

KÉT GYŰRŰELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

SZÁSZ FERENC

1. §. Bevezetés

A modern algebrában gyakoriak az olyan törekvések, amelyek bizonyos előre kiszabott tulajdonsággal rendelkező algebrai struktúrák teljes osztályának explicit leírására irányulnak. Ebben a dolgozatban két hasonló gyűrűelméleti problémáról van szó, amelyek a [2] és [7] csoportelméleti dolgozatok problémáinak gyűrűelméleti megfelelői.

A modern algebra alapfogalmait az olvasó megtalálhatja pl. a [3], [4] és [6] könyvekben. Ezért mellőzzük a terminológiai és jelölési megjegyzéseket, csupán arra emlékeztetünk, hogy egy tetszőleges R gyűrűt akkor hívunk *ciklikusnak*, ha a gyűrű additív csoportja ciklikus (lásd közelebbről a [6] könyvet). Például a racionális egész számok I gyűrűje ciklikus.

Egy tetszőleges R gyűrűt P_1 -tulajdonságú gyűrűnek nevezünk, ha az R gyűrű minden S részgyűrűje az R gyűrűnek nR többszöröse, ahol nR jelöli az összes nr elemek halmazát ($n \in I$ és $r \in R$). Világos, hogy P_1 -tulajdonságú gyűrű bármely homomorf képe is P_1 -tulajdonságú. Az I gyűrű nyilvánvalóan P_1 -tulajdonságú gyűrűre is példa.

Egy tetszőleges R gyűrűt P_2 -tulajdonságúnak nevezünk, ha az R gyűrű bármely S részgyűrűje (gyűrűelméleti értelemben) direkt összeadandója az R gyűrűnek. Például bármely véges K_p prímtest P_2 -tulajdonságú.

Dolgozatunknak az a célja, hogy megadjuk a P_1 -tulajdonságú, illetve a P_2 -tulajdonságú gyűrűk teljes osztályának explicit leírását. Azt találjuk, hogy ezek a gyűrűk kommutatívak.

2. §. A P_1 -tulajdonságú gyűrűk leírása

Bebizonyítjuk a következő tételt:

1. TÉTEL. Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor ciklikus, ha P_1 -tulajdonságú.

I. MEGJEGYZÉS. Az 1. tétel problémájának duálisaként megemlítjük azt, hogy a [8] dolgozat tétele alapján világos a következő állítás: egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor ciklikus, ha az R gyűrű bármely nem-triviális nR többszöröse ciklikus (az nR többszörös triviális, ha $n = 1, 0$ vagy -1).

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt azt igazoljuk, hogy zérusosztómentes P_1 -tulajdonságú R gyűrű szükségképpen kommutatív. Világos ui. az, hogy R -nek bármely S részgyűrűje ideál az R gyűrűben, következésképpen, ha $a \neq 0$ és $b \in R$ akkor $ab = a' \in \{a\}$, ahol $\{M\}$ jelöli az M részhalmazzal generált részgyűrűt R -ben. Ekkor $aa' = a'a$ alapján kapjuk, hogy $a(ba - a') = (ab - a')a = 0$, és minthogy R zérusosztómentes, $ab = ba = a'$.

A továbbiakban két esetet különböztetünk meg.

I. Legyen előbb R olyan P_1 -tulajdonságú gyűrű, amelynek R^+ additív csoportja torziómentes.

Ha vannak az R gyűrűben zérusosztók, $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $ab = 0$, akkor a P_1 -tulajdonság miatt $\{a\} = mR$ és $\{b\} = nR$, tehát $\{0\} = \{a\} \cdot \{b\} = mn \cdot R^2$, ami csak úgy lehet, ha R zéró-gyűrű. Ezért a [7] dolgozat tétele szerint R a végtelen ciklikus csoportra épített zérógyűrű.

Ha pedig R zérusosztómentes, akkor kommutatív is. Bármely $a \neq 0$ elemre nézve $Ra \neq \{0\}$, ezért $Ra = nR$, ahol $n \neq 0$. Nyilván van olyan $b \in R$ elem, amelyre $ab = ba = na$. Tekintsük mindazon c gyűrűelemek S halmazát, amelyekhez van olyan (c -től függő) egész szám, legyen ez n_c , amelyre $ac = ca = n_c \cdot a$. Könnyen igazolható, hogy S részgyűrű, amely $b \in S$ miatt különbözik a zéruselemből álló gyűrűtől, ezért van olyan m egész szám, amelyre $S = mR$. Következésképpen $Sa = (mR)a = mnR$ is részgyűrű R -ben, mégpedig az S értelmezése szerint szükségképpen ciklikus. Másfelől az $r \rightarrow mn \cdot r$ leképezés nyilván izomorfizmusa az R^+ csoportnak az $(mnR)^+$ ciklikus csoportra, vagyis R ciklikus gyűrű.

II. Legyen mármost R olyan P_1 -tulajdonságú gyűrű, amelynek R^+ additív csoportjában van végesrendű $a \neq 0$ elem is. Ha az a elem rendje $O(a) = n$ és $\{a\} = mR$, akkor $mn \cdot R = \{0\}$, tehát az R^+ csoport legfeljebb mn -korlátos. Az R gyűrűben a p -hatványrendű elemek R_p halmaza (p prímszám) nyilván ideál R -ben, sőt — mint R -nek direkt összeadandója endomorf képe is. Ennek folytán R_p is P_1 -tulajdonságú gyűrű. Így nyilván elegendő a tételt p -gyűrűkre bebizonyítani. Megállapíthatjuk, hogy az R_p gyűrű összes részgyűrűi: $R, pR, \dots, p^{k-1}R, p^kR = \{0\}$. Minthogy a P_1 -tulajdonságú R_p/pR_p faktorgyűrűben nincsenek valódi részgyűrűk, ezért [9] és a [6] könyv 85. tétele szerint R_p/pR_p vagy prímszámrendű zéró-gyűrű, vagy véges primtest. Tehát R_p/pR_p mindkét esetben ciklikus faktorgyűrű, minthogy pedig az [1] dolgozat szerint a korlátos elemrendű $(R_p)^+$ Abel-féle csoport ciklikus csoportok direkt összege, a [6] könyv 99. tétele szerint az $(R_p)^+$ csoport és ezzel együtt az R gyűrű is ciklikus.

Fordítva, természetesen bármely ciklikus gyűrű P_1 -tulajdonságú, amivel az I. tétel bizonyítását befejeztük.

3. §. A P_2 -tulajdonságú gyűrűk leírása

Bebizonyítjuk a következő tételt:

2. TÉTEL. *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csakis akkor P_2 -tulajdonságú, ha prímszámrendű gyűrűk direkt összege és minden p -komponense bármely direkt felbontásában a prímszámrendű gyűrűk közt legfeljebb csak egy K_p test fordul elő.*

2. MEGJEGYZÉS. Egy P_2 -tulajdonságú, vagy egy P_1 -tulajdonságú R gyűrű bármely S részgyűrűje ideál R -ben, azaz R általános értelemben vett teljes ideál-gyűrű, amelyeknek a leírása bizonyos speciális esetre vonatkozólag az [5] dolgozatban található meg.

Mindenekelőtt bebizonyítunk néhány segéd-tételt:

1. SEGÉDTÉTEL. P_2 -tulajdonságú R gyűrű bármely részgyűrűje is P_2 -tulajdonságú.

BIZONYÍTÁS: Minthogy az R gyűrűnek bármely részgyűrűje endomorf kép, elegendő megmutatni, hogy az R gyűrű bármely $R' = Rq$ homomorf képe is P_2 -tulajdonságú.

Legyen S' tetszőleges részgyűrű R' -ben, ekkor a $T = (S')q^{-1}$ teljes inverz kép részgyűrű R -ben, ezért $R = T + T_1$, következésképpen $R' = S' + T_1q$.

2. SEGÉDTÉTEL: P_2 -tulajdonságú gyűrű bármely a eleme algebrai a racionális egész számok I gyűrűje vagy annak valamely I' homomorf képe felett.

BIZONYÍTÁS. Minthogy az 1. segéd-tétel szerint az $\{a\}$ gyűrű is P_2 -tulajdonságú, ezért van olyan $R_1 \subseteq \{a\}$ részgyűrű és $f(x) \in x \cdot I[x]$, polinom, hogy $\{a\} = \{a^2\} + R_1$ és $a = f(a^2) + r_1$, ahol $r_1 \in R_1$. Ekkor $a^2 \cdot r_1 \in R_1 \cap \{a^2\} = 0$ miatt $a^3 = a^2 \cdot f(a^2)$, és itt a jobboldal vagy 0, vagy legalább negyedfokú polinomja a -nak.

3. SEGÉDTÉTEL. P_2 -tulajdonságú gyűrű nem lehet 0-karakterisztikájú.

BIZONYÍTÁS. Ha volna olyan $a \neq 0$ elem, amely a 0-karakterisztikájú P_2 -tulajdonságú gyűrűnek eleme, akkor az 1. segéd-tétel szerint $\{a\} = \{na\} + R_1$, ezért $R_1 \subseteq \{a\}/\{na\}$ miatt $R_1 = \{0\}$. Így $\{a\} = \{na\}$ folytán és a -nak I felett való algebrai mivolta miatt feltehető, hogy az $\{a\}$ gyűrűben van olyan $\{b\} \neq 0$ részgyűrű, amely végesrangú I - vagy I' -algebra (az n rang jelenti a $\{b\}$ gyűrű bármely maximális lineárisan független elemrendszerének a számosságát, amely nyilvánvalóan egyértelműen meg van határozva.) Válasszunk a $\{b\}$ gyűrűben egy $c \neq 0$ elemet úgy, hogy a $\{c\}$ gyűrű rangja minimális legyen. Ekkor $\{c\}$ nyilván direkt felbonthatatlan, ezért nem lehetnek benne az 1. segéd-tétel alapján öröklődő P_2 -tulajdonság miatt valódi részgyűrűk, sem valódi

balideálok. De [9] és a [6] könyv 85. tétele szerint ekkor $\{c\}$ vagy primszámrendű zérógyűrű, ami lehetetlen, hiszen a $\{c\}$ gyűrű 0-karakterisztikájú, vagy pedig ferdetest, ami szintén lehetetlen, mert 0-karakterisztikájú ferdetest mindig tartalmaz valódi részgyűrűt. Tehát mindkét esetben ellentmondáshoz juthatunk, ezért kell, hogy $a = 0$ legyen, ami a segédétel érvényességét igazolja.

4. SEGÉDTÉTEL. *Bármely primszámrendű gyűrű test vagy zérógyűrű.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, ha $\{a\}^+$ az R gyűrű ciklikus additív csoportja, akkor a [6] könyv 164. tétele alapján az a elem úgy is megválasztható, hogy $a^2 = da$ és $pa = 0$, ahol $d \nmid p$. Ezért $d = p$ esetén $a^2 = 0$, tehát $R^2 = \{0\}$, míg $d \neq 1$ esetén az a elem idempotens. Ekkor az $n \rightarrow na$ leképezés az I gyűrűnek homomorf leképezése az R gyűrűre, ahol a homomorfizmus magva a maximális (p) primeál és minthogy I egységelemes, $I/(p)$ test, és a homomorfizmus-tétel szerint, $R \simeq I/(p)$.

5. SEGÉDTÉTEL. *Véges, zérusosztómentes P_2 -tulajdonságú R gyűrű primtest.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy R véges zérusosztómentes gyűrű, ezért test, amely a P_2 -tulajdonság és zérusosztómentessége miatt egybeesik primtestével.

6. SEGÉDTÉTEL. *Abel-féle elemi p -csoportra épített, egy elemmel generált, P_2 -tulajdonságú R gyűrű végezzámú primszámrendű gyűrű direkt összege.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy a 2. segédétel szerint bármely $a \in R$ elem algebrai a K_p primtest felett, az R gyűrű nyilván véges. Jelöljük n -nel az $\{a\}^+$ additív csoport ciklikus direkt összeadandóinak számát. A bizonyítást n szerint végrehajtandó teljes indukcióval végezzük el. A segédétel $n = 1$ esetén nyilván igaz. Legyen most $n > 1$, ekkor az 5. segédétel szerint szükségképpen léteznek az $\{a\}$ gyűrűben zérusosztók, vagyis olyan $g(a) \neq 0$ és $h(a) \neq 0$ elemek, amelyekre $g(a) \cdot h(a) = 0$. Ennek folytán, ha az $\{a\} = \{g(a)\} + R_2$ felbontásban $R_2 = \{0\}$, akkor nyilván $\{a\} \cdot \{h(a)\} = \{0\}$, ezért $\{h(a)\}$ zérógyűrű. Ha az $\{a\} = \{h(a)\} + R_3$ felbontásban $R_3 \neq \{0\}$ akkor az indukciós feltevést erre a felbontásra alkalmazzuk, $R_3 = \{0\}$ esetén pedig az indukciós feltevés alkalmazása nélkül a [2] tétel alapján igaz a 6. segédétel, ugyanis $R_3 = \{0\}$ esetén $\{a\} = \{h(a)\}$ zérógyűrű. Míg, ha $R_2 \neq \{0\}$, már az $\{a\} = \{g(a)\} + R_2$ felbontásra is elegendő alkalmazni az indukciós feltevést.

A 2. tétel bizonyítása. Legyen R tetszőleges P_2 -tulajdonságú gyűrű és F az R torzió-része. Világos az, hogy F ideál R -ben, ezért $R = F + R_1$. Az 1. és 3. segédétel szerint $R_1 = \{0\}$ és $R = F$. Legyen R_p az R gyűrű p -komponense, ekkor $R = \sum_p R_p$. Ha E_p az R_p gyűrű legfeljebb p -rendű elemeiből álló ideálja, akkor $R_p = E_p + R'_p$ miatt szükségképpen $R'_p = \{0\}$.

Ezért az 1. segédttétel és az $R = \sum_p E_p$ felbontás alapján elég vizsgálni az olyan P_2 -tulajdonságú R gyűrűk szerkezetét, amelyek elemi p -gyűrűk.

Egy tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_\alpha, \dots$ elemrendszert az R gyűrűben akkor nevezünk algebrailag függetlennek, ha létezik a gyűrűelméleti direkt összeg: $\sum_\alpha \{a_\alpha\}$. Világos, hogy az így értelmezett algebrai függetlenség véges jellegű tulajdonság. Legyen $b_1, \dots, b_\alpha, \dots$ az R gyűrű egyik maximális algebrailag független elemrendszere; ilyennek a létezését ZORN lemmája biztosítja. Ha $R_1 = \sum_\alpha \{b_\alpha\}$, akkor $R = R_1 + R_2$. Bebizonyítjuk, hogy $R_2 = \{0\}$, azaz, hogy $R = R_1$. Ha volna ugyanis olyan $0 \neq b \in R_2$ elem, amelyre $R_2 = \{b\} + R_3$, akkor a 6. segédttétel szerint lenne a $\{b\}$ gyűrűben egy $\{c\} \neq \{0\}$ ciklikus direkt összeadandó is. De a $b_1, \dots, b_\alpha, \dots$ elemrendszer maximális választása következtében nyilván $\{c\} \cap R_1 \neq \{0\}$ lenne. Ezért $O(\{c\}) = p$ miatt $\{c\} \subseteq R_1$, ami ellentmond annak, hogy $R_1 \cap R_2 = \{0\}$. Következésképpen $R_2 = \{0\}$ és $R = \sum_\alpha \{b_\alpha\}$. Ekkor $R = \sum_p R_p$ és a 6. segédttétel alapján az R gyűrű az általános esetben is prímszámrendű gyűrűk direkt összege.

Megmutatjuk, hogy bármely p -komponens legfeljebb egy K_p primtestet tartalmazhat.

Ha ugyanis a P_2 -tulajdonságú R_p gyűrű egyik direkt felbontásában $\{a\}$ és $\{b\}$ két különböző primtest volna, akkor az 1. segédttétel szerint $\{a\} + \{b\}$ is P_2 -tulajdonságú gyűrű. Feltehető, hogy $a^2 = a$, és $b^2 = b$. De ekkor az $\{a\} + \{b\}$ gyűrűben $\{a + b\}$ szükségképpen direkt összeadandó. Minthogy $p(a + b) = 0$ és $(a + b)^2 = a^2 + b^2 = a + b$ — ugyanis $ab = 0$, — ezért $\{a + b\}$ is p -rendű ferdetest. Ezért az $\{a\} + \{b\}$ gyűrűben $\{a + b\}$ valódi direkt összeadandó volna. A komplementer direkt összeadandó részgyűrűnek szintén p -eleműnek, tehát ciklikusnak kell lenni és legyen $ma + nb$ egyik generátoreleme, ahol m és n alkalmas egész számok. Egy feltételezett $\{a\} + \{b\} = \{a + b\} + \{ma + nb\}$ direkt felbontás miatt kell, hogy $0 = (a + b)(ma + nb) = ma^2 + nb^2 = ma + nb$ legyen, tehát maga a generátorelem 0 legyen, ami lehetetlenség. Tehát egy P_2 -tulajdonságú R gyűrű mindig prímszámrendű gyűrűk direkt összege és az R gyűrű bármely p -komponensének akármelyik direkt felbontásában legfeljebb csak egy K_p direkt összeadandó lép fel (K_p primtest).

Fordítva, tegyük fel, hogy egy R gyűrű prímszámrendű gyűrűk direkt összege és bármelyik R_p p -komponensben direkt összeadandóként legfeljebb csak egy K_p direkt összeadandó fordul elő. Bebizonyítjuk, hogy ekkor az R gyűrű P_2 -tulajdonságú.

A bizonyítást előbb p -gyűrűkre végezzük el. Legyen R p -rendű gyűrűk direkt összege és S tetszőleges részgyűrű R -ben.

Ha R direkt felbontásában nem fordul elő K_p primtest, akkor R zérógyűrű, ezért a [2] tétel alapján igaz, hogy $R = S + T$, ahol T alkalmas részgyűrű R -ben.

Ezek után tegyük fel azt, hogy R -nek prímszámrendű gyűrűk direkt összegére való egyik felbontásában pontosan egy K_p primtest van. Ha az S részgyűrű nem tartalmaz olyan $s = k_p + z_p$ elemet ($k_p \in K_p$, $z_p \in Z_p$, $R = K_p + Z_p$, és Z_p zérógyűrű), amelynél $k_p \neq 0$, akkor nyilván $SR = RS = \{0\}$ és $S \subseteq Z_p$. Ekkor a [2] tétel szerint van olyan $C_p \subseteq Z_p$, hogy $Z_p = S + C_p$, ezért $S + (C_p + K_p) = (S + C_p) + K_p = K_p + Z_p = R$ miatt S direkt összeadandója R -nek.

Ha pedig van olyan $s = k_p + z_p \in S$, amelynél $k_p = 0$, akkor $k_p = n e_p$, ahol e_p a K_p test egységeleme és $1 \leq n \leq p-1$.

Legyen m az $nx \equiv 1 \pmod{p}$ kongruencia megoldása. Ekkor $ms = e_p + m z_p$, amiből $m^2 s^2 = e_p^2 = e_p \in S$. Tehát $\{e_p\} = K_p \subseteq S$. Nyilván létezik az $S_1 = K_p + (S \cap Z_p)$ direkt összeg és $S_1 \subseteq S$. Legyen $s' = k'_p + z'_p$ tetszőleges elem S -ben, ekkor $K_p \subseteq S$ miatt $z'_p = s' - k'_p \in S \cap Z_p$, tehát $S \subseteq S_1$, vagyis $S = K_p + (S \cap Z_p)$.

Legyen mármost $Z_p = (S \cap Z_p) + C$, ugyanis egy ilyen direkt felbontás létezik a [2] dolgozat tétele alapján. Ekkor $S + C = K_p + (S \cap Z_p) + C = K_p + Z_p = R$, amivel igazoltuk azt, hogy az R p -gyűrű P_2 -tulajdonságú.

Ha pedig R nem p -gyűrű, akkor egyértelműen felbomlik p -komponenseinek direkt összegére: $R = \sum_p R_p$. Legyen S tetszőleges részgyűrű R -ben, amelyre hasonlóan $S = \sum_p S_p$ áll fenn. Ekkor $S_p \subseteq R_p$ és az előzőek szerint $R_p = S_p + T_p$. Legyen $T = \sum_p T_p$, így $S + T = \sum_p S_p + \sum_p T_p = \sum_p (S_p + T_p) = R$, ezért állításunkat az általános esetben is igazoltuk, és ezzel a 2. tételt is teljesen bebizonyítottuk.

IRODALOM

- [1] R. BAER, Der Kern, eine charakteristische Untergruppe, *Comp. Math.*, (1935), 254—283.
- [2] A. KERTÉSZ, On groups every subgroup of which is a direct summand, *Publ. Math. Debrecen* 2 (1951), 74—75.
- [3] A. Г. КУРОШ: Теория групп, Москва (1953).
- [4] G. PICKERT, Einführung in die höhere Algebra, *Göttingen* (1951).
- [5] L. RÉDEI, Vollidealetringe im weiteren Sinn I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 3 (1952), 243—268.
- [6] L. RÉDEI, Algebra I. kötet, *Budapest* (1954).
- [7] F. SZÁSZ, On groups every cyclic subgroup of which is a power, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* VI. 3—4 (1956), 475—477.
- [8] F. SZÁSZ, Csoportokról, amelyeknek összes nem-triviális hatványai ciklikus alcsoportok, *Az MTA III. Oszt. Közleményei* 5 (1955), 491—492.
- [9] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Stiintific Bucuresti*, 1 (1950), 783—789.