A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA LEOLVASÁSA A POINCARÉ-FÉLE KÖRMODELLRŐL*

SZÁSZ PÁL

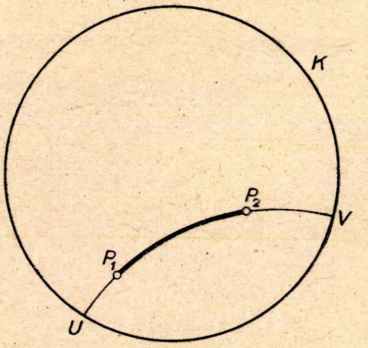
Bemutatta Hajós György r. tag az 1956. február 24-én tartott felolvasó ülésen

A hiperbolikus síkgeometriának ismert megvalósítása az euklideszi geometria keretében az alábbi *pszeudogeometria*, vagy *képgeometria*, amely H. Poincaré [1] munkái révén terjedt el s amelyet e geometria *Poincaré-féle körmodelljének* szokás nevezni.

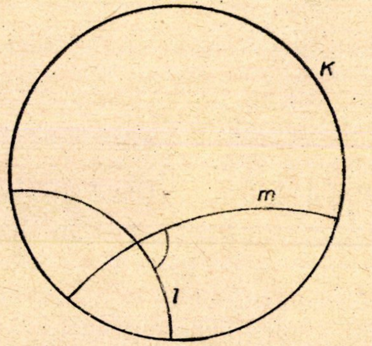
Legyen az euklideszi síkon valamely K kör mint *alapkör* megadva. E K kör belső pontjait nevezzük *pszeudopontoknak*, a K-t derékszögben metsző köröknek, ill. egyeneseknek (amelyeket közös néven *ortogonális köröknek* akarunk nevezni) a K belsejébe eső részeit mondjuk *pszeudoegyeneseknek*. A P_1 és P_2 pszeudopontokon átmenő ortogonális kör $\widehat{P_1P_2}$ ívét nevezzük *pszeudoegyenesdarabnak*. Ennek *karakterisztikája* legyen az

$$(UVP_2P_1) = \frac{UP_2}{P_2V} : \frac{UP_1}{P_1V}$$

kettősviszony, ahol U és V az említett ortogonális kör K-val való metszéspontjai, úgy jelölve, hogy P_2 az $\widehat{UV}$ íven P_1 és V között van (1. ábra). Két pszeudo-



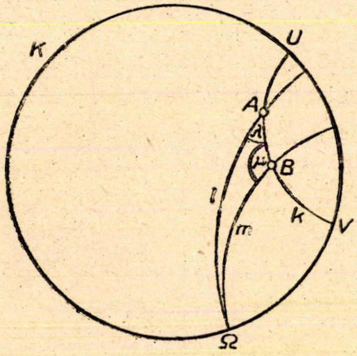
1. ábra



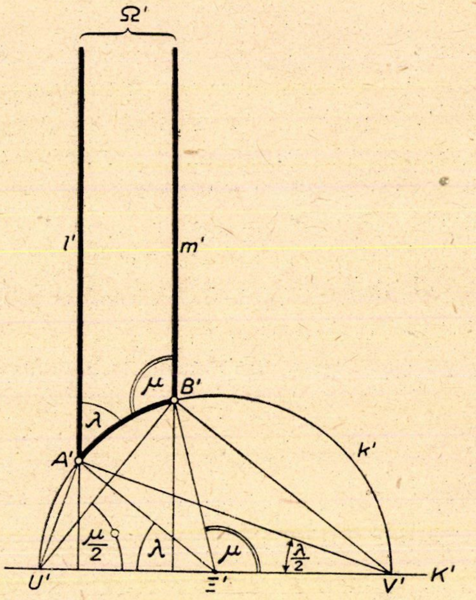
2. ábra

* Német nyelvű más változata: Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie, *Acta Math. Hung.* **5** (1954), 29—34.

egyenesdarabot akkor mondjunk *pszeudokongruensnek*, vagy *pszeudoegyenlőnek*, ha a karakterisztikáik egyenlők. Ezzel szemben az l, m pszeudoegyenesek *pszeudoszöge* az őket képező ortogonális körök szögével legyen karakterizálva (2. ábra) s egyenlő karakterisztikájú pszeudoszögeket nevezzünk *pszeudokongruenseknek (pszeudoegyenlőknek)*. Könnyen meggyőződhetünk, hogy az ezen megállapodásokkal értelmezett pszeudogeometriában a hiberbolikus síkgeo-



3. *ábra*



4. *ábra*

metria minden axiómája teljesül. Megállapodásainkból már következik, hogy a P_1, P_2 pszeudopontok $\overline{P_1P_2}$ *pszeudotávolsága* a fenti jelölések mellett

$$\overline{P_1P_2} = \log(UVP_2P_1), \tag{1}$$

amennyiben *pszeudohosszegységnek* azt a pszeudoegyenesdarabot választjuk, amelynek karakterisztikája a természetes logaritmusok e alapszámával egyenlő.

Ez a POINCARÉ-féle körmodell azonban nemcsak modellje a hiperbolikus síkgeometriának, hanem ekvivalens is vele: a hiperbolikus síkot kölcsönösen egyértelműen leképezhetjük e körmodellre. Ezt könnyen megmutathatjuk, mégpedig a hiperbolikus trigonometria felhasználása nélkül [2]. Ennélfogva e körmodell trigonometriájának előállítása egyben a hiperbolikus trigonometria képleteinek bebizonyítását jelenti.

Ezen az úton igen elegánsan állította elő a hiperbolikus trigonometriát J. HJELMSLEV [3]. Meggondolásának lényege a következő. Tekintsünk olyan

$AB\Omega$ *elfajuló pszeudoháromszöget*, amelyben A és B pszeudopontok, míg Ω az alapkör kerületén fekvő pont (3. ábra). Legyen mint pszeudotávolság $\overline{AB}=c$, továbbá az A és B csúcsú pszeudoszögek legyenek $BA\Omega_{\sphericalangle}=\lambda$, $AB\Omega_{\sphericalangle}=\mu$. Az A és B pontokon átmenő k ortogonális kör K-val való U, V metszéspontjai jelölését válasszuk úgy, hogy az $\widehat{UV}$ íven B az A és V közé essék. Az ábrát Ω mint inverziócentrumra vonatkozólag invertálva, a K alapkör valamely K' egyenesbe, K belseje e K' egyenes egyik oldalán fekvő félsíkba, a k ortogonális kör e K' egyenesre merőleges k' körbe, az A és Ω ill. B és Ω pontokon átmenő l, ill. m ortogonális körök pedig K'-re merőleges l', resp. m' egyenesekbe mennek át (4. ábra). Az A, B, Ω, U, V pontok inverzei legyenek rendre A', B', Ω', U', V'; ezek közül Ω' a végtelenben van. Minthogy ez inverziónál a szögek nagysága megmarad, azért

$$B'A'\Omega'_{\sphericalangle}=\lambda, \quad A'B'\Omega'_{\sphericalangle}=\mu.$$

A k' kör középpontját Ξ'-vel jelölve, nyilván $A'\Xi'U'_{\sphericalangle}=\lambda$, $B'\Xi'V'_{\sphericalangle}=\mu$, tehát mint e középponti szögeknek megfelelő kerületi szögek

$$A'V'U'_{\sphericalangle}=\frac{\lambda}{2}, \quad B'U'V'_{\sphericalangle}=\frac{\mu}{2}.$$

Ennélfogva

$$\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}=\frac{A'V'}{U'A'}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\mu}{2}=\frac{U'B'}{B'V'}$$

s így

$$\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{ctg}\frac{\mu}{2}=(U'V'B'A')=(UVBA),$$

miután ez inverziónál a kettősviszony is megmarad. De $\overline{AB}=c$ folytán az (1) alatti távolságképletre tekintettel

$$(UVBA)=e^{c},$$

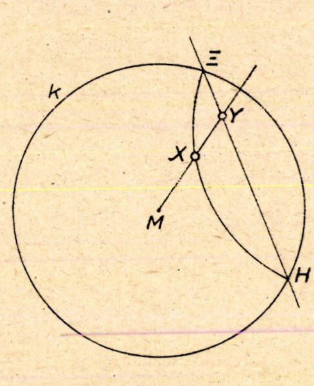
tehát látjuk, az $AB\Omega$ elfajuló pszeudoháromszög alkatrészeire fennáll az,

$$e^{c}=\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{ctg}\frac{\mu}{2}$$

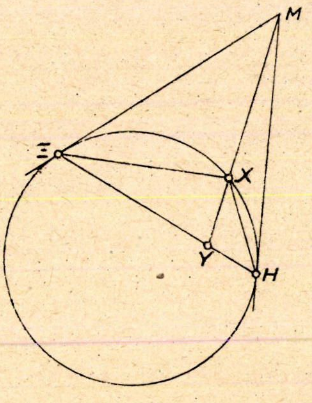
alapképlet. Ez a mondottak szerint a hiperbolikus síkon is érvényes. Amint J. HJELMSLEV [4] idézett könyvében megmutatja, ez alapképletből már egyszerűen előállíthatók a derékszögű háromszög hiperbolikus trigonometriai képletei. Ezt az előállítást más helyen [5] már ismertettem. Sokkal bonyodalmasabban állították elő a hiperbolikus trigonometriát a POINCARÉ-féle körmodellből HOWARD EVES és V. E. HOGGATT [6].

Az alábbiakban bizonyos elemigeometriai segédtételek alapján, amelyeket egy előbbi dolgozatomban [7] már bebizonyítottam, a POINCARÉ-féle körmodellről közvetlenül leolvassuk a derékszögű *pszeudoháromszög* trigonometriájának két alapképletét, amelyekből az egész hiperbolikus trigonometria következik. E segédtételek a következők:

1. Segédtétel. Ha X az M középponttól különböző pont a k kör belsejében és X-en át olyan kört fektetünk, amely k-t a Ξ, H pontokban derékszögben metszi, akkor a $\Xi\mathrm{H}$ és MX egyenesek Y metszéspontja független az X-en át fektetett kör választásától (5. ábra).



5. ábra



6. ábra

2. Segédtétel. Ha valamely körnek $\widehat{\Xi\mathrm{H}}$ a félkörnél kisebb íve és M a kör Ξ ill. H-beli érintőinek metszéspontja, akkor bárhogyan választva a $\widehat{\Xi\mathrm{H}}$ ív közbülső X pontját, a $\Xi\mathrm{H}$ és MX egyenesek Y metszéspontjára

$$\left(\frac{\Xi X}{X\mathrm{H}}\right)^2 = \frac{\Xi Y}{Y\mathrm{H}}$$

(6. ábra).

3. Segédtétel. Ha X az M középponttól különböző pont a k kör belsejében és Ξ_0, H_0 az MX egyenesnek k-val való metszéspontjai, úgy jelölve, hogy X az M és H_0 között fekszik, akkor az X pontnak az 1. segédtétel szerint megfelelő Y pontra

$$\left(\frac{\Xi_0 X}{X\mathrm{H}_0}\right)^2 = \frac{\Xi_0 Y}{Y\mathrm{H}_0}$$

(7. ábra).

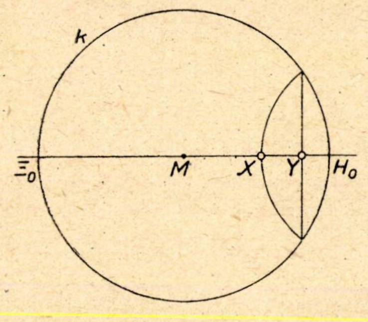
Legyen a K alapkör középpontja O, sugara r. Valamely $X \neq O$ pszeudopontnak az 1. segédtétel szerint megfelelő Y pontra nézve az OY távolságot könnyen kifejezhetjük a $t = \overline{OX}$ pszeudotávolsággal. Legyenek ugyanis U, V

az OX egyenes és K metszéspontjai, úgy jelölve, hogy X az O és V közé essék (8. ábra). Akkor az (1) távolságképlet értelmében $UO = OV$ folytán

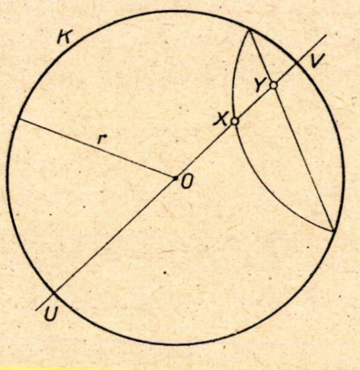
$$e^t = (UVXO) = \frac{UX}{XV}.$$

Ennélfogva a 3. segédtétel felhasználásával

$$e^{2t} = \left(\frac{UX}{XV}\right)^2 = \frac{UY}{YV} = \frac{r+OY}{r-OY}$$



7. ábra



8. ábra

s innen

$$OY = r\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = r\,\mathrm{th}\,t. \tag{2}$$

Tekintsünk mármost valamely ABC derékszögű pszeudoháromszöget, amelyben $C_{\sphericalangle} = 90°$ s amelynek alkatrészei

$$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, A_{\sphericalangle} = \lambda, B_{\sphericalangle} = \mu. \tag{3}$$

Ha $A \neq O$, akkor a K alapkört, valamint annak belsejét önmagába átvivő inverzióval A mindig O-ba vihető [8]: az A-ban OA-ra állított merőlegesnek K-val való egyik metszéspontját S-sel, a K kör S-beli érintőjének OA-val való metszéspontját pedig O'-vel jelölve (9. ábra), az O' középpontú és $O'S$ sugarú körre vonatkozó inverzióval K valamint annak belseje önmagába megy át s A éppen O-ba kerül. Ez inverziónál a szögek nagysága, valamint a kettősviszony megmarad [9], tehát az ABC pszeudoháromszögből származó $A_1B_1C_1$ pszeudoháromszög (amelyben $A_1 = O$), rendre ugyanazokkal az alkatrészekkel bír, tekintettel a pszeudokongruenciára tett fenti megállapodásainkra.*

* Ez észrevételre szükség van már akkor, midőn a pszeudokongruenciát illetően a Hilbert-féle III_5 egybevágósági axiómát bizonyítjuk be.

Ennélfogva az ABC pszeudoháromszögre vonatkozó hiperbolikus trigometriai képletek megállapításánál feltehetjük, hogy $A = O$ (10. ábra).

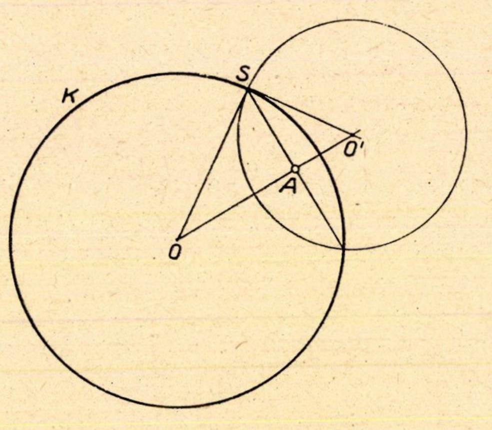
Legyenek a B és C pontokon átmenő ortogonális körnek a K alapkörrel való metszéspontjai U és V, úgy jelölve, hogy az $\overset{\frown}{UV}$ íven C az U és B közé essék. Akkor (1) értelmében az ABC pszeudoháromszög $\overline{BC} = a$ oldalára $UC = CV$ folytán

(4) $$e^a = (UVBC) = \frac{UB}{BV}.$$

S ha az AB, AC egyenesek UV-vel való metszéspontjait B' és C'-vel jelöljük, a 2. segédtétel szerint

(5) $$\left(\frac{UB}{BV}\right)^2 = \frac{UB'}{B'V} = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\lambda},$$

ahol $\beta = COV_{\sphericalangle} = UOC_{\sphericalangle}$ az $\overline{OC} = b$ pszeudotávolságnak megfelelő úgynevezett *elpattanási szög*.



9. ábra

Mármost (4)-ből (5) alapján

$$e^{2a} = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\lambda},$$

honnan

(6) $$\operatorname{tg}\lambda = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}\operatorname{tg}\beta = \operatorname{th} a \operatorname{tg}\beta.$$

De (2) felhasználásával $\overline{OC} = b$ folytán

(7) $$r\cos\beta = OC' = r \operatorname{th} b,$$

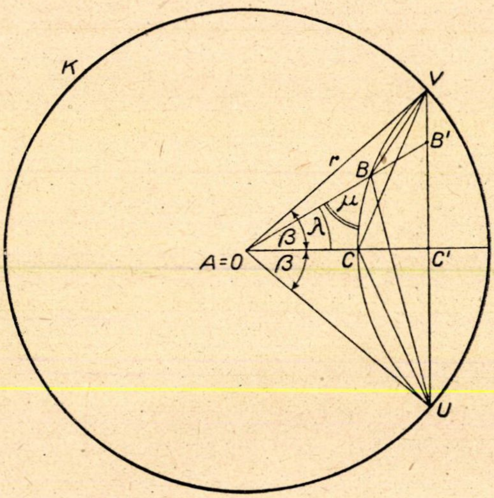
vagyis $\cos\beta = \operatorname{th} b$ s így

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{sh} b}.$$

Ezt (6) alatt behelyettesítve, előáll a

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}$$

alapképlet, amely a derékszögű háromszög alkatrészei közül az egyik hegyesszög és a két befogó között állapít meg összefüggést a hiperbolikus síkon.



10. ábra

Minthogy (10. ábra)

$$\cos\lambda = \frac{OC'}{OB'}$$

és (2) értelmében $\overline{AB} = c$ folytán (7) mellett még

$$OB' = r \operatorname{th} c,$$

ily módon nyerjük a

$$\text{(II)} \qquad \cos\lambda = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}$$

második alapképletet, amely a hiperbolikus síkon a derékszögű háromszög egyik hegyesszöge, a mellette fekvő befogó és az átfogó közötti összefüggést fejezi ki.

E (I) és (II) alapképletekből, melyeket itt a Poincaré-féle körmodellről leolvastunk, már folyik a hiperbolikus síkon a derékszögű háromszög (3) alatti alkatrészei közül három-három között még fennálló további négy egyenlet s ezzel az egész hiperbolikus trigonometria.

IRODALOM

[1] H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica* (Stockholm), 1 (1882), 1—62, speciálisan § 2, 6—8 és § 12, 58—61; Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, *ugyanott* 193—294, speciálisan 201—202; Mémoire sur les groupes kleinéens, *ugyanott* 3 (1883), 49 92, speciálisan 55—56.

[2] V. ö. szerzőtől, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Hung.* 4 (1953), 243—250, speciálisan § 1, 244—247.

[3] J. Hjelmslev, Grundlag for den projektive Geometri, Kobenhavn, 1943, § 8, 38—39.

[4] J. Hjelmslev [3], i. h. § 7, 36—37.

[5] Szerzőtől: A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel, *MTA Mat. és Fiz. O. Közleményei* 3 (1953), 527—533, speciálisan 531—532.

[6] Howard Eves and V. E. Hoggatt, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *American Math. Monthly* **58** (1951), 469—474.

[7] Szerzőtől: Elementargeometrische Herstellung des Klein-Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **16** (1955) 1—8, speciálisan 4—5.

[8] E fogást illetően v. ö. Howard Eves and V. E. Hoggatt [6], i. h. 470—471.

[9] A kettősviszony megmaradásának elemigeometriai bebizonyítását illetően lásd pl. szerzőtől, [7], i. h. 7, 9) lábjegyzet.