RIESZ FRIGYES 1880—1956

A magyar tudományos életet nagy gyász érte 1956. február 28-án: hosszas betegség után, 76 éves korában elhunyt RIESZ FRIGYES akadémikus. Gyászunkban a külföld tudományos világa is osztozik, hiszen RIESZ FRIGYES nemcsak a magyar matematikusok mélyen tisztelt és szeretett mestere volt, a magyar tudományos élet egyik legnagyobb büszkesége, hanem korunk egyik legnagyobb tudósa, akinek korszakalkotó tudományos eredményei az emberiség közkincsévé váltak s akinek nevét mindenütt a világon a legnagyobbaké között tartották számon.

RIESZ FRIGYES 1880. január 22-én született Győrött. Miután egyetemi tanulmányait a budapesti, zürichi és göttingai egyetemeken elvégezte, Lőcsén és Budapesten volt középiskolai tanár. 1911-ben a kolozsvári egyetem helyettes tanárnak hívta meg, 1914-ben ugyanott rendes tanár lett. A világháború után egyetemi tanári működését Szegeden folytatta. Bár akkor már világszerte ismert, vezető tudós volt, akit bizonyára szívesen fogadtak volna nem egy nagy külföldi egyetemen, nem ment külföldre, hanem inkább vállalta az újonnan felállított szegedi egyetemen való munkát, ami évekig kedvezőtlen munkakörülményeket, a könyvtár és folyóirattár hiányát jelentették számára. Hála RIESZ FRIGYES és tanártársa, HAAR ALFRÉD nagy tudományos tekintélyének és energikus munkájának, a szegedi egyetem matematikai intézete néhány éven belül igen megerősödött, ismert matematikai kutatócentrummá vált, amelyet mint magyar Göttingát kezdtek emlegetni külföldön is. Már 1922-ben megindították HAAR-ral együtt Szegeden az „Acta Scientiarum Mathematicarum" folyóiratot, amely jelentős szerepet játszott a magyar matematika nemzetközi tekintélyének a megalapozásában. A Magyar Tudományos Akadémia RIESZ FRIGYESt 1916-ban levelező, 1936-ban rendes tagjának választotta. Az 1925 26. tanévben a szegedi egyetem rektora volt. A második világháború végén Szegeden várta meg a felszabadulást s az elsők közt kezdte meg, 1944 novemberében, az egyetemen újra megindított munkát, sőt 1945 tavaszán ismét elvállalta az egyetem rektorának akkor különösen felelősségteljes és sok bölcsességet kívánó tisztét. 1945 végén a budapesti egyetem meghívta tanárai közé, így életének utolsó 10 évét Budapesten töltötte. Egymás után érték a tudományos kitüntetések: 1945-ben a Tudományos Akadémia nagydíját (ami akkor jelképes „díj" volt) neki ítélték oda, 1949-ben Kossuth-díjjal, 1953-ban a Kossuth-nagydíjjal tüntették ki, a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának elnöke, majd tiszteletbeli elnöke, a Bolyai János Matematikai Társulatnak díszelnöke lett, a párizsi Tudományos Akadémia levelező tagjává, a müncheni Bajor Tudományos Akadémia és a lundi Svéd Királyi Fiziográfiai Társaság külső tagjává választotta. A szegedi, budapesti és párizsi egyetemek díszdoktorukká választották. 1950-ben, 70-edik születésnapján, együtt ünnepelte őt a tudományos világ. A Szovjet Tudományos Akadémia díszes levélben köszöntötte s ebben az egész világ matematikusainak egyöntetű véleményét fejezte ki, amikor megállapította: „kétségtelen, hogy Ön egyike a matematikai gondolkodás legnagyobb élő mestereinek".

RIESZ FRIGYES nevével kapcsolatban a legismertebb az ún. Riesz-Fischer-tétel, amelyet egymástól függetlenül talált RIESZ FRIGYES és ERNST FISCHER német matematikus. Mintkettőjük közleménye a párisi akadémia Comptes Rendus-jében jelent meg 1907-ben, RIESZé két hónappal megelőzve a FISCHERét.

Ez a tétel a Fourier-sorokra, vagy általánosabban valamely tetszőleges teljes ortogonális függvényrendszer szerinti sorfejtésre érvényes klasszikus, ún. *Parseval-féle tételnek* a megfordítása. Utóbbi azt mondja ki, hogy ha $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ az (a, b) közön értelmezett függvényeknek egy teljes, normált, ortogonális rendszere, akkor bármely négyzetesen integrálható $f(x)$ függvénynek e rendszer szerinti $f(x) \sim \sum c_k \varphi_k(x)$ sorfejtésében fellépő $c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x)\, dx$

együtthatók, az ún. általánosított Fourier-együtthatók, négyzetösszege véges és egyenlő $f(x)$ négyzetintegráljával:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum c_k^2.$$

A Riesz-Fischer-tétel azt állítja, hogy fordítva, ha bármiképpen is adunk meg végtelen sok c_k számot úgy, hogy négyzetösszegük véges legyen, létezik egy — és lényegében csakis egy — olyan négyzetesen integrálható függvény, amelynek ezek az adott ortogonális rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói. Meg kell azonnal jegyeznünk, hogy az integrálhatóságot a Lebesgue-féle modern értelemben kell itt érteni; a klasszikus integrálfogalmakra szorítkozva, a tétel nem lenne érvényes. A „lényegében csak egy" kitétel azt jelenti, hogy a feladat megoldásait adó függvények egymástól csak nullamértékű halmazokon különbözhetnek.

E tétel fontossága abban áll, hogy megvilágította a Lebesgue szerint négyzetesen integrálható függvények nevezetes osztályának, az ún. L_2 osztálynak belső, hogy úgy mondjuk, geometriai szerkezetét. Ha a lényegében nem különböző függvényeket ebben az osztályban azonosaknak tekintjük, egy függvény „hosszúságát", vagy „normáját" az $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$, két függvény „belső szorzatát" pedig az $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ képlettel értelmezzük, akkor az L_2 függvényosztály nem csupán hasonlatos lesz a közönséges vektortérhez, hanem a Riesz-Fischer-tétel szerint azonos szerkezetű, „izomorf" lesz a végtelen dimenziós, ún. Hilbert-féle vektortérrel; utóbbinak elemei azok a végtelen sok komponensű $X = (c_1, c_2, \ldots)$ „vektorok", amelyek komponenseinek a négyzetösszege véges és ahol a normát és belső szorzatot a közönséges vektortér közvetlen analógiájára az

$$\|X\| = \sqrt{\sum_k c_k^2}, \qquad (X, Y) = \sum_k c_k d_k$$

képleteket értelmezzük.

Minden jogunk megvan tehát arra, hogy az L_2 függvényosztályt magát is mint egy geometriai objektumot: *függvényteret* tekintsük. E függvénytér és a Hilbert-féle vektortér közös tulajdonságaiból való elvonással alakult ki az *absztrakt Hilbert-tér* fogalma, az újabb matematika egyik leghasznosabb fogalom alkotása, amely absztrakt jellege ellenére ma már nemcsak a matematikusoknak, hanem a — kvantum-mechanikában való alapvető szerepe miatt — a fizikusoknak is mindennapi kenyerévé vált. Egyébként a kvantumelmélet eredeti — látszólag eltérő — két alakjának, a Schrödinger-féle hullámmechanikának és a Heisenberg-féle matrixmechanikának az ekvivalenciáját is éppen a Riesz-Fischer-féle tétel magyarázza meg.

RIESZ FRIGYEStől származik az L_p függvénytér fogalma is, amelynek definíciójában a kettes kitevő szerepét tetszőleges $p > 1$ kitevő veszi át; e térben a normát az $\|f\| = \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$ képlet értelmezi. A belső szorzat definíciója az L_p térre $p \neq 2$ esetében már nem vihető át, mert az L_p-be tartozó két függvény szorzata általában nem integrálható. Ezzel szemben — mint a sorokra vonatkozó Hölder-féle egyenlőtlenségnek RIESZ által integrálokra talált megfelelőjéből következik — mindig integrálható a szorzata két olyan függvénynek, f-nek és g-nek, amelyek közül f az L_p, g pedig az L_q térbe tartozik, ahol a p és q kitevőket az $1/p + 1/q = 1$ egyenlet kapcsolja össze, továbbá

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Sőt RIESZ ennek a fordítottját is bebizonyította: Ha valamely $g(x)$ függvénynek az L_p osztályba tartozó *bármely* $f(x)$ függvénnyel való szorzata integrálható, akkor $g(x)$ beletartozik a kapcsolt L_q térbe. Ha egy ilyen $g(x)$ függvényt rögzítünk, akkor az

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

szorzatintegrál az L_p térben *lineáris függvényoperáció,* azaz ha az integrálnak az értékét, mint az f függvény függvényét Af-el jelöljük, akkor $A(cf) = cAf$ bármely c számra, $(Af_1 + f_2) = Af_1 + Af_2$ és létezik olyan, az f-től független M szám (pl. a g normája), amelyre $|Af| \leqq M\|f\|$. RIESZnek sikerült megmutatnia, hogy ezek a tulajdonságok jellemzőek is, azaz hogy nincs az L_p térben értelmezett más lineáris függvényoperáció, mint amelyeket a kapcsolt L_q tér egyes rögzített $g(x)$ elemei a mondott értelemben származtatnak.

Minthogy a $p = q$ egyenlőség csupán a $p = 2$ esetében áll fenn, mindez rávilágít az L_2 tér különleges helyzetére: ez az egyetlen a tekintett terek közül, amelyik azonos a vele kapcsolt térrel.

Egy további, az L_p függvénytérre vonatkozó nevezetes eredménye RIESZnek az általánosított „momentumprobléma" megoldása. A probléma: meghatározni a $\varphi(x)$ függvényt véges, vagy végtelen sok adott $f_k(x)$ függvénnyel való szorzatintegráljának ismeretéből, azaz megoldani az

$$\int_a^b f_k(x)\varphi(x)\,dx = c_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

integrál-egyenletrendszert. Ha $f_k(x) = x^k$, akkor az integrál a $\varphi(x)$ közönséges értelemben vett k-adik momentuma. Ha az $f_k(x)$ függvények ortogonális rendszert alkotnak, akkor a probléma ugyanaz, mint amire az L_2 tér esetében a Riesz-Fischer-tétel vonatkozik: meghatározni a függvényt az adott ortogonális rendszerben való Fourier-együtthatóiból. — RIESZ megmutatta, hogy ha az adott $f_k(x)$ függvények az L_p térbe tartoznak, az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van az L_q térbe tartozó olyan $\varphi(x)$ megoldása, amelyre $\|\varphi\|_q \leqq M$, ha

$$\left|\sum \mu_k c_k\right| \leqq M \left\|\sum \mu_k f_k\right\|_p$$

tetszés szerinti μ_k együtthatók esetében. A norma jele mellé illesztett mutató jelzi, hogy egyik esetben az L_q, a másikban az L_p térben érvényes normáról van szó.

Az L_p függvénytérhez sokban hasonló tulajdonságú az az ugyancsak RIESZ által bevezetett, manapság l_p-vel jelölt tér is, amelyet az olyan végtelen sok komponensű $X = (c_1, c_2, \ldots)$ vektorok alkotnak, amelyekre a $\sum\limits_k |c_k|^p$ sora véges összegű; itt X normáját az ebből az összegből vont p-edik gyök értelmezi. E vektorterekre vonatkozó eredményeit RIESZ a párizsi Borel-gyüjteményben 1913-ban megjelent *„Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues"* című könyvében fejtette ki.

Míg a $p = 2$ esetben a Parseval-féle és a Riesz-Fischer-féle tétel alapján a függvénytér és sorozattér lényegében azonos, ti. minden teljes, normált, ortogonális függvényrendszer a két tér egymásra való lineáris és hosszúságtartó leképezését származtatja, addig a $p \neq 2$ esetben ilyen szoros kapcsolat nem áll fenn. YOUNG és HAUSDORFF a közönséges Fourier sorra, RIESZ pedig tetszőleges korlátos ortogonális függvényrendszer esetére kimutatta, hogy a függvény és Fourier-együtthatói közt a $p = 2$ esetben fennálló Parseval-egyenlőség szerepét a $p \neq 2$ esetben bizonyos egyenlőtlenségek veszik át.

RIESZnek a függvény- és sorozatterekre vonatkozó eszméi, módszerei és eredményei felmérhetetlenül nagy és még távolról sem lezárt hatással voltak a a modern függvényanalízisre. Maga RIESZ, miközben e terekre vonatkozó vizsgálati módszereit kidolgozta, máris tovább tekintett. Erre utal az integrálható függvények rendszereiről szóló, a „Mathematische Annalen"-ben 1910-ben megjelent nagy dolgozatának előszavában az a megjegyzése, hogy e konkrét függvényterek vizsgálata használható alapot nyújt a függvényterek axiomatikus elmélete számára.

Valóban ezen az úton alakult ki, RIESZen kívül főleg HAHN, HELLY és BANACH munkája nyomán az általános lineáris metrikus terek, az un. *Banach-terek* fogalma és elmélete, a modern analízis egyik leghasznosabb fogalomalkotása. E terek fogalma általánosabb a Hilbert-terénél; utóbbit hasonló tulajdonság tünteti ki, mint amely az L_2 függvényteret kitünteti a többi L_p tér közül.

A fentieken kívül még egy másik nevezetes konkrét függvénytérre vonatkozólag is vannak RIESZnek fontos eredményei. Ez a tér az (a, b) közön értelmezett *folytonos függvények tere*; itt a normát az

$$\|f\| = \max_{(a,\, b)} |f(x)|,$$

képlet értelmezi. RIESZnek sikerült 1909-ben, HADAMARD egy tételének kiegészítéseképpen megmutatnia, hogy az ebben a térben értelmezett lineáris operációk általános alakja a következő:

$$Af = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

ahol $\alpha(x)$ egy az operáció által lényegében egyértelműen meghatározott korlátos változású függvény, az integrált pedig a Stieltjes-féle értelemben kell venni. Ezt az integrálfogalmat még a múlt század végén STIELTJES vezette be a lánctörtekre vonatkozó vizsgálataiban, de KÖNIG GYULA már előbb is használta előadásaiban. Azonban ennek az integrálfogalomnak — amely egyébként nem más mint a fizikában addig is többé-kevésbé heurisztikus módon használt, általános tömegelosztás szerinti integrál pontos matematikai megfogalmazása — a matematikai analízisben való hasznos szerepére igazán csak RIESZ e tételével kapcsolatban terelődött rá a közfigyelem. RIESZ tételétől indíttatva, LEBESGUEnek hamarosan sikerült a Stieltjes-féle integrálfogalmat olyan mértékben általánosítania, mint előbb a klasszikus Cauchy—Riemann-féle integrálfogalmat.

Szólnunk kell RIESZnek a *Lebesgue-féle integrállal* kapcsolatos szerepéről is. A modern analízis e korszakalkotó teóriája századunk elején keletkezett. Bár RIEMANN, JORDAN, PEANO és BOREL eszméi már előkészítették az útját LEBESGUE e nagy újításának, eleinte az analízis művelőinek a többsége bizonyos bizalmatlansággal tekintett rá. Jellemző, hogy LEBESGUEnek a párisi Comptes Rendusben 1901-ben megjelent első közleményét a „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ mindössze 3 sorban ismertette.

RIESZ az elsők közt volt, aki felismerte az új integrálfogalom jelentőségét és éppen a Riesz-Fischer-tétel által rövidesen maga szolgáltatta az új fogalom erejének egyik ékes bizonyítékát. De felismerte azt is, hogy a Lebesgue-féle elmélettel szemben megnyilvánult bizonyos idegenkedés onnan eredhet, hogy LEBESGUEnél az integrál értelmezését megelőzi a mérhető halmazok fogalma és eléggé bonyolult elmélete. Olyan, elemibbnek tekinthető felépítésmódot tűzött ki RIESZ célul maga elé, amely a mértékelmélet nélkül, közvetlenül jut el az integrálhoz.

Sikerült is már 1912-ben egy olyan felépítést megadnia, melyet később részletesen az „Acta Mathematica“-ban fejtett ki. Ebben az integrálható függvények úgy jelennek meg, mint bizonyos egyszerű függvények, ti. a szakaszonként állandó függvények majdnem mindenütt konvergens sorozatainak a határértékei. Az általános mértékelmélet helyett csupán a nullamértékű halmazok fogalmára és elemi tulajdonságaira támaszkodik; ezek azonban alig vesznek egy-két sort igénybe. Később ezt a felépítésmódot is lényegesen tovább egyszerűsítette annak az észrevételnek az alapján, hogy a szakaszonként állandó függvények tetszés szerinti sorozatai helyett elegendő a monoton sorozatokat tekinteni.

LEBESGUE elméletében a differenciálásra vonatkozó tételek az integrálásra vonatkozóak után következnek, mint azok következményei. Így LEBESGUEnek az a nevezetes tétele, hogy *minden monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható,* LEBESGUEnek az integrációról 1904-ben írt alapvető könyvében csaknem az utolsó oldalon kerül szóba, mint az egész elmélet egyik utolsó következménye. RIESZnek sikerült 1932-ben erre a tételre egy közvetlen, egyszerűségben és eleganciában felülmúlhatatlan bizonyítást adnia. Ezzel együtt egy sereg egyéb fontos probléma felé nyílt egyszerűbb, közvetlen új út, sőt lehetségessé vált az is, hogy a klasszikus integrálfogalomhoz hasonlóan a Lebesgue-féle integrál is mint a differenciálás műveletének a megfordítása tárgyaltassék.

Térjünk vissza a folytonos függvények terében értelmezett lineáris operációknak RIESZ által talált előállítására egy Stieltjes-integrállal. Ennek alapján a korlátos változású függvények elemzése egyszersmind elemzése a lineáris operációknak is. Példál az a klasszikus tétel, hogy minden korlátos változású függvény két monoton növekvő függvény különbségeként állítható elő, egyszersmind az általános lineáris függvényoperációnak két pozitív lineáris függvényoperáció különbségeként való előállíthatóságát mondja ki. A korlátos változású függvény kanonikus felbontásának egy teljesen folytonos, egy folytonos és majdnem mindenütt 0 differenciálhányadossal bíró, végül egy tiszta ugró-függvény összegére, megfelel az általános lineáris operációnak három részre való felbontása, melyet ezen az alapon FRÉCHET tanulmányozott.

RIESZ az 1928. évi bolognai nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadásában rámutatott arra, hogy a folytonos függvények lineáris operációinak szóban forgó részei jellemezhetők és előállíthatók a Stieltjes-integrállal való előállítás felhasználása *nélkül* is. Módszere a *majoráns operáció* fogalmára támaszkodik. Alaptétele: *lineáris operációk bármely majorálható halmazának mindig van egy legkisebb majoránsa.* Módszerének megvan az a nagy előnye, hogy teljesen általános, úgyhogy nemcsak a folytonos függvények, hanem tetszőleges absztrakt halmazokon értelmezett függvények lineáris operációira is alkalmazható.

Abban a nagy dolgozatában, amellyel 1937-ben akadémiánkon mint rendes tag székét elfoglalta, ezeket a gondolatait fejti ki és fejleszti tovább. Még általánosabb feltevésekből indul ki, nem elégszik meg azzal, hogy a folytonos függvényeket általánosabb függvényosztállyal helyettesíti, hanem maguknak a függvényeknek a szerepét adja át absztrakt elemeknek és a függvényosztályét ezen elemek összességének, melyet csupán néhány, az elemek összeadását illető feltevéssel jellemez. E dolgozat francia nyelvű változatát később a princetoni „Annals of Mathematics", majd ennek orosz nyelvre való fordítását a moszkvai „Uszpehi·Mat. Nauk" folyóiratok közölték. RIESZ e gondolatainak igen nagy hatása mutatkozik meg az irodalomban, kiindulópontjául szolgáltak az ún. *félig rendezett lineáris terekre* vonatkozó széleskörű vizsgálatoknak.

RIESZ munkásságának egy további fontos területe, amely azonban az eddig ismertetettekkel szoros kapcsolatban van, az *integrálegyenletekre* és általánosabban a *lineáris transzformációkra*, vagy más szóval: *operátorokra* vonatkozik. Számos matematikai és matematikai-fizikai probléma vezet integrálegyenlethez; a legfontosabbaknak ezek közül a következő az alakjuk:

$$f(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy=g(x),$$

ahol a $g(x)$ és a $K(x,y)$ ún. *magfüggvény* adva van, λ egy paraméter és az $f(x)$-et keressük. Az ilyen típusú egyenletekre — folytonos függvények esetében — FREDHOLM által e század elején kidolgozott elméletnek, bármenynyire hatalmas teljesítmény volt is, megvolt az a hátránya, hogy olyan segédeszközökkel dolgozott — komplikált felépítésű függvénydeterminánsokkal —, amelyek egyes részleteiben nehézkessé tették és az általánosításoknak útját állták.

RIESZnek sikerült 1916-ban egészen elemi, inkább geometriai jellegű módszert találnia, amely ugyancsak elvezet a Fredholm-féle tételekhez, de amely sokkal általánosabb feltevések mellett is használható. Nevezetesen, alkalmazható ez a módszer bármely metrikus lineáris térben adott

$$f-\lambda Tf=g$$

egyenletre, ahol a g a tér egy adott, f a keresett eleme, T pedig a térnek egy önmagába való lineáris és teljesen folytonos („vollstetig") leképezése. Egy *transzformációt* akkor mondunk lineárisnak, ha teljesülnek rá a $T(cf)=cTf$, $T(f_1+f_2)=Tf_1+Tf_2$, $\|Tf\|\leq M\|f\|$ feltételek, amelyek hasonlóak a lineáris operációkat jellemző feltételekhez, a különbség csupán az, hogy míg az operáció értéke mindig *szám*, addig a transzformáció értéke maga is a tér *eleme*. A transzformációt RIESZ szerint akkor mondjuk „teljesen folytonosnak", ha a tér bármely *korlátos* halmazát *kompakt* halmazba viszi át.

A Fredholm-féle tételeknek még egy másik bizonyítása is származik RIESZtől, amelyet 1913-ban megjelent, már említett künyvében vázolt fel. Ott csak a Hilbert-féle vektortérrel dolgozik ugyan, de módszere szintén alkalmazható tetszőleges metrikus lineáris tér esetére is. E módszer inkább függvénytani jellegű; az $[I-\lambda T]^{-1}$ „rezolvens“ transzformációnak, mint a λ komplex paraméter analitikus függvényének a szingularitásait, a T „spektrumát“, a közönséges reziduumszámításhoz hasonló eljárással vizsgálja. Bár e módszer a T transzformáció spektrumának szétbontására akkor is sikerrel alkalmazható, ha T nem teljesen folytonos, hosszú ideig némileg elkerülte a figyelmet. Később, a 30-as évek vége óta, azonban az érdeklődés előterébe került és alapvető szerepet játszik az ún. „normált gyűrűk“, vagy más szóval „Banach-algebrák“ I. M. GELFAND által felállított fontos elméletében, valamint LORCHnak, DUNFORDnak és másoknak az általános lineáris transzformációk spektrumára vonatkozó újabb kutatásaiban.

Az integrálegyenleteknek nevezetes és a fizikai alkalmazásokban is leggyakrabban előforduló esete az, amikor a $K(x, y)$ „magfüggvény“ a két változó *szimmetrikus* függvénye. Ha a magfüggvény folytonos, vagy legalábbis négyzetesen integrálható, akkor ezeknek az integrálegyenleteknek a problémája egy tetszőlegesen választott teljes ortogonális függvényrendszer közvetítésével átvihető a Hilbert-féle vektortér szimmetrikus mátrixú $Y = AX$ lineáris transzformációinak, ill. a hozzájuk rendelt $(AX, X) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$ négyzetes alakoknak a problémájába. Véges sok változó négyzetes alakjaira tudvalevőleg alapvető fontosságú tény az, hogy ezek *főtengelyre transzformálhatók*, azaz hogy egy $Z = UX$ ortogonális helyettesítéssel az $(AX, X) = \Sigma \lambda_i z_i^2$ alakra hozhatók. HILBERT kimutatta, hogy analog előállítás a végtelen sok változós esetben is megadható, mégpedig nemcsak azokban az aránylag egyszerű esetekben, amelyekhez az integrálegyenletek vezetnek, hanem tetszés szerinti olyan (AX, X) négyzetes alak esetében, amely az $\|X\| \leqq 1$ egységgömbön korlátos: $|(AX, X)| \leqq M$. Csakhogy a jobboldalon a véges összeg helyébe általában kétféle végtelen algoritmus lép: egy végtelen sor és egy folytonos paraméter szerinti integrál. Mint RIESZ megjegyezte, ez a két algoritmus egyesíthető egy Stieltjes-integrál formájában és így a Hilbert-féle felbontás a következő alakú lesz:

$$(AX, X) = \int_{-M}^{M} \lambda \, d(E_\lambda X, X).$$

Itt $E_\lambda X$ az X vektor merőleges vetületét jelenti a Hilbert-tér egy bizonyos L_λ alterére, mely a λ paraméterrel együtt nő.

Ezt az alapvető tételt HILBERT a véges változó esetéből fáradságos határátmenettel bizonyította. RIESZ 1910-ben, egy HILBERThez írott levelében olyan bizonyítást közölt rá, amely a momentumproblémának általa éppen akkor talált megoldására épül fel. Majd könyvében egy újabb, közvetlen bizonyítást adott. Módszerének lényege az, hogy a négyzetes alak helyett magát az A lineáris transzformációt és ennek hatványait tekinti: $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA, \ldots, A^n = AA^{n-1}, \ldots$, ezeket rendre hozzárendeli az $u^0 = 1, u, u^2, \ldots, u^n, \ldots$ hatványfüggvényekhez, majd a hozzárendelést kiterjeszti a polinomokra és határátmenettel általánosabb függvényekre is; a tételben szereplő E_λ vetítés eközben úgy adódik, mint u azon függvényéhez rendelt transzformáció, amely az $u = \lambda$ ponttól balra 1, jobbra pedig 0.

Amikor később, a 20-as évek végén, a kvantummechanika ösztönzésére a Hilbert-tér vizsgálata főleg hazánkfia, NEUMANN JÁNOS kezdeményezésére újabb nagy lendületet vett, és a nem korlátos, azaz az $\|Af\| \leqq M\|f\|$ feltételnek eleget nem tevő transzformációkat is vizsgálat alá vették, a kutatók bőven meríthettek RIESZ könyvének gondolataiból. Az amerikai STONE, az új eredményekről 1932-ben írt hatalmas monográfiájának előszavában ezt írja: „Szeretném hangsúlyozni azt a fontos szerepet, amelyet RIESZ FRIGYES munkássága játszott a nemkorlátos transzformációk sikeres vizsgálatának előkészítésében. Azok a fogalmak, amelyeket RIESZ könyvében kifejtett, új szempontoknak és új módszereknek a bevezetését jelölték ki, amelyek nélkül a haladás bizonyára csak később következett volna be."

De RIESZ nem elégedett meg az új fejlődés iránymutatójának dicsőségével, hanem újabb dolgozataival maga is jelentékeny szerepet játszott ebben a fejlődésben. 1930-ban a szegedi Actában, a Hilbert-térről szóló nagy dolgozatában új bizonyítását adja a *nem-korlátos,* ún. *önadjungált* transzformációk NEUMANN és STONE által kevéssel előbb talált integrálelőállításának. Később LORCH amerikai matematikussal együtt, aki egy évet töltött RIESZnél Szegeden, még két egyszerűbb bizonyítást adott erre a központi fontosságú tételre.

Mindama munkássága alapján, amelyről eddig szó volt, RIESZ FRIGYESt a matematika egy új ágának, az ún. *funkcionálanalízisnek* az egyik megalapítójaként tekintik. Ez a tudományág ma a legnagyobb lendülettel fejlődik, új szempontokkal és módszerekkel gazdagította a matematika egyéb ágait is, s alkalmazási lehetőségei a matematika és a matematikai fizika különböző területeire még távolról sincsenek kimerítve.

Az egyik legérdekesebb, a funkcionálanalízis módszereivel megközelíthető probléma a klasszikus statisztikai mechanika ún. *ergodproblémája.* Amióta NEUMANN JÁNOS és G. D. BIRKHOFF a 30-as évek elején híres tételeikkel e probléma szigorú, matematikai tárgyalásának alapjait lerakták, az „ergodelmélet" állandóan az érdeklődés előterében áll s a mély és jelentős problémák és eredmények egész során át fejlődött. Ezzel az elmélettel RIESZ FRIGYES is behatóan foglalkozott. Az eredetileg nehézkes bizonyításokat új módszerek alkalmazásával lényegesen egyszerűsítette. Érdekes megemlíteni, hogy a Birkhoff-féle, ún. individuális ergodikus tételnek, valamint a HOPF, DUNFORD és MILLER által talált általánosabb tételeknek a bizonyítására RIESZ lényegében ugyanazt az egészen elemi lemmáját használja fel, amellyel annak idején a monoton függvények majdnem mindenütt való differenciálhatóságát sikerült bizonyítania. A Neumann-féle, ún. statisztikus ergodikus tételre, amely az L_2 függvénytér önmagára való *távolságtartó* lineáris leképezéseire vonatkozik, olyan bizonyítást talált, amely az L_p, sőt még általánosabb lineáris terekre és ezek *kontrakcióira*, azaz a távolságot nem növelő lineáris leképezéseire is alkalmazható.

RIESZ FRIGYESnek a valós függvények elméletébe és a funkcionálanalízisbe vágó legjelentősebb eredményeit, valamint azokhoz csatlakozó újabb eredményeket tartalmaz az a könyv, amelyet RIESZ FRIGYES élete alkonyán írt e sorok írójával, tanítványával közösen, *„Leçons d'Analyse Fonctionnelle"* címen. Ez a könyv 1952-ben jelent meg először a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában és azóta világszerte nagy sikert aratott. Az első kiadást két újabb francia nyelvű kiadás követte, kiadták a Szovjetunióban orosz és az Egyesült Államokban angol nyelven, német és kínai nyelvű kiadásai pedig Berlinben, ill. Pekingben most készülnek.

Vessünk tekintetet most RIESZ FRIGYESnek azokra a munkáira, amelyekben nem az *általános* folytonos, vagy integrálható függvényekről van szó, hanem amelyekben szabályosabb, *analitikus, harmonikus* stb. függvényeket vizsgál.

1916-ban akadémiai levelező tagként tartott székfoglaló előadásában egy érdekes szélsőértékfeladatot old meg a komplex sík egységkörében konvergens, *adott tagokkal kezdődő hatványsorokra*, ti. meghatározza ezek közül azt, amelynek az összegfüggvénye az egységkör kerületét a lehető legrövidebb görbére képezi le. Módszerét alkalmazza CARATHÉODORYnak és FEJÉRnek egy másik, ugyancsak az adott tagokkal kezdődő hatványsorokra vonatkozó tételének a bizonyítására is.

RIESZ és FEJÉR együtt találták *a konform leképezés alaptételének* legegyszerűbb bizonyítását, amely azóta a tankönyvirodalomban mint „standard" bizonyítás szerepel. Együttes munkájuk számos értékes egyéb gyümölcse közül ragadjuk ki a következő érdekes tételt: *Ha egy kört konformisan leképezünk egy h hosszúságú görbével határolt tartományra, akkor a kör bármelyik átmérőjének a képe legfeljebb h/2 hosszúságú görbevonal lesz.* — Ennek a tételnek a tekintélyes irodalmi visszhangja támadt, maga RIESZ is visszatért még-egyszer a problémára és a tételt általánosította tetszőleges — valós- vagy komplexértékű — kétváltozós harmonikus függvényekre.

Az 1916. évi stockholmi skandináv matematikai kongresszuson fivérével, RIESZ MARCELlal együtt tartott előadásában az *analitikus függvényeknek a* *kerületi értékeivel* foglalkozott. Ismeretes volt már 1906 óta FATOU klasszikus disszertációjának az a tétele, hogy ha $f(z)$ a komplex sík egy körtartományának a belsejében holomorf és korlátos függvény, akkor a kör kerületének majdnem minden pontjában létezik a függvény határértéke. A RIESZ-fivérek ugyanezt a kör helyett tetszés szerinti rektifikálható görbe által határolt tartományra is kimutatták, sőt azt is bebizonyították, hogy — ha csak a függvény nem identikusan zérussal egyenlő — a kerületi értékei is majdnem mindenütt különböznek 0-tól. A korlátosság feltevése is enyhíthető; ha pl. a $|z| < R$ körtartományról van szó, akkor elég ha a koncentrikus $r < R$ sugarú körökön vett

$$M_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi$$

integrálközepek valamilyen $p > 1$ kitevő esetében az r-től független korlát alatt maradnak.

Az utóbbi feltételnek eleget tevő függvények osztályát HARDYról szokás H_p osztálynak nevezni. RIESZ FRIGYES kimutatta, hogy a H_p osztály a körben korlátos holomorf függvények osztályával abban a kapcsolatban áll, hogy *minden H_p-beli függvény felbontható egy a körben holomorf korlátos függvénynek és egy olyan H_p-beli függvénynek a szorzatára, amelynek a kör belsejében nincs zérus helye.* E felbontási tételnek egyik haszna az, hogy általa az összes H_p osztály vizsgálatát vissza lehet vezetni a legjobban kezelhető H_2 osztályéra.

Térjünk vissza a $|z| < R$ körben holomorf $f(z)$ függvény $M_p(r)$ integrálközepeire, mert ezek vizsgálata közben jutott el RIESZ egyik legfontosabb felfedezéséhez, a *szubharmonikus függvények* fogalmához és elméletéhez. Az $M_p(r)$ középről HARDY 1915-ben bebizonyította, hogy az r sugár növekvő függvénye és hogy $M_p(r)$ logaritmusa r logaritmusának konvex függvénye. — RIESZ, Hardy tételének mélyebb oka után kutatva, meglátta, hogy ez az ok abban rejlik, hogy ha $f(z)$ a komplex $z = x + iy$ változó analitikus függvénye, akkor a

$$g(x, y) = |f(x + iy)|$$

függvény az x, y sík megfelelő tartományában szubharmonikus. Ezen RIESZ azt érti, hogy *ha egy $h(x, y)$ harmonikus függvény nagyobb $g(x, y)$-nál valamely résztartomány határán, akkor nagyobb a belsejében is.* Ez a fogalom akárhány változó esetére ugyanígy értelmezhető; egy dimenzió esetében a harmonikus függvények a lineárisak révén, a szubharmonikus függvények fogalma a konvex függvényekére redukálódik. RIESZ nem állt meg az említett észrevételnél, azaz a Hardy-féle tételnek szubharmonikus függvényekre való általánosításánál, hanem mélyen behatolt e függvények analízisébe s a komplex-változós függvénytan, valamint a potenciálelmélet különböző problémáira való alkalmazásaiba. A potenciálelmélettel való kapcsolatot az adja, hogy *minden negativ tömegeloszlás potenciálja szubharmonikus és hogy ennek a megfordítottja is lényegében igaz.* RIESZnek ez az igen mély tétele a potenciálelmélet fejlődésének hatalmas új perspektíváit nyitotta meg. Éltek és állandóan élnek is nagy számmal a kutatók ezekkel a lehetőségekkel, s 1924 óta, mióta RIESZ első idevágó közleménye megjelent, rohamos fejlődésnek vagyunk a tanúi. RADÓ TIBOR, RIESZnek Szegeden volt kiváló asszisztense és munkatársa, már 1937-ben egy teljes Ergebnisse-füzetben számolhatott be a Riesz-féle ideákról és a hozzájuk kapcsolódó nagyszámú és fontos eredményről. Azóta ezek az eredmények megsokszorozódtak.

Mindabból, amit Riesz Frigyes munkásságáról eddig mondottunk, kitűnik, hogy ő elsősorban a matematikai analízisnek volt a mesteri kutatója, mégpedig mind a „klasszikus analízis"-nek, mind pedig a „funkcionálanalízis"-nek. De nemcsak az analízis területén alkotott maradandót, hanem a geometria területén is, közelebbről a topologikus tér fogalmának a kialakításával. A határérték és a folytonosság alapvető topológiai fogalmai axiomatikus tanulmányozásának útjára elsőként FRÉCHET francia matematikus és RIESZ FRIGYES léptek, kb. ugyanabban az időben, 1906 körül. FRÉCHET olyan, manapság a matematikában közkeletű, alapvető fogalmakat vezetett be, mint a metrikus tér, a kompaktság és a teljesség fogalmai, és számos kísérletet tett arra nézve, hogy axiomatikus utat találjon az alapvető topológiai relációkhoz (határpont, folytonosság) közvetlen úton, elkerülve a távolság fogalmát, ezek a kísérletei azonban nem tekinthetők sikerültnek. Ezzel szemben RIESZ, az 1908-ban tartott római nemzetközi matematikai kongresszuson megfogalmazza a topologikus tér axiómáit, közvetlenül axiomatizálva a határpont fogalmát és ilyen módon eljut a topologikus terek azon osztályához, amely a T_1-terek osztálya elnevezés alatt a mai topológiában végleges helyet foglalt el. Így tehát a *topologikus tér* fogalma első sikeres bevezetését a tudomány RIESZ FRIGYESnek köszönheti.*

RIESZ FRIGYES egyetemi rektori székfoglaló beszédében, 1925-ben, amelyet „Elemi módszerek a felsőbb mathematikában" címmel tartott, a felsőbb matematikából vett példákon mutatta be, hogy a tudományban a „felsőbb", a „bonyolult", a „nehéz" nem állandó érvényű jelzők, és ami ma még ilyen, az holnap már „elemivé", „egyszerűvé", „könnyűvé" válhat. RIESZ FRIGYES matematikai munkásságát éppen az jellemzi, hogy mindig a legalapvetőbb, központi jelentőségű kérdésekre összpontosította a figyelmét, a lényeget ragadta

* V. ö. P. SZ. ALEKSZANDROV, A tér fogalmáról a topológiában, A MTA III. Osztályának Közleményei, 3 (1953), 173—188.

meg, s ez úton sikerült neki a legbonyolultabb kérdéseket is egyszerűvé tennie és páratlanul áttekinthető és világos módon tárgyalnia. Dolgozatai nemcsak a tartalmukra nézve gazdagok, hanem formai tekintetben is remekművek.

RIESZ FRIGYES nincs már közöttünk. A nagy tudós, az öntudatos magyar hazafi elhunyta felett érzett gyászunkban az vigasztal, hogy élete, munkássága páratlanul gyümölcsöző volt, a tudomány és hazánk büszkeségére. Neve alkotásaiban hosszú századokon át változatlan fényben fenn fog maradni.

Szőkefalvi-Nagy Béla r. tag