

A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA ELŐÁLLÍTÁSA A POINCARÉ-FÉLE FÉLSÍK ÚTJÁN*

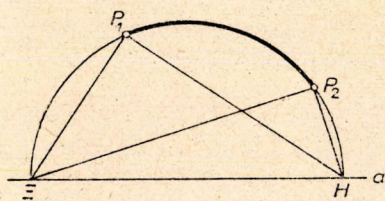
SZÁSZ PÁL

H. POINCARÉ [1] a hiperbolikus síkgeometria megvalósításaképp az alábbi modellt, mondhatnók *pszeudogeometriát* vagy *képgeometriát* adta meg, ha némileg más alakban is. Ezt röviden *Poincaré-féle félsíknak* nevezzük.

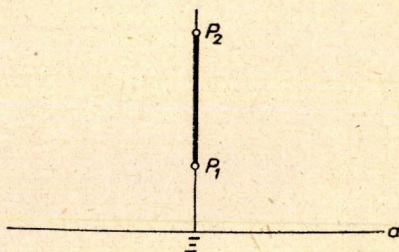
Legyen az euklideszi síkon valamely a egyenes mint *alapegyenes* megadva. Az általa meghatározott két félsík egyikének belső pontjait nevezzük *pszeudopontoknak*, az e félsíkban fekvő és az alapegyenest derékszögben metsző félköröket és félegyeneseket (amelyeket *ortogonális félköröknek*, ill. *ortogonális félegyeneseknek* akarunk a továbbiakban nevezni), mondjuk *pszeudoegyeneseknek*, természetesen nem számítva ezekhez az a -ra eső végpontjaikat. Ha a P_1 és P_2 pszeudopontok nem ortogonális félegyenesen fekszenek, akkor a rajtuk átmenő ortogonális félkör $\widehat{P_1P_2}$ ívét, ellenkező esetben a P_1P_2 egyenesdarabot nevezzük *pszeudoegyenesdarabnak*. Ennek *karakterisztikája* legyen az első esetben a

$$(\Xi H P_2 P_1) = \frac{\Xi P_2}{P_2 H} : \frac{\Xi P_1}{P_1 H}$$

kettősviszony, ahol Ξ és H a P_1, P_2 pontokon átmenő ortogonális félkör végpontjai, úgy jelölve, hogy P_2 a $\widehat{\Xi H}$ félkörön a P_1 és H között van (1. ábra).



1. ábra



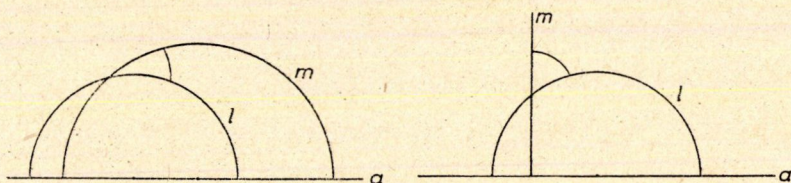
2. ábra

A második esetben a *karakterisztika* legyen a

$$(\Xi P_2 P_1) = \frac{\Xi P_2}{\Xi P_1}$$

* Német nyelvű változata: Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Poincaréschen Halbebene, *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1954), 126–129.

osztóviszony, ha Ξ a P_1 és P_2 -t tartalmazó ortogonális félegyenes kezdőpontja s P_1 a Ξ és P_2 közé esik (2. ábra). Két pszeudoegyenesdarabot nevezzünk *pszeudokongruensnek* vagy *pszeudoegyenlőnek*, ha a karakterisztikáik egyenlők. Ezzel szemben az l, m pszeudoegyenesek *pszeudoszöge* az ezeket képező ortogonális félkörök (esetleg ortogonális félkör és ortogonális félegyenes) szögével legyen karakterizálva (3. ábra) s egyenlő karakterisztikájú pszeudoszögeket nevezzünk *pszeudokongruenseknek* (*pszeudoegyenlőknek*). Meggyőződhetünk, hogy az ezen megállapodásokkal értelmezett pszeudogeometriában a hiperbolikus síkgeometriának minden posztulátuma ki van elégítve. Megállapodásainkból már következik, hogy amennyiben *pszeudohosszegységnek* azt a pszeudoegyenesdarabot választjuk, amelynek karakterisztikája a természetes loga-



3. ábra

ritmusok e alapszámával egyenlő, a nem egy ortogonális félegyenesben fekvő P_1, P_2 pseudopontok $\overline{P_1 P_2}$ *pseudotávolsága* a fenti jelölések mellett

$$(1) \quad \overline{P_1 P_2} = \log (\mp H P_2 P_1),$$

míg ellenkező esetben ez (1) képletnek megfelelően

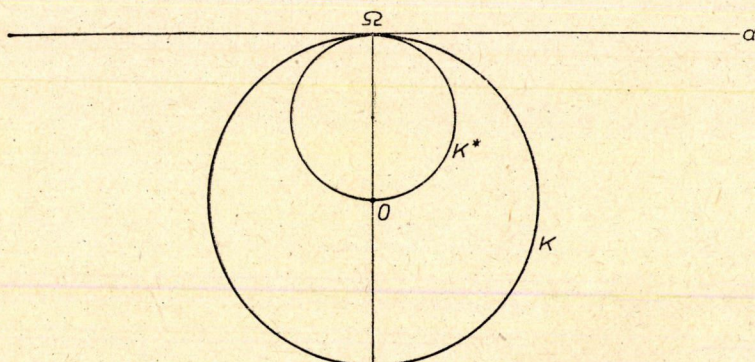
$$(2) \quad \overline{P_1 P_2} = \log \frac{\Xi P_2}{\Xi P_1}.$$

Ez a Poincaré-féle félsík azonban nemcsak modellje a hiperbolikus síkgeometriának, hanem ekvivalens is vele: a hiperbolikus síkot kölcsönösen egyértelműen leképezhetjük a Poincaré-féle félsíkra. Ezt igen egyszerűen megtehetjük, mégpedig a hiperbolikus trigonometria felhasználása nélkül [2]. Ennélfogva a hiperbolikus trigonometria képleteit bebizonyítandó, elegendő a Poincaré-féle félsík trigonometriáját előállítanunk.

Lényegében ugyanez a feladat a hiperbolikus sík *Poincaré-féle körmodellje* trigonometriájának előállítása, amivel előbbi dolgozatunk is foglalkozik [3]. Ugyanis a Poincaré-féle félsík kölcsönösen egyértelműen leképezhető e körmodellre. Ez elemigeometriai úton következőképp történhet. A Poincaré-féle félsíkot az a alapegyenest Ω -ban érintő és annak másik oldalán fekvő O középpontú K körre vonatkozó inverzióval leképezzük az $O\Omega$ átmérőjű K^* kör belsejére, majd e körbelső Ω mint hasonlósági centrumra vonatkozólag kétszeresen nagyítjuk (4. ábra). Ezzel nyilván megkapjuk a K -beli körmodellt, tekintve,

hogyan e transzformációnál kör vagy egyenes körbe (az inverzió O középpontján átmenő kör vagy egyenes egyenesbe) megy át és a szögek nagysága, valamint a kettősviszony megmarad. E megfeleltetés révén a körmodell trigonometriájának előállításával a Poincaré-féle félsík trigonometriáját is megkapjuk.

Nem látszik érdektelennek azonban a Poincaré-féle félsík trigonometriájának közvetlen előállítása sem. Ez többféle módon lehetséges, ezek egyikét



4. ábra

mutatjuk be az alábbiakban. Részben hasonló módszerrel élt már H. MESCHKOWSKI [4] is.

*

Legyen ABC derékszögű *pseudoháromszög* ($C_{\infty} = 90^\circ$) a

$$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, BAC_{\infty} = \lambda, CBA_{\infty} = \mu$$

alkatrészekkel. Hozzuk ezt a B pont körüli *pseudoforgással* olyan helyzetbe, hogy B a rajta átmenő ortogonális félegyenes Ω kezdőpontja és C közé essék (5. ábra). Az $\Omega B = 1$ hosszegységválasztás mellett (2) szerint

$$a = \overline{BC} = \log \Omega C,$$

vagyis

$$(3) \quad \Omega A = \Omega C = e^a.$$

Az A és B pontokon átmenő ortogonális félkör középpontját Γ -val jelölve, nyilván $\Omega \Gamma B_{\infty} = \mu$ és így

$$(4) \quad \Gamma A = \Gamma B = \frac{1}{\sin \mu}, \quad \Omega \Gamma = \operatorname{ctg} \mu.$$

De mivel evidenten $\Omega A \Gamma_{\infty} = \lambda$, az $A \Omega \Gamma$ háromszögben a cosinus-tétel szerint

$$\Omega \Gamma^2 = \Omega A^2 + \Gamma A^2 - 2 \Omega A \cdot \Gamma A \cos \lambda,$$

azaz (3) és (4)-re tekintettel

$$\operatorname{ctg}^2 \mu = e^{2a} + \frac{1}{\sin^2 \mu} - \frac{2e^a}{\sin \mu} \cos \lambda,$$

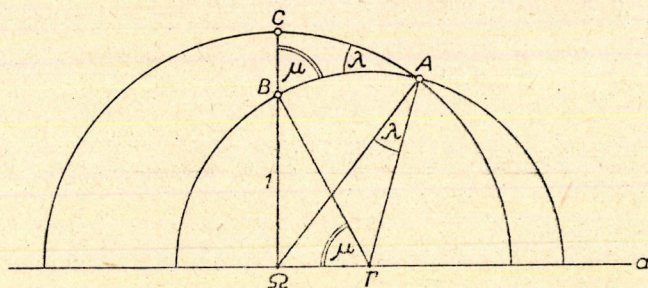
amiből következik

$$2e^a \frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = e^{2a} + 1,$$

vagy

$$(I) \quad \frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = \operatorname{ch} a,$$

a derékszögű pszeudoháromszög λ, μ, a alkatrészei között fennálló egyenlet.



5. ábra

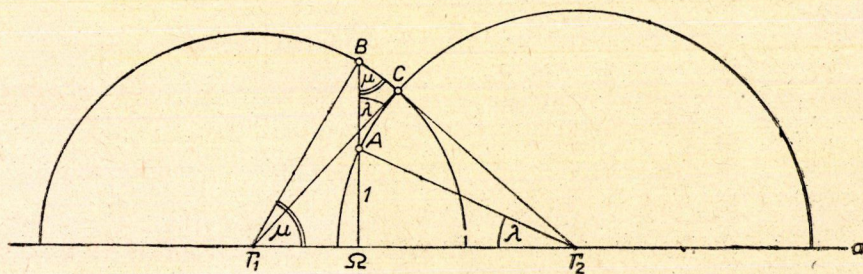
A λ, μ, c közötti egyenletet H. MESCHKOWSKI [5] megfontolásával következőképp kaphatjuk meg. Hozzuk a háromszöget B körüli pszeudoforgással olyan helyzetbe, hogy A a B és az előbbi Ω pont közé essék (6. ábra). Most az $\Omega A = 1$ választással (2) értelmében

$$c = \overline{AB} = \log \Omega B,$$

vagyis

$$(5) \quad \Omega B = e^c.$$

Jelöljük a B, C pontokon átmenő ortogonális félkör középpontját I_1 -gyel, az



6. ábra

A és C -n átmenőét I_2 -vel. Akkor nyilván $\Omega I_1 B_\infty = \mu$, $\Omega I_2 A_\infty = \lambda$, tehát (5)-re tekintettel

$$(6) \quad \Omega I_1 = e^c \operatorname{ctg} \mu, \quad \Omega I_2 = \operatorname{ctg} \lambda,$$

továbbá

$$(7) \quad I_1 C = I_1 B \frac{e^c}{\sin \mu}, \quad I_2 C = I_2 A \frac{1}{\sin \lambda}.$$

Mintfogya azonban a feltevés szerint a két ortogonális félkör C -ben egymást derékszög alatt metszi, azért a $I_1 C I_2$ derékszög, tehát PYTHAGORAS tétele értelmében

$$I_1 I_2^2 = I_1 C^2 + I_2 C^2,$$

vagyis (6) és (7) alapján

$$(e^c \operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \lambda)^2 = \frac{e^{2c}}{\sin^2 \mu} + \frac{1}{\sin^2 \lambda}.$$

Innen adódik

$$2e^c \operatorname{ctg} \lambda \operatorname{ctg} \mu = e^{2c} + 1,$$

vagy

$$(II) \quad \operatorname{ctg} \lambda \operatorname{ctg} \mu = \operatorname{ch} c,$$

a derékszögű pszeudoháromszög λ, μ, c alkatrészei között fennálló egyenlet.

E (I) és (II) képletekből már folyik az egész hiperbolikus trigonometria. Ennek tehát a Poincaré-féle félsík útján való előállítását ezzel befejezettnek tekinthetjük.

IRODALOM

- [1] V. Ö. H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsien, *Acta Mathematica* (Stockholm) **1** (1882), 1—62, speciálisan § 2, 6—8.
- [2] Lásd SZERZŐTŐL, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Hung.* **4** (1953), 243—250, speciálisan § 1, 244—247.
- [3] Lásd itt közölt első cikkünket, 73—80.
- [4] H. MESCHKOWSKI, Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaréschen Modell der hyperbolischen Geometrie, *Elemente der Mathematik* **7** (1952), 130—132.
- [5] H. MESCHKOWSKI,⁴ i. h.