, hogy

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = n\} = [\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t} \mid \xi_t = 1\}]^n,$$

ugyanis ekkor η_t úgy tekinthető, mint n számú független, egyforma eloszlású valószínűségi változó összege, melyek közös karakterisztikus függvénye (17). A behelyettesítéseket elvégezve nyerjük a bizonyítandó (16) összefüggést.

Vezessük be most a következő jelöléseket

$$\lambda_j(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t, u, x)]^j\, dH(x), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ezek segítségével az η_t valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét a következőképpen fejezhetjük ki:

Ha η_t várható értéke létezik, úgy fennáll erre, hogy

$$\mathbf{E}\{\eta_t\} = -i\left(\frac{d \log \Phi(t, \omega)}{d\omega}\right)_{\omega=0} = \int_0^t \lambda_1(t, t-u)\, dA(u)$$

és η_t szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t\} = -\left(\frac{d^2 \log \Phi(t,\omega)}{d\omega^2}\right)_{\omega=0} = \int_0^t \lambda_2(t, t-u)\, dA(u).$$

Hasonlóképpen határozhatjuk meg η_t magasabbrendű félinvariánsait, illetve momentumait a $\lambda_j(t,u)$ kifejezések segítségével, amennyiben azok léteznek. Az η_t változó j-edik félinvariánsa

$$A_j(t) = (-i)^j \left(\frac{d^j \log \Phi(t,\omega)}{d\omega^j}\right)_{\omega=0} \int_0^t \lambda_j(t, t-u)\, dA(u).$$

2. *A homogén eset.* Most foglalkozzunk azzal a speciális esettel, midőn az alapul szolgáló folyamat időben homogén, λ eseménysűrűséggel, azaz $A(t) = \lambda t$, továbbá a jelek időbeli lefolyását leíró függvény nem függ külön a kezdőponttól, hanem csupán attól, hogy mióta tart a jel, azaz $f(t, u, x)$ helyett $f(t-u, x)$ alakú függvénnyel kell számolnunk, végül a χ_n paraméter t_n-től is független. Ekkor (15) helyett írható, hogy

$$\varphi(u,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(u,x)}\, dH(x)$$

és η_t karakterisztikus függvénye most

$$\Phi(t,\omega) = \exp\left\{-\lambda \int_0^t [1-\varphi(u;\omega)]\, du\right\}$$

és

$$\mathbf{E}\{\eta_t\} = \lambda \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u,x)\, dH(x)\right] du,$$

továbbá

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t\} = \lambda \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} (f(u,x))^2\, dH(x)\right] du$$

és általában η_t j-edik félinvariánsa:

$$A_j(t) = \lambda \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} (f(u,x))^j\, dH(x)\right] du.$$

Most bebizonyítjuk a következő határeloszlástételt:

2. TÉTEL: *Ha a fentemlített homogén folyamatra szorítkozunk és feltesszük, hogy*

(18) $$\int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(u,x)|\, dH(x)\right] du < \infty$$

úgy létezik $\lim_{t\to\infty} F(t,x) = F(x)$ *határeloszlásfüggvény és ennek karakterisztikus* *függvényére $\Phi(\omega)$-ra fennáll, hogy*

$$\Phi(\omega) = \exp\left\{-\lambda\int_0^\infty [1-\varphi(u,\omega)]\,du\right\}.$$

BIZONYÍTÁS: P. LÉVY és H. CRAMÉR tételéből (l. pl. H. CRAMÉR [1] 102. o.) következik, hogy ha $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t,\omega)=\Phi(\omega)$ létezik és $\Phi(\omega)$ az $\omega=0$ helyen folytonos, úgy $\lim\limits_{t\to\infty}F(t,x)=F(x)$ is létezik és $F(x)$ karakterisztikus függvénye éppen $\Phi(\omega)$. Tehát tételünk be van bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t [1-\varphi(u,\omega)]\,du$$

határérték létezik és az $\omega=0$ helyen folytonos.

Legyen

$$M(u)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(u,x)|\,dH(x)$$

úgy fennáll

$$|1-\varphi(u,\omega)|\leq\omega M(u)$$

és így

$$\left|\int_0^t [1-\varphi(u,\omega)]\,du\right|\leq\omega\int_0^t M(u)\,du.$$

Innen (18) szerint következik, hogy a kérdéses határérték létezik minden ω-ra és az is látszik, hogy az $\omega=0$ helyen folytonos. Ezzel kimutattuk a 2. tétel helyességét.

3. *A stacionárius folyamat.* A fizikai alkalmazásokban rendszerint olyan törvényszerűségek megállapítása bír fontossággal, amelyek általános érvényűek és nem függnek a speciális körülményektől. Így, ha az η_t folyamatot egy speciális t időpontban vizsgáljuk, akkor az így megállapított sajátságok magukon viselik a $t=0$ időpontban érvényes kezdeti állapot hatását. A fizikai vizsgálatokban a kezdeti állapot hatását úgy küszöbölik ki, hogy áttérnek a stacionárius megoldásra. Persze, ilyenkor külön vizsgálatot igényel annak kimutatása, hogy a kezdeti állapottól függetlenül létezik stacionárius határállapot, ún. egyensúlyi állapot. Ezeket szem előtt tartva tekintsük most a homogén folyamatot, mégpedig feltéve, hogy az végtelen hosszú ideje tart, azaz, tekintsük az

$$\eta_t^* = \sum_{-\infty<t_n\leq t} f(t-t_n,\chi_n) \tag{19}$$

folyamatot, ahol most az összegezés kiterjed az alapul vett Poisson-folyamat valamennyi t időpont előtt bekövetkező eseményére. Erre a következő tételt bizonyítjuk be:

3. TÉTEL: *Ha feltételezzük, hogy*

$$\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(u, x)| dH(x) \right] du < \infty \tag{20}$$

úgy a (19) *alatt értelmezett η_t^* folyamat minden t értékre* 1 *valószínűséggel létezik és η_t^* eloszlása t-től független éspedig* $\mathbf{P}(\eta_t^* \leqq x) = F(x)$ *ahol $F(x)$ a* 2. *tételben megadott határeloszlás, azaz, fennáll*

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\eta_t^*}\} = \exp\left\{-\lambda \int_0^\infty [1-\varphi(u, \omega)]\, du\right\}. \tag{21}$$

BIZONYÍTÁS. Csupán azt kell kimutatnunk, hogy az η_t^* folyamat 1 valószínűséggel létezik. Ebből már következik a 2. tételben bebizonyított határeloszlás létezése is. Ekkor pedig $\mathbf{P}(\eta_t^* \leqq x) = F(x)$ állítás nyilvánvalóan igaz.

Mindenekelőtt észrevesszük, hogy η_t^* előállítható független valószínűségi változók végtelen összegeként a következőképpen: $\eta_t^* = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n + \cdots$, ahol

$$\zeta_n = \sum_{t-nh < t_n \leqq t-(n-1)h}' f(t - t_n, \chi_n),$$

azaz a $(-\infty, t)$ intervallumot t-től visszafelé haladva h hosszúságú rész-intervallumokra bontjuk és ζ_n jelöli η_t^* kifejezésében azt az adalékot, amelyet az n-edik intervallumban előforduló események okoznak.

Arra nézve pedig, hogy független valószínűségi változók összegének végtelen sora 1 valószínűséggel mikor konvergens, szükséges és elegendő feltételt adott A. N. KOLMOGOROV [9] (lásd még P. R. HALMOS [6], 199. o.) Ha feltesszük, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\{|\zeta_n|\} < \infty \tag{22}$$

úgy KOLMOGOROV feltételei könnyen beláthatóan teljesülnek és ekkor $\lim_{n\to\infty}(\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n)$ határérték 1 valószínűséggel létezik. Ha (20) fennáll, úgy könnyen belátható, hogy esetünkben a fenti sor konvergens és így KOLMOGOROV tételéből következik, hogy η_t^* 1 valószínűséggel létezik.

Megjegyezzük, hogy (22) fennállásából $\lim_{n\to\infty}(\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n)$ 1 valószínűséggel való létezése akkor is következik, ha nem tesszük fel, hogy a változók függetlenek. Ez éppen BEPPO LEVI ismert tétele. Sőt, ez a tény közvetlenül is bebizonyítható MARKOV nem negatív valószínűségi változókra vonatkozó ismert egyenlőtlensége alapján. (Lásd [18] 193. o.)

Mint említettük a 3. tételből a 2. tétel nyilvánvalóan következik. J. L. DOOB [3] (119. o.) ennek a fordítottját is bebizonyította, kimutatván, hogy független valószínűségi változók összegének eloszlásban való konvergenciája, valószínűségi mértékben való konvergenciája és 1 valószínűséggel való konvergenciája egymással ekvivalensek.

A fentiekből egyszerűen következik, hogy most

$$\mathbf{E}\{\eta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(u,x)\,dH(x)\right] du, \tag{23}$$

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (f(u,x))^2\,dH(x)\right] du \tag{24}$$

és η_t^* j-edik félinvariánsa

$$\Lambda_j^* = \lambda \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (f(u,x))^j\,dH(x)\right] du,$$

feltéve, hogy a fenti integrálok léteznek.

A fenti formulák igazolják a 3. § (6), (7), (8) és (9) eredményeit.

4. *A stacionárius folyamat korrelációs függvénye.* Legyen a rövidség kedvéért $\mathbf{E}\{\eta_t^*\} = m$ és $\mathbf{D}^2\{\eta_t^*\} = \sigma^2$. Az η_t^* folyamat korrelációs függvényét, szokásosan

$$R(\tau) = \frac{\mathbf{E}\{\eta_t^*\eta_{t-\tau}^*\} - m^2}{\sigma^2} \tag{25}$$

kifejezéssel definiáljuk, amely minden τ-ra értelmezve van és amely létezik, ha σ^2 véges.

4. TÉTEL: *Ha $\sigma^2 < \infty$, úgy a (25) alatt definiált $R(\tau)$ korrelációs függvény létezik éspedig fennáll, hogy*

$$R(\tau) = \frac{\lambda}{\sigma^2} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(u,x) f(u-\tau,x)\,dH(x)\right] du. \tag{26}$$

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az $\theta_t^* = \eta_t^* + \eta_{t-\tau}^*$ folyamatot. Ez a folyamat szintén létezik és csupán abban különbözik η_t^*-től, hogy egy $u=0$ időpontban kezdődő jel időbeli lefolyását nem $f(u,x)$, hanem $g(u,x) = f(u,x) + f(u-\tau,x)$ szolgáltatja. Ekkor pedig (23) segítségével felírható, hogy

$$\mathbf{D}^2\{\theta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (f(u,x) + f(u-\tau,x))^2\,dH(x)\right] du.$$

Másrészt, $\theta_t^* = \eta_t^* + \eta_{t-\tau}^*$ tekintetbevételével felírható, hogy

$$\mathbf{D}^2\{\theta_t^*\} = 2\sigma^2(1 + R(\tau)),$$

ugyanis $\mathbf{D}^2(\eta_t^*) = \mathbf{D}^2(\eta_{t-\tau}^*) = \sigma^2$. $\mathbf{D}^2\{\theta_t^*\}$ fenti két kifejezésének összehasonlításából kiszámítható $R(\tau)$, amely megegyezik (26)-tal.

A fentiekkel igazoltuk a (11) eredmény helyességét. A (10) képlet pedig egyszerű meggondolásokkal megkapható $R(\tau)$ ismeretében.

5. *A stacionárius folyamat harmonikus analízise.* A. JA. HINCSIN [8] munkájában S. BOCHNER tételére hivatkozva bebizonyítja, hogy annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $R(\tau)$ egy stacionárius folyamat korrelációs függvénye legyen, az, hogy előállítható legyen a következő alakban:

$$(27) \qquad R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega\tau \, dF(\omega),$$

ahol $F(\omega)$ valószínűségeloszlásfüggvény. $F(\omega)$-t a folyamat *spektrális eloszlásfüggvényének* nevezzük.

A fizikában egy ilyen sztochasztikus folyamat spektrális eloszlásfüggvénye alatt a

$$G(\nu) = m^2 + \sigma^2[F(2\pi\nu) - F(-2\pi\nu)]$$

függvényt értik, amelynek szemléletes jelentése a következő: Ha η_t^*-t áramnak tekintjük, amelyet egységnyi ellenálláson vezetünk keresztül, úgy a leadott átlagteljesítmény

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \eta_t^{*2} dt\right\} = \mathbf{E}\{\eta_t^{*2}\} = m^2 + \sigma^2$$

és ennek a teljesítménynek a $0 \leq \nu < \infty$ frekvencia tartományra való eloszlását szolgáltatja $G(\nu)$, amely megadja a $(0, \nu)$ frekvenciasávban leadott teljesítményt. Itt ν közönséges frekvenciát jelöl, a körfrekvencia $\omega = 2\pi\nu$.

$F(\omega)$ meghatározására a következő tételt bizonyítjuk be:

5. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy $f(u, x)$ majdnem minden véges x értékre u-ban abszolút és négyzetesen integrálható függvény, azaz $p = 1, 2$-re*

$$\int_0^{\infty} |f(u, x)|^p du < \infty$$

és legyen

$$(28) \qquad A(\omega, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} f(u, x) e^{-i\omega u} du.$$

Ekkor a Hincsin-féle $F(\omega)$ spektrális eloszlásfüggvény minden ω-ra differenciálható és fennáll, hogy

$$(29) \qquad F'(\omega) = \frac{2\pi\lambda}{\sigma^2}\int_0^{\infty} |A(\omega, x)|^2 dH(x).$$

Innen következik, hogy $G(0)=m^2$ és $0<\nu<\infty$ értékekre $G(\nu)$ differenciálható és

$$G'(\nu)=8\pi^2\lambda\int_0^\infty |A(2\pi\nu, x)|^2 dH(x).$$

BIZONYÍTÁS: $R(\tau)$ ismeretében a Hincsin-féle (27) kifejezés inverze segítségével $F(\omega)$ egyértelműen meghatározható. A bizonyítás részleteit illetően utalunk [17] dolgozatunkra.

MEGJEGYZÉS: H. CRAMÉR [2] vizsgálataira hivatkozva az η_t^* folyamat a következő sztochasztikus integrál alakjában állítható elő:

$$\eta_t^* = m+\sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda). \tag{30}$$

Itt $Z(\lambda)$ a $-\infty<\lambda<\infty$ értékekre értelmezett additív és ortogonális növekményű folyamat, amelyre $\mathbf{E}\{Z(\lambda)\}=0$ valamennyi λ-ra és $\Delta\lambda>0$-ra

$$\mathbf{E}\{|Z(\lambda+\Delta\lambda)-Z(\lambda)|^2\}=F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda).$$

A (30) integrál úgy értendő, hogy

$$\mathbf{E}\left\{\left|\frac{\eta_t^*-m}{\sigma}-\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda)\right|^2\right\}=0.$$

A (30) előállítás szemléletesen azt jelenti, hogy az $\frac{\eta_t^*-m}{\sigma}$ folyamat felbontható különböző $\lambda(-\infty<\lambda<\infty)$ frekvenciájú szinuszhullámok összegére. Az egyes λ frekvenciájú komponensek amplitudói és fázisai véletlen mennyiségek, de érvényes, hogy a $(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$ frekvenciasávba eső komponensek amplitudóinak négyzetösszege $F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)$, ahol $F(\lambda)$ a folyamat spektrális eloszlásfüggvénye.

Megjegyezzük továbbá, hogy (J. L. DOOB [4] 335 o.), hogy ha $\lambda\to\infty$ (eseménysűrűség) úgy az $\frac{\eta_t^*-m}{\sigma}$ folyamat egy olyan ξ_t Gauss-folyamathoz konvergál, amelyre $\mathbf{E}(\xi_t)=0$, $\mathbf{D}^2(\xi_t)=1$ és $\mathbf{E}(\xi_t\xi_{t-\tau})=R(\tau)$, ahol $R(\tau)$ korrelációs függvényt (26) szolgáltatja.

5. §. Az elektroncső terében levő elektronok számának eloszlása

RÉNYI ALFRÉD vetette fel a kérdést, hogy egy adott pillanatban a térben levő elektronok száma milyen eloszlást mutat. [11] dolgozatában kimutatta, hogy ez a számosság Poisson-eloszlást követ. Ez az eredmény dolgozatunk (16) képletéből is következik, ha az $f(u, v)$ függvényt speciálisan úgy választjuk meg, hogy $f(u, v) = 1$, ha $0 \leq u \leq \tau(v)$ és $f(u, v) = 0$ egyébként, ahol $\tau(v)$ jelenti egy v kezdősebességű elektron repülési idejét. Ekkor $F(t, x)$ szolgáltatja t időpontban a térben levő elektronok számának eloszlásfüggvényét. A következőkben azonban a 4. §-ban kimondott segédtétel felhasználásával ennek a ténynek egyszerű bizonyítását adjuk meg.

Jelölje $\tau(t)$ egy a katódról t időpontban kilépő elektron repülési idejét (az elektroncső terében való tartózkodási idejét). Ez a szám valószínűségi változó, amely függ az elektron kezdősebességétől és esetleg egyéb mennyiségektől. A $\tau(t)$ változó eloszlásfüggvénye legyen $\mathbf{P}(t \leq x) = R(t, x)$. Annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ intervallum egy „véletlenül" ($A(u)/A(t)$ eloszlástörvénnyel) választott pontjában kilépő elektron t időpontban a térben tartózkodik:

$$p_t = \frac{1}{A(t)} \int_0^t [1 - R(u, t-u)]\, dA(u).$$

Ha ζ_t jelöli t időpontban a térben tartózkodó elektronok számát, úgy a 4. §-ban említett segédtétel figyelembevételével

$$\mathbf{P}(\zeta_t = k) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-A(t)} \frac{[A(t)]^n}{n!} \binom{n}{k} p_t^k (1-p_t)^{n-k} = e^{-A(t)p_t} \frac{[A(t)p_t]^k}{k!} \tag{31}$$

adódik. Ugyanis a szóban forgó esemény több, egymást kizáró módon jöhet létre: $(0, t)$ időközben $n = k, k+1, k+2, \ldots$ elektron lép ki a katódból és ha n elektron lépett ki, akkor ezek közül t időpontban k tartózkodik a térben és $n-k$ nem. A fentiek szerint tehát ζ_t valóban Poisson-eloszlást követ:

$$\mathbf{E}\{\zeta_t\} = p_t A(t) = \int_0^t [1 - R(u, t-u)]\, dA(u)$$

várható értékkel.

Tekintsük most a stacionárius folyamatot (λ eseménysűrűséggel) és legyen $R(t, x) = R(x)$, azaz $R(t, x)$ nem függ t-től, úgy ζ_t^*-nak, a t időpontban a térben levő elektronok számának, eloszlását

$$\mathbf{P}(\zeta_t^* = k) = e^{-\lambda\varrho} \frac{(\lambda\varrho)^k}{k!}$$

írja le, ahol

$$\varrho = \int_0^{\infty} x\, dR(x).$$

Ez az eredmény a (31) képlet $t \to \infty$ esetre vett határértékeként adódik:

6. §. Példák

1. Tegyük fel, hogy a legegyszerűbb modellel állunk szemben, mégpedig az egyes elektronok által okozott áramlökéseket a (2)

$$f(t,0)=\begin{cases} \dfrac{2\varepsilon}{\tau_0^2}t & \text{ha } 0\leq t\leq \tau_0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény írja le. Itt feltettük, hogy a kezdősebesség $v_0=0$ (állandó) és nem valószínűségi változó. Ekkor $H(v)=0$, ha $v<0$ és $H(v)=1$, ha $v\geqq 0$.

Most legyen az anódáram átlagértéke

$$\mathbf{E}\{\eta_t^*\}=I$$

ekkor $\lambda=I/\varepsilon$ és (7) szerint az anódáram szórása

$$\mathbf{D}\{\eta_t^*\}=\sqrt{\frac{4\varepsilon I}{3\tau_0}}, \tag{32}$$

ahol

$$\tau_0=\frac{2d}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon U}{m}}}.$$

Most (8) szerint

$$\Phi^*(\omega)=e^{-\lambda\tau_0}\exp\frac{\lambda\tau_0^2}{2i\omega\varepsilon}\left(e^{\frac{2i\omega\varepsilon}{\tau_0}}-1\right)$$

és ennek megfordításával azt kapjuk, hogy az η_t^* anódáram eloszlásfüggvénye

$$F(x)=e^{-\lambda\tau_0}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda\tau_0}\frac{(\lambda\tau_0)^n}{n!}\int_0^{x\tau_0/2\varepsilon}f_n(z)\,dz,$$

ahol

$$f_n(z)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{[z]}(-1)^j\binom{n}{j}(z-j)^{n-j}.$$

$F(x)$ a $0<x<\infty$ értékekre differenciálható és pedig

$$F'(x)=\frac{e^{-\lambda\tau_0}\tau_0}{2\varepsilon}\sum_{j=0}^{\left[\frac{x\tau_0}{2\varepsilon}\right]}\frac{(-1)^j(\lambda\tau_0)^j}{j!}\frac{J_{j-1}\left(2i\sqrt{\lambda\tau_0\left(\dfrac{x\tau_0}{2\varepsilon}-j\right)}\right)}{\left(i\sqrt{\lambda\tau_0\left(\dfrac{x\tau_0}{2\varepsilon}-j\right)}\right)^{j-1}},$$

ahol

$$J_\varrho(ix)=\left(\frac{ix}{2}\right)^\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+\varrho+1)}$$

a Bessel-függvény definíciója szerint.

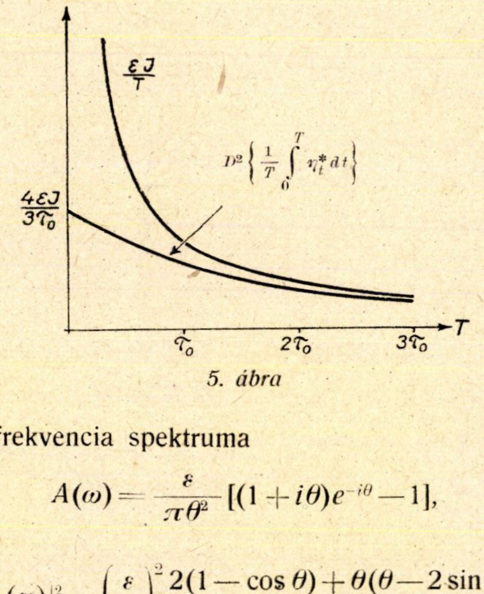
Az $R(\tau)$ korrelációs függvényre most (11) alapján

$$R(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{3}{2}\dfrac{|\tau|}{\tau_0}+\dfrac{1}{2}\dfrac{|\tau|^3}{\tau_0^3} & \text{ha } 0\leqq|\tau|\leqq\tau_0\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}\tag{33}$$

adódik, és a T időre közepelt áram szórásnégyzete (10) szerint

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta_t^*\,dt\right\}=\begin{cases}\dfrac{4\varepsilon I}{3\tau_0}\left[1-\dfrac{1}{2}\dfrac{T}{\tau_0}+\dfrac{1}{20}\dfrac{T^3}{\tau_0^3}\right] & \text{ha } 0\leqq T\leqq\tau_0\\ \dfrac{4\varepsilon I}{3\tau_0}\left[\dfrac{3}{4}\dfrac{\tau_0}{T}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\tau_0}{T}\right)^2\right] & \text{ha } \tau_0\leqq T<\infty.\end{cases}\tag{34}$$

Ha T igen nagy τ_0-hoz képest, úgy a szórásnégyzet jó közelítéssel $\varepsilon I/T$ és ez egyezik meg W. SCHOTTKY (B) formulájában kifejezésre jutó eredményével. (5. ábra).



5. *ábra*

Most $f(t, 0)$ frekvencia spektruma

$$A(\omega)=\frac{\varepsilon}{\pi\theta^2}\left[(1+i\theta)e^{-i\theta}-1\right],$$

ahol $\theta=\omega\tau_0$ és

$$|A(\omega)|^2=\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^2\frac{2(1-\cos\theta)+\theta(\theta-2\sin\theta)}{\theta^4}.$$

$G(0)=I^2$ és (12) szerint

$$G'(\nu)=8\varepsilon I\frac{2(1-\cos\theta)+\theta(\theta-2\sin\theta)}{\theta^4}=2\varepsilon I\left[1-\frac{1}{18}\theta^2+\ldots\right],\tag{35}$$

ahol $\theta=2\pi\nu\tau_0$. (6. ábra).

A $(\nu, \nu+\Delta\nu)$ frekvenciasávban leadott átlagos teljesítmény

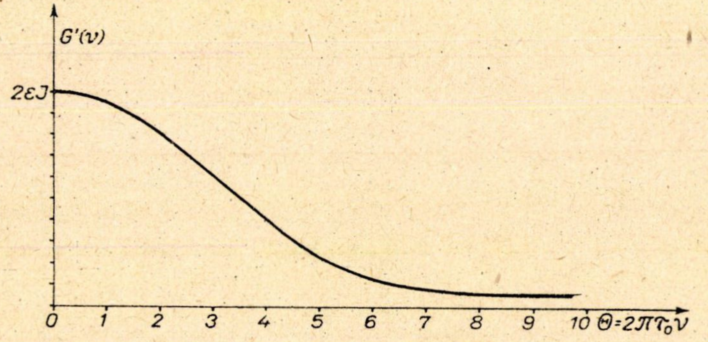
$$G(\nu+\Delta\nu)-G(\nu)\simeq G'(\nu)\Delta\nu\simeq 2\varepsilon I\Delta\nu$$

és ezen utóbbi közelítés egyezik meg W. SCHOTTKY (C) eredményével.

A fenti közelítés 3%-ig pontos, ha $\theta = 2\pi\nu\tau_0 < 0{,}4$ azaz, ha

$$\nu < \frac{2\sqrt{U}}{d} MHz,$$

itt U voltokban és d cm-ekben értendő.



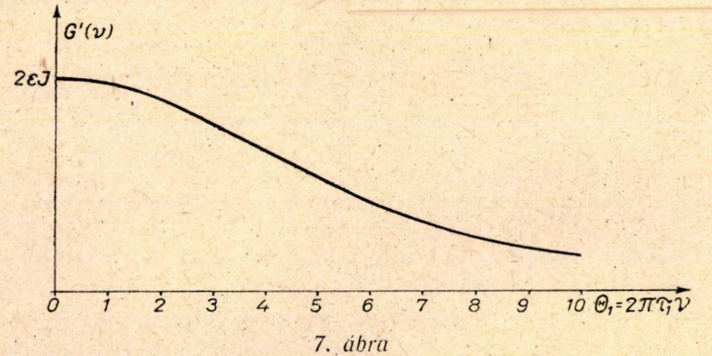
6. ábra

2. Ha a Langmuir-féle síkdióda modellel számolunk, akkor az egyes elektronok által létrehozott áramlökések időbeli lefolyása (3) szerint

$$f(t,0) = \begin{cases} \dfrac{4\varepsilon}{\tau_1^4} t^3 & \text{ha } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol

$$\tau_1 = \frac{3d}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon U}{m}}} = \frac{3}{2}\tau_0.$$



7. ábra

Ekkor az anódáram szórása

(36) $$\mathbf{D}\{\eta_t^*\} = \sqrt{\frac{16\varepsilon I}{7\tau_1}} = \sqrt{\frac{32\varepsilon I}{21\tau_0}},$$

azaz 7%-kal több a tértöltés elhanyagolásával számított esetnél. Megjegyezzük, hogy ez az eredmény nem tévesztendő össze azzal az ismert ténnyel, hogy a tértöltés következtében fellépő potenciálvölgy csökkenti az anódáram szórását. A fenti eseteknél még nem lép fel potenciálvölgy, ugyanis az első példánál $U(x)=Ux/d\,(0\leqq x\leqq d)$ függvény írja le a potenciálváltozást az elektroncső belsejében és a második példánál $U(x)=U(x/d)^{4/3}\,(0\leqq x\leqq d)$. Most $\theta_1=\omega\tau_1$ jelöléssel

$$A(\omega)=\frac{2\varepsilon}{\pi\theta_1^4}\left[(i\theta_1^3+3\theta_1^2-6i\theta_1-6)e^{-i\theta_1}+6\right]$$

és $0<\nu<\infty$ értékekre a frekvencia spektrum sűrűsége

(37) $$G'(\nu)=$$

$$2\varepsilon I\,\frac{576+16\left[(3\theta_1^2-6)^2+(\theta_1^3-6\theta_1)^2\right]+192\left[(\theta_1^3-6\theta_1)\sin\theta_1+(3\theta_1^2-6)\cos\theta_1\right]}{\theta_1^8}$$

ahol $\theta_1=2\pi\nu\tau_1$. (7. ábra). Sorbafejtéssel azt kapjuk, hogy:

$$G'(\nu)=2\varepsilon I\left[1-\frac{14}{525}\theta_1^2+\dots\right].$$

Amint látjuk, ebben az esetben is jó közelítésül alkalmazható W. SCHOTTKY (C) formulája, kicsiy θ_1 értékekre.

IRODALOM

[1] H. CRAMÉR, Mathematical Methods of Statistics, *Princeton,* (1946).

[2] H. CRAMÉR, On harmonic analysis in certain functional spaces, *Ark. Math. Astro. Fys.* **28B** (1942), 1—7.

[3] J. L. DOOB, Stochastic processes, New-York, (1953).

[4] J. L. DOOB, Time series and harmonic analysis, *Procedings of the First Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob.*, (1949), 303—343.

[5] K. FLOREK, E. MARCZEWSKI and C. RYLL-NARDZEWSKI, Remarks on the Poisson stochastic process I., *Studia Mathematica,* **13** (1953), 122—129.

[6] P. R. HALMOS, Measure Theory, New-York, (1950).

[7] A. KHINTCHINE, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, (1933)

[8] A. KHINTCHINE, Korrelationstheorie der stationär stochastischen Processe, *Mathematische Annalen,* **109** (1934), 604—610.

[9] A. N. KOLMOGOROV, Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, *Mathematische Annalen,* **99** (1928), 309—319.

[10] E. MARCZEWSKI, Remarks on the Poisson process II., *Studia Mathematica* **13** (1953), 130—136.

[11] A. RÉNYI, On some problems concerning Poisson processes, *Publicationes Mathematicae,* Debrecen **2** (1951), 66—73.

[12] S. O. RICE, Mathematical analysis of random noise, *Bell System Technical Journal,* **23** (1944) 282—332, **24** (1945), 46—156.

[13] C. Ryll-Nardzewski, On the non-homogeneous Poisson-process I., *Studia Mathematica*, **14** (1954), 124—128.

[14] W. Schottky, Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern, *Annalen der Physik*, **57** (1918), 541—567.

[15] W. Schottky, Die Raumladungsschwänckung des Schratteffektes I., Theoretische Grundlagen und Hauptergebnisse, *Wiss. Veröff. Siemens-Konzern*, **16** (1937), 1—18.

[16] E. Spenke, Die Frequenzabhängigkeit des Schrvtteffektes, *Wiss. Veröff. Siemens-Konzern*, **16** (1937), 127—136.

[17] L. Takács, Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól, *MTA III. Oszt. Közl.*, **4** (1954), 473—504.

[18] L. Takács, Rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról, *MTA III. Oszt. Közl.*, **5** (1955) 187—197.