

FÜGGETLEN VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK VÉGTELEN SORAINAK KONVERGENCIÁJÁRÓL

PRÉKOPA ANDRÁS

Bevezetés

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ teljesen független valószínűségi változók. Ebben a dolgozatban azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy milyen feltételek mellett konvergál a

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel.

Végig az egész dolgozatban $\mathfrak{F}$ a pozitív egész számok véges, $\mathfrak{S}$ pedig a tetszőleges részhalmazainak összességét jelenti. Ha $A \in \mathfrak{F}$, vagy $A \in \mathfrak{S}$ akkor a $\xi(A)$ valószínűségi változót a következőképpen definiálom:

$$(2) \quad \xi(A) = \sum_{k \in A} \xi_k,$$

feltéve, hogy végtelen sok elemet tartalmazó A halmaz esetében a (2) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. $\xi(A)$ eloszlásfüggvényét $F(x; A)$ -val, karakterisztikus függvényét $f(t, A)$ -val jelölöm.

Ha $0 < \lambda < 1$, ξ pedig egy tetszőleges valószínűségi változó, akkor azokat a $Q(\lambda)$ számokat, amelyekre teljesül a következő két egyenlőtlenség:

$$P(\xi \leq Q(\lambda)) \geq \lambda, \quad P(\xi \geq Q(\lambda)) \geq 1 - \lambda,$$

a ξ valószínűségi változó λ -kvantiliseinek nevezzük. A $\xi(A)$ változó egy tetszőleges λ -kvantilisét $Q(\lambda, A)$ -val jelölöm.

Arra vonatkozólag, hogy milyen feltételek mellett konvergál az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel, az irodalomban eddig olyan tételek ismereteseek, amelyek feltételeiben a ξ_k valószínűségi változók közönséges, illetve csonkított momentumai, vagy pedig karakterisztikus függvényei szerepelnek. Az ebben a dolgozatban található feltételek ezektől eltérő típusúak, amennyiben bizonyos eloszlásfüggvény-halmaz kompaktságával, illetve kvantilisekkel kapcsolatosak.

1. §. Segédtelemek

Ebben a paragrafusban három segédtelet bizonyítok be. Az első kettő egy $\{\xi, z \in \mathfrak{Z}\}$ valószínűségi változó-összességgel kapcsolatos, ahol $\mathfrak{Z}$ tetszőleges, adott halmaz. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(x, z)$ -vel, karakterisztikus függvényét $f(t, z)$ -vel, egy tetszőleges λ -kvantilisét $Q(\lambda, z)$ -vel jelölöm.

P. LÉVY bevezette az egydimenziós eloszlásfüggvények távolságának a fogalmát. Az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ eloszlásfüggvények $L(F_1, F_2)$ Lévy-féle távolsága alatt azoknak a h értékeknek az alsó határát értjük, amelyekre teljesül az

$$(3) \quad F_1(x-h) - h \leq F_2(x) \leq F_1(x+h) + h$$

egyenlőtlenség. Ismeretes, hogy ez a távolságfogalom kielégíti a metrikus tér axiómáit:

- a) $L(F_1, F_2) = 0$, akkor és csak akkor, ha $F_1(x) \equiv F_2(x)$;
- b) $L(F_1, F_2) = L(F_2, F_1)$;
- c) $L(F_1, F_3) \leq L(F_1, F_2) + L(F_2, F_3)$.

Tekintsük az egydimenziós eloszlásfüggvények $\mathfrak{F}$ halmazát. Az előbb mondottak szerint $\mathfrak{F}$ metrikus tér. (3) szerint $\mathfrak{F}$ korlátos, [2] 42. o. 2. tétele szerint pedig teljes is. [2] 38. o. 1. tétele szerint az $L(F_n, F) \rightarrow 0$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha $F_n(x) \rightarrow F(x)$ az utóbbi függvény minden folytonossági pontjában. Ennek alapján könnyen belátható, hogy az $\mathfrak{F}$ tér nem kompakt. Megadható ugyanis olyan eloszlásfüggvény-sorozat, amely minden pontban 0-hoz tart. Az első két lemma azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy milyen feltételek mellett kompakt az $\mathfrak{F}$ tér $\mathfrak{F}' = \{F(x, z), z \in \mathfrak{Z}\}$ részhalmaza.

Mivel rögzített λ és z esetében a $Q(\lambda, z)$ mennyiség nincs mindig egyértelműen meghatározva, ezért a $\{Q(\lambda, z), z \in \mathfrak{Z}\}$ halmaz is általában többféleképpen megválasztható.

1. LEMMA. Ha minden olyan λ -ra, melyre $0 < \lambda < 1$, a $Q(\lambda, z)$ ($z \in \mathfrak{Z}$) kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy $|Q(\lambda, z)| \leq K(\lambda)$, ahol $K(\lambda)$ nem függ z -től, akkor az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompakt.

Megfordítva, ha az $\mathfrak{F}'$ halmaz kompakt, akkor minden olyan λ -hoz, melyre $0 < \lambda < 1$, tartozik olyan z -től független $K(\lambda)$ szám, hogy $|Q(\lambda, z)| \leq K(\lambda)$.

AZ ELSŐ ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Ha $\varepsilon > 0$, $0 < \lambda < \varepsilon$ és $x < -K(\lambda)$, akkor feltételünkből azt kapjuk, hogy

$$F(x, z) \leq F(-K(\lambda), z) = P(\xi < -K(\lambda)) \leq P(\xi < Q(\lambda, z)) \leq \lambda < \varepsilon.$$

Ha $\lambda > 1 - \varepsilon$ és $x > K(\lambda)$, akkor pedig azt kapjuk, hogy

$$F(x, z) \geq F(K(\lambda), z) = P(\xi < K(\lambda)) \geq P(\xi \leq Q(\lambda, z)) \geq \lambda > 1 - \varepsilon.$$

Látható tehát, hogy

$$F(x, z) \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow -\infty,$$

$$F(x, z) \rightarrow 1; \text{ ha } x \rightarrow \infty,$$

z -ben egyenletesen. Ha $F(x, z_k)$ az $\mathcal{F}'$ halmaz egy sorozata, akkor ebből Helly tétele szerint kiválasztható egy olyan részsorozat, amely konvergál egy $F(x)$, balról folytonos, nem csökkenő függvényhez z , az utóbbinak minden folytonossági pontjában. Erre azonban az előbbiek szerint teljesülniök kell a $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ relációknak. $F(x)$ tehát eloszlásfüggvény.

A MÁSODIK ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Az $\mathcal{F}'$ halmaz kompaktságából következik, hogy van olyan pozitív $K(\varepsilon)$ szám, hogy

$$F(x, z) < \varepsilon, \text{ ha } x < -K(\varepsilon)/2,$$

$$1 - F(x, z) < \varepsilon, \text{ ha } x > K(\varepsilon)/2.$$

Ekkor azonban

$$-K(\varepsilon) < Q(\varepsilon, z) < K(\varepsilon), z \in \mathcal{Z},$$

amivel az állítást bebizonyítottuk.

2. LEMMA. Az $\mathcal{F}'$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha az $f(t, z)$, $z \in \mathcal{Z}$ karakterisztikus függvények a $t=0$ pontban egyenlő mértékben folytonosak, azaz minden pozitív ε -hoz található olyan δ , hogy

$$(4) \quad |1 - f(t, z)| < \varepsilon, \text{ ha } |t| < \delta.$$

AZ ELSŐ ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Tegyük fel, hogy adott ε és δ mellett teljesül a (4) egyenlőtlenség. Ekkor az

$$1 - \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{10}, \text{ ha } |x| \geq 1$$

egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |1 - f(t, z)| dt \geq \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - e^{itx}) dt dF(x, z) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF(x, z) \geq \int_{|x| \geq \frac{1}{\delta}} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF(x, z) \geq \frac{1}{10} P\left(|\xi_z| > \frac{1}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Eszerint, ha $x > \frac{1}{\delta}$, akkor

$$F(-x, z) + 1 - F(x, z) < 10\varepsilon.$$

Innen ugyanúgy, mint az 1. lemma bizonyításában, $\mathcal{F}'$ kompaktága egyszerűen belátható.

A MÁSODIK ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Ha $\varepsilon > 0$, akkor van olyan pozitív K szám, hogy

$$P(|\xi_z| > K) < \frac{\varepsilon}{4}, z \in \mathfrak{S}.$$

Ebből következik, hogy ha $|t| < \frac{\varepsilon}{2K} = \delta$, akkor

$$\begin{aligned} |1 - f(t, z)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dF(x, z) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{itx}| dF(x, z) \leq \\ &\leq |t| \int_{|x| \leq K} |x| dF(x, z) + 2P(|\xi_z| > K) < |t|K + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

3. LEMMA. Tegyük fel, hogy az $\nu_1, \nu_2, \dots$ valószínűségi változókra teljesül a következő feltétel:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \infty) = 1.$$

Ha $0 < \lambda < 1$ és $Q(\lambda, n)$ jelenti az ν_n valószínűségi változó egy tetszőleges λ -kvantilisét, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(\lambda, n) = \infty.$$

BIZONYÍTÁS. Jelölje Ω_{mn} azt az eseményt, hogy

$$\nu_n > m.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_{mn}) = 1.$$

Létezik tehát olyan N szám, hogy ha $n > N$, akkor

$$P(\Omega_{mn}) > 1 - \lambda.$$

Ekkor azonban

$$Q(\lambda, n) > m.$$

Mivel m tetszőlegesen megválasztható, ezzel a 3. lemmát bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók nem-negatívak és van olyan λ ($0 < \lambda < 1$), hogy

$$|Q(\lambda, A)| \leq K, A \in \mathfrak{F},$$

ahol K állandó, akkor

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k < \infty\right) = 1.$$

BIZONYÍTÁS. A 0 vagy 1 törvény szerint (l. [3] 60. o.) a következő két eset közül valamelyik fennáll:

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \infty\right) = 1, \quad P\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k < \infty\right) = 1.$$

Az első eset azonban nem lehetséges, mert akkor a 3. lemma értelmében azt kapnánk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(\lambda, \{1, 2, \dots, n\}) = \infty,$$

ami a feltétellel ellentétes.

2. §. Az (1) sor konvergenciájának szükséges és elegendő feltételei

Ebben a paragrafusban két tételt bizonyítunk be.

1. TÉTEL. Ha az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz kompakt, akkor az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál.

Megfordítva, ha az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor az $\{F(x, A), A \in \mathcal{S}\}$ halmaz kompakt.

AZ ELSŐ ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Tekintsük a következő sorozatot:

$$F(x, \{1\}), F(x, \{1, 2\}), \dots, F(x, \{1, 2, \dots, n\}), \dots$$

Mivel az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz kompakt, ebből a sorozatból kiválasztható egy olyan konvergens részsorozat, melynek határértéke szintén eloszlásfüggvény. Létezik tehát egy olyan $n_1, n_2, \dots$ növekvő sorozat, és egy olyan $f(t)$ karakterisztikus függvény, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{l=1}^{n_k} f(t, \{l\}) = f(t).$$

Mivel $|f(t, \{l\})| \leq 1$, ebből következik, hogy

$$\prod_{l=1}^{\infty} |f(t, \{l\})| = |f(t)|.$$

$f(t)$ karakterisztikus függvény, tehát létezik olyan pozitív T szám, hogy $|f(t)| > 0$, ha $|t| \leq T$. [1] 115. o. 2.7 és 112. o. 2.6 tételeiből következik, hogy vannak olyan $c_1, c_2, \dots$ állandók, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - c_k)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. A tétel bebizonyításához tehát csupán azt kell kimutatnunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Ebben az esetben a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sor átrendezhető

oly módon, hogy az átrendezett $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}$ sor összege vagy $+\infty$, vagy $-\infty$.

Feltehetjük, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} = +\infty,$$

mert a $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} = -\infty$ eset a $\xi_k = -\xi_{i_k}$ változók bevezetésével erre visszavezethető. Ha $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{i_k}$ jelenti a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ sor megfelelő átrendezettjét, akkor az előbbieket alapján azt kapjuk, hogy

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \xi_{i_k} = \sum_{k=1}^n (\xi_k - c_{i_k}) + \sum_{k=1}^n c_{i_k} \rightarrow +\infty, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Legyen $A_n = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Az (5) relációból a 3. lemma alapján azt kapjuk, hogy minden rögzített λ -ra ($0 < \lambda < 1$)

$$Q(\lambda, A_n) \rightarrow \infty, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Ez azonban ellentmondás, mert feltettük, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz kompakt és ebből az 1. lemma alapján következik, hogy minden λ -hoz ($0 < \lambda < 1$) tartozik olyan $K(\lambda)$ szám, hogy

$$|Q(\lambda, A)| \leq K(\lambda), \quad A \in \mathfrak{F}.$$

A MÁSODIK ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA. Ha az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, \{k\})|$$

sor minden véges t -intervallumban egyenletesen konvergál ([1] 115. o. Theorem 2.7 (III)). Legyen $A = \{i_1, i_2, \dots\}$. Az 1-nél nem nagyobb abszolút értékű $z_1, z_2, \dots, z_r$ komplex számokra érvényes

$$|1 - z_1 z_2 \dots z_r| \leq |1 - z_1| + |1 - z_2| + \dots + |1 - z_r|$$

egyenlőtlenség alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\left| 1 - \prod_{i=1}^r f(t, \{i\}) \right| \leq \sum_{i=1}^r |1 - f(t, \{i\})|.$$

Elvégezve az $r \rightarrow \infty$ határátmenetet, következik, hogy

$$(6) \quad |1 - f(t, A)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |1 - f(t, \{i\})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, \{k\})|.$$

A (6) egyenlőtlenség jobboldalán folytonos függvények egyenletesen konvergens sora áll, tehát az összegfüggvény folytonos. Ennek alapján (6)-ból leolvasható, hogy az $f(t, A), A \in \mathfrak{S}$ karakterisztikus függvények a $t=0$ pontban egyenlő mértékben folytonosak és így a 2. lemma szerint az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ halmaz kompakt. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Ha minden rögzített λ -ra ($0 < \lambda < 1$) a $Q(\lambda, A)$ ($A \in \mathfrak{F}$) kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz korlátos, akkor az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál.

Megfordítva, ha az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor minden λ -hoz ($0 < \lambda < 1$) tartozik olyan $K(\lambda)$ szám, hogy

$$|Q(\lambda, A)| \leq K(\lambda), A \in \mathfrak{F}.$$

BIZONYÍTÁS. Az állítás az 1. lemma és az (1) tétel közvetlen következménye.

Az előző korolláriumban az (1) sor konvergenciáját biztosító feltétel lényegesen enyhíthető. Erre vonatkozik a

2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy létezik olyan λ_1, λ_2 számpár, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, hogy a $Q(\lambda_1, A)$ ($A \in \mathfrak{F}$), $Q(\lambda_2, A)$ ($A \in \mathfrak{F}$) kvantilisek alkalmas választása mellett a $Q_1 = \{Q(\lambda_1, A), (A \in \mathfrak{F})\}$, $Q_2 = \{Q(\lambda_2, A), (A \in \mathfrak{F})\}$ halmazok korlátosak. Ebben az esetben az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál.

BIZONYÍTÁS. Legyen K olyan szám, melyre fennáll a következő két egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} |Q(\lambda_1, A)| &\leq K, Q(\lambda_1, A) \in Q_1, \\ |Q(\lambda_2, A)| &\leq K, Q(\lambda_2, A) \in Q_2. \end{aligned} \quad A \in \mathfrak{F}.$$

Innen következik, hogy

$$\sup_{A \in \mathfrak{F}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > K) \leq \sup_{A \in \mathfrak{F}} \mathbf{P}(\xi(A) < -K) + \sup_{A \in \mathfrak{F}} \mathbf{P}(\xi(A) > K) \leq \lambda_1 + 1 - \lambda_2 < 1.$$

Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\inf_{A \in \mathfrak{F}} \mathbf{P}(|\xi(A)| \leq K) = \varrho > 0,$$

ahonnan következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^n \xi_k\right| \leq K\right) \geq \varrho > 0.$$

Ebből az utolsó egyenlőtlenségből, [1] 121. o. Theorem 2.9-ből és 112. o. Theorem 2.6-ből következik, hogy léteznek olyan $c_1, c_2, \dots$ állandók, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - c_k)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ugyanúgy, mint az 1. tétel bizonyításánál, belátható, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty,$$

mert ellenkező esetben nem léteznék olyan λ ($0 < \lambda < 1$), melyre a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz (elemeinek csak egy megválasztásánál is) korlátos lenne. A

$$\sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n (\xi_k - c_k) + \sum_{k=1}^n c_k$$

egyenlőségből az előbb mondottak alapján következik, hogy az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Ha a ξ_k valószínűségi változók szimmetrikus eloszlásúak, akkor ahhoz, hogy az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergáljon, elegendő, ha valamilyen λ -ra, melyre $0 < \lambda < 1$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$, a $Q(\lambda, A)$ kvantilisok alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz korlátos. Ekkor ugyanis minden $\mathfrak{F}$ -hez tartozó A halmaz esetén a 0 érték $\frac{1}{2}$ -kvantilise a $\xi(A)$ valószínűségi változónak, tehát a 2. tétel feltételei teljesülnek.

MEGJEGYZÉS. A 2. 2. tétel feltétele a korlátos kvantilis-halmazok számát illetően tovább már nem gyengíthető. Pontosabban, abból, hogy van olyan λ_1 ($0 < \lambda_1 < 1$), hogy a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{F}\}$ halmaz korlátos, még nem következik az (1) sor konvergenciája. Ha ugyanis a ξ_k valószínűségi változók azonos, szimmetrikus eloszlással rendelkeznek és $P(\xi_k = 0) < 1$, akkor az (1) sor minden sorrendben divergál, de $Q\left(\frac{1}{2}, A\right)$ megválasztható úgy, hogy

$$Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0, A \in \mathfrak{F}.$$

Végül megemlítek egy problémát. Ha $A_1, A_2, \dots, \mathfrak{F}$ -nek egy olyan sorozata, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$, akkor a (6) egyenlőtlenségből egyszerűen következik, hogy $\xi(A_n) \Rightarrow 0$, ahol a $\Rightarrow$ jel a sztochasztikus konvergenciát jelenti. Igaz-e az ennél erősebb

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(A_n) = 0) = 1$$

reláció is? Valószínűnek látszik, hogy található erre ellenpélda, mert abból, hogy az (1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens, még nem következik, hogy 1 valószínűséggel abszolút konvergens is. Példa erre a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} \sin 2^n : r x}{n}$$

sor.

IRODALOM

- [1] J. L. DOOB, Stochastic processes* (New York, London, 1953).
- [2] B. V. GNYEGYENKO és A. N. KOLMOGOROV, Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951).
- [3] A. N. KOLMOGOROV, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Berlin, 1933).