A KLASSZIKUS ORTOGONÁLIS POLINOMRENDSZEREK EGY JELLEMZÉSÉRŐL

FELDMANN LÁSZLÓ

Klasszikus ortogonális polinomrendszereknek nevezzük a Jacobi, Laguerre és Hermite polinomokat; illetőleg azokat a polinomokat, amelyek ezekből lineáris transzformációval nyerhetők. A klasszikus ortogonális polinomrendszerek közös tulajdonsága, hogy mindegyikhez található olyan

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=\lambda y \tag{1.1}$$

alakú differenciálegyenlet, melynek az illető polinomrendszer megoldása. Ez úgy értendő, hogy létezik $\{\lambda_n\}$ számsorozat, melynek $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ elemét λ helyébe helyettesítve, az illető polinomrendszer $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ *pontosan* nulla, első, ..., n-edfokú tagjai kielégítik (1.1) egyenletet.

Más ortogonális polinomrendszer, mely az említett módon kielégít (1.1) alakú differenciálegyenletet, nem ismeretes. Jelen dolgozatban bebizonyítjuk, hogy ilyen ortogonális polinomrendszer — a három klasszikuson kívül — nem is található.

Eljárási módot is adunk annak megállapítására, hogy adott (1.1) differenciálegyenletnek van-e ortogonális polinomrendszer megoldása (a már említett értelemben) és ha van, akkor melyek a polinomrendszer azon jellemző adatai, melyek segítségével a polinómrendszer megkonstruálható.

Annak lehetőségét, hogy a klasszikus ortogonális polinómrendszerek jellemezhetők, mint (1.1) egyenlet egyedüli megoldásai az ortogonális polinomrendszerek között, ACZÉL JÁNOS vetette fel.*

2. Közelebbről meghatározzuk azon (1.1) egyenletet melynek megoldásai, valamely klasszikus polinomrendszer tagjai.

*J. ACZÉL: Eine Bemerkung über die Charakterisierung der „klassischen" orthogonalen Polynome. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953). A probléma még így is felvethető: Keresendők (1.1) egyenlet megoldásai, a szokásos peremfeltételek helyett azon feltétellel, hogy „legyen a megoldás polinóm". Mikor található ekkor megfelelő $\{\lambda_n\}$-hez olyan $\{p_n\}$ rendszer, mely ortogonális rendszer nemnegatív súlyfüggvénnyel?

Hasonló témájú L. FELDMANN: Über durch Sturm—Liouvillesche Differentialgleichungen charakterisierte orthogonale Polinomsysteme. Publ. Math. 3. (1954) cikke. Jelen dolgozat 1. és 2. tétele azonban más bizonyítási eljárásokkal és többet mond ki, mint az említett cikk.

1. LEMMA. *Legyen* (1.1) *egyenletnek* p_0, p_1 *és* p_2 *pontosan nulla-, első- és másodfokú polinommegoldása, különböző* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ *paraméterértékek mellett. Ekkor* $a(x)$ *legfeljebb másodfokú,* $b(x)$ *pontosan elsőfokú polinom és* $c(x)$ *állandó. Így alkalmas lineáris helyettesítéssel* (1.1) *egyenlet*

$$Qy'' + xy' = \lambda y \tag{2.1}$$

alakra hozható, hol

$$Q = ax^2 + bx + c \tag{2.2}$$

legfeljebb másodfokú polinom és ha van — pontosan n-edfokú — polinommegoldás, akkor a hozzátartozó λ *érték*

$$\lambda_n = n\cdot(n-1)a + n. \qquad (n \geqq 2) \tag{2.3}$$

BIZONYÍTÁS. p_0-t behelyettesítve (1.1) egyenletbe, kapjuk

$$c(x)p_0 = \lambda_0 p_0$$

Ebből $c(x) = \lambda_0$. Behelyettesítve p_1-et

$$b(x)p_1' + \lambda_0 p_1 = \lambda_1 p_1$$

lesz, melyből

$$b(x) = \frac{1}{p_1'}(\lambda_1 - \lambda_0)p_1$$

ami pontosan elsőfokú polinom, mivel $\lambda_0 \neq \lambda_1$.

Végül p_2 behelyettesítve és $b(x)$, $c(x)$ helyébe a már meghatározott értékeket téve

$$a(x)p_2'' + \frac{1}{p_1'}(\lambda_1 - \lambda_0)p_1 p_2' + \lambda_0 p_2 = \lambda_2 p_2$$

lesz, melyből

$$a(x) = \frac{1}{p_2''}\left\{(\lambda_2 - \lambda_0)p_2 - \frac{1}{p_1'}(\lambda_1 - \lambda_0)p_1 p_2'\right\}$$

legfejebb másodfokú polinom. $b(x)$ főegyütthatójával végigosztva (1.1) egyenletet, majd $x' = x + \delta$ lineáris helyettesítést alkalmazva és az állandó együtthatókat egybeolvasztva kapjuk (2.1)-et. Hátra van még (2.3) igazolása. Ezt p_n pontosan n-edfokú polinom (2.1)-be helyettesítésével és x^n-hez tartozó együtthatók összehasonlításával kapjuk.

2. LEMMA. *A Jacobi, Laguerre és Hermite polinómok differenciálegyenlete olyan* (2.1) *alakú egyenletbe transzformálható — megfelelő lineáris transzformációval — melyben* $a \geqq 0$ *és* $c < 0$.

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy a megfelelő klasszikus polinómrendszer lineáris transzformációjával elérhető, hogy olyan polinomokba mennek át, melyek Jacobi polinomok esetén a

$$(2.4)\qquad (x^2-1)y''+[(\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta]y'=n(\alpha+\beta+n+1)y \qquad \alpha>-1 \text{ és } \beta>-1$$

differenciálegyenletet; Laguerre polinomok esetén a

$$(2.5)\qquad -xy''+(x-\alpha-1)y'=ny \qquad \alpha>-1$$

differenciálegyenletet; végül Hermite polinomoknál a

$$(2.6)\qquad -y''+2xy'=2ny$$

differenciálegyenletet elégitsék ki. (Pl. Jacobi polinomokra ez az a lineáris transzformáció, mely az ortogonalitási intervallumát a szokásos $(-1, +1)$ intervallumba viszi át.)

Elegendő a bizonyitást tehát ezekre elvégezni. Végrehajtva (2.4) egyenletben

$$x=\frac{1}{\alpha+\beta+2}x'+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}$$

helyettesitést; (2.5) egyenletben

$$x=x'+\alpha+1$$

és (2.6) egyenletben

$$x=\frac{1}{2}x'$$

helyettesitést, közvetlenül belátható a lemma állitása.

3. Rátérünk a célul kitűzütt probléma megoldására, annak bizonyitására, hogy az eddig tárgyalt három klasszikus polinomrendszeren kívül nincsen más ortogonális polinomrendszer megoldása az (1.1) differenciálegyenletnek.

Nyilván elegendő lesz ehhez azt megmutatni, hogy ha van *ortogonális* $\{p_n\}$ megoldásrendszer, akkor 1. és 2. lemma feltételei is teljesülnek (1.1) egyenletben.

1. TÉTEL. *Az ortogonális polinomrendszerek közül a klasszikus polinomrendszerekhez és csakis ezekhez rendelhető* (1.1) *alakú differenciálegyenlet, oly módon, hogy a polinomrendszer minden tagja megoldása legyen ugyanazon differenciálegyenletnek, különböző λ értékek mellett.*

E tétel helyett, egy nálánál *erősebb* tételt fogunk bizonyitani.

2. TÉTEL. *Legyen $p_0, p_1, \ldots, p_n$ pontosan nulla, első, ..., n-edfokú polinom. Legyenek továbbá ezen $\{p_n\}$ rendszer nullahelyei különbözők, valósak és szétválasztottak. Ez utóbbi azt jelentse, hogy — jelölve p_n k-ik nullahelyét*

α_{nk}*-val* —

(3. 1) $$\alpha_{n+1,1} < \alpha_{n,1} < \alpha_{n-1,2} < \alpha_{n,2} < \ldots < \alpha_{nn} < \alpha_{n+1,n+1}$$

álljon fenn.

Ekkor, ha $\{p_n\}$ *rendszer minden egyes tagja megoldása* (1. 1) *differenciálegyenletnek megfelelő* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *paraméterérték mellett, akkor* p_n *rendszer csak a három klasszikus polinomrendszer egyike lehet.*

BIZONYÍTÁS. Figyelembe véve 1. és 2. lemmát, elegendő lesz azt bizonyítani, hogy a megfelelő tulajdonságú $\{p_n\}$ rendszer olyan (2. 1) alakú differenciálegyenletet elégít ki, melyben $a \geqq 0$ és $c < 0$.

Először $a \geqq 0$ feltételt bizonyítjuk. $c < 0$ ebből közvetlenül következik majd.

A (2. 1) egyenlet

(2. 1)'' $$a(x)y'' + b(x)y' = \lambda c(x)y$$

alakú differenciálegyenlet. Ha $a(x), b(x)$ és $c(x)$ együtthatókat úgy akarjuk meghatározni, hogy adott $p_1 = x + a_{10}$, $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x^k$ ($a_{nn} = 1$) és $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+d} a_{n+1,k} x^k$ ($a_{n+1,n+1} = 1$) 1-főegyütthatós polinomok, megoldásai legyenek (2. 1'')-nek, úgy járhatunk el, hogy az *adott* p_1, p_n és p_{n+1} függvényeket (2. 1'')-be rendre behelyettesítjük és az így $a(x), b(x)$ és $c(x)$-re kapott homogén lineáris egyenletrendszert megoldjuk. Ennek — mint ismeretes — akkor és csak akkor van triviálistól külömböző megoldása, ha

(3.2) $$D(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_1 p_1 \\ p_n'' & p_n' & -\lambda_n p_n \\ p_{n+1}'' & p_{n+1}' & -\lambda_{n+1} p_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

Mivel (2. 1) is (2. 1'') típusba tartozik, így (2. 1) megoldására is fennáll (3.2).

A szereplő polinómok mindegyikére *ugyanazt* az $x' = x + \delta$ alakú helyettesítést végrehajtva, nem fog megváltozni a nullahelyek száma és kölcsönös helyzete, pusztán az egész „gyökrendszer" fog δ-val eltolódni. Továbbá mivel λ_n pusztán a és n függvénye és ez utóbbiak ilyen helyettesítésre invariánsok, így λ_n értéke is változatlan marad a helyettesítés végrehajtása után.

Az említett helyettesítéssel — $\delta = -\alpha_{n+1,1}$ választással — elérhető, hogy p_{n+1} első nullahelye

(3. 3) $$\alpha_{n+1,1} = 0$$

legyen. Ekkor

$$D(\alpha_{n+1,1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_1 a_{10} \\ 2a_{n2} & a_{n1} & -\lambda_n a_{n0} \\ 2a_{n+1,2} & a_{n+1,1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebből*

$$\lambda_n = \frac{a_{10}}{a_{n+1,2}\cdot a_{n0}}\,(a_{n1}a_{n+1,2} - a_{n2}a_{n+1,1}). \tag{3.4}$$

Tekintettel arra, hogy (2.3) kifejezésből következik, hogy $a \geqq 0$ ekvivalens $\lambda_n > 0$ (ha $n \geqq 2$) feltétellel, csak azt kell bebizonyítanunk, hogy (3.4) kifejezés pozitív.

Célszerű lesz a_{nk} együtthatókat gyöktényezős alakban felírni. Ismeretes, hogy a_{nk} felírható mint p_n gyökeinek $(n-k)$-ad osztályú kombinációinak öszszege; pozitív vagy negatív előjellel aszerint, hogy $n+k$ páros vagy páratlan szám. Ezt így fogjuk jelölni:

$$a_{nk} = (-1)^{n+k} \sum_{\binom{n}{n+k}} \overbrace{\alpha_{n1}\ldots\alpha_{nn}}^{n\ k}$$

Mivel — tekintettel (3.1) és (3.3)-ra — esetünkben minden α_{nk} nullahely pozitív, így a_{nk} előjele pusztán $n+k$ párosságától függ. Így (3.4) jobboldalának első tényezője biztosan pozitív, mert $a_{n+1,2}a_{n0} < 0$ (mivel $n+1+2$ és $n+0$ párossága különböző) és $a_{10} < 0$, mert az indexösszeg páratlan.

Ezért elegendő a második tényező vizsgálata, mely gyökös alakban felírva (figyelembe véve már az előjeleket is és azt, hogy $\alpha_{n+1,1} = 0$)

$$\sum_{\binom{n}{n-1}} \overbrace{\alpha_{n1}\ldots\alpha_{nn}}^{n-1} \cdot \sum_{\binom{n}{n-1}} \overbrace{\alpha_{n+1,2}\ldots\alpha_{n+1,n+1}}^{n-1} - \alpha_{n+1,2}\ldots\alpha_{n+1,n+1}\cdot \sum_{\binom{n}{n-2}} \overbrace{\alpha_{n1}\ldots\alpha_{nn}}^{n-2}. \tag{3.5}$$

Így látható be, hogy (3.5) pozitív:

Jelöljük I-gyel a pozitív előjelű tagokat és II-vel a negatívokat. Megfeleltetést létesítünk II és I tagjai között a következőképpen: Felírjuk p_n és p_{n+1} szereplő nullahelyeit:

$$\alpha_{n1},\ldots,\alpha_{nn},\alpha_{n+1,2},\ldots,\alpha_{n+1,n+1}. \tag{3.6}$$

Ebből II valamely tagját megkapjuk, ha töröljük α_{nk} és α_{ni} elemeket $(k < i)$ és a maradék tagok szorzatát képezzük. Rendeljük hozzá II ezen tagjához I-ből azt a tagot, mely (3.6)-ból α_{nk} és $\alpha_{n+1,i}$ $(i \neq 1)$ törlésével és a megmaradt tagok összeszorzásával keletkezett.

Figyelembe véve (3.1) egyenlőtlenség sorozatot, $\alpha_{nk} > \alpha_{n+1,k}$ miatt, az egymásnak megfelelő tagok közül, a pozitív előjelű a nagyobb abszolút értékű. Így (3.5) valóban pozitív.

* $D(\alpha_{n+1,1})$ determinánsból látható, hogy $\lambda_1 = 0$ feltételezve $\lambda_n a_{n0} a_{n+1,2} = 0$ lenne, ami α_{nk} gyökök pozitív volta miatt $\lambda_n = 0$ egyenlőségre vezet, ami lehetetlen. Így feltételezhetjük, hogy $\lambda_1 = 1$.

Ezzel $\lambda_n > 0$ és a vele ekvivalens $a \geqq 0$ bizonyítását befejeztük.

Végül $c < 0$ bizonyítása a következő:

(2. 1) egyenletnek $\lambda_1 = 1$ paraméterérték melletti elsőfokú megoldása: $p_1 = x$. Behelyettesítve $p_2 = x^2 + \beta x + \gamma$ megoldást (2. 1) egyenletbe és az állandó tagokat mindkét oldalon egyenlővé téve lesz

$$2c = \lambda_2 \gamma$$

Így $\lambda_2 > 0$ miatt $\operatorname{sgn} c = \operatorname{sgn} \gamma$. Viszont $\gamma < 0$, ami úgy látható be, hogy p_1 nullahelye, $(x = 0)$ *szétválasztja* p_2 nullahelyeit és ez csak $\beta^2 < \beta^2 - 4\gamma$ esetén lehetséges.

4. A bebizonyított tételek követkzeményeképpen, eljárási módot adunk meg annak megállapítására, hogy (1. 1) differenciálegyenletnek mikor van ortogonális polinomrendszer megoldása és melyek ennek jellemző adatai.

I. Szükséges, hogy a differenciálegyenlet

$$Qy'' + Ly' = \lambda y \tag{4.1}$$

alakú legyen, hol Q legfeljebb másodfokú és L pontosan elsőfokú polinóm.

II. (4. 1) alakú differenciálegyenlet akkor és csak akkor vihető át lineáris művelettel olyan (2. 1) egyenletbe, melyben $a \geqq 0$ és $c < 0$, ha a következő három típus egyikébe tartozik. Ezek:

a) Q másodfokú és két különböző valós gyöke van, olyan, melyet L nullahelye *szétválaszt*.

b) Q elsőfokú és *vagy* L nullahelye megelőzi Q nullahelyét, ha Q és L főegyütthajtójának előjele megegyezik; *vagy* Q nullahelye előzi meg L nullahelyét, ha Q és L főegyütthajtójának előjele különböző. Az első esetben — α-val jelölve Q nullahelyét — az ortogonalitási intervallum $(\alpha, -\infty)$; a második esetben pedig $(\alpha, +\infty)$.

c) Q állandó és előjele különbözik L főegyütthatójától. Ekkor az ortogonalitási intervallum $(+\infty, -\infty)$.

MEGJEGYZÉS. A tárgyalt tétellel kapcsolatban FREI TAMÁS és FREUD GÉZA felvetették. Lehetnek-e a klasszikus polinómok több súlyfüggvénnyel és több intervallumban ortogonálisok? *Véges intervallumban* (tehát a Jacobi polinómok) *nem*. Ez könnyen belátható, egyrészt abból, hogy a polinómrendszer nullahelyei az ortogonalitási intervallum belsejében mindenütt sűrűn helyezkednek el; másrészt abból, hogy az ortogonalitási intervallum és a polinómrendszer egyértelműen meghatározza a súlyfüggvény nyomatékait (konstans szorzó erejéig). Az előbbiből az ortogonalitási intervallum, utóbbiból a súlyfüggvény unicitása következik.

Célszerű lenne ezeket végtelen intervallum esetén is belátni.*

*A kérdésre adott válasz a kérdést feltevőkkel kialakult megbeszélés eredménye.