

KÖZELÍTŐ MÓDSZER A RUGALMASSÁGTAN SÍKBELI FELADATAINAK MEGOLDÁSÁRA

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett 1975. január 13-án]

A tanulmány a rugalmasságtan síkbeli feladatainak megoldására alkalmas közelítő módszert ismertet. A közelítő módszer alapja az elmozdulásvektorra felírt Navier-féle parciális differenciálegyenlet megoldása egyváltozóban diszkrét argumentumú függvények alkalmazásával.

Jelölések

r, φ, z	hengerkoordináták
$\tilde{e}_r, \tilde{e}_\varphi, \tilde{e}_z$	az r, φ, z hengerkoordinátarendszer egységvektorai
$\tilde{i} = u(r, \varphi) \tilde{e}_r + v(r, \varphi) \tilde{e}_\varphi$	elmozdulásvektor
$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \tilde{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{e}_\varphi$	Hamilton-féle differenciáloperátor
$\nabla \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$	Laplace-operátor
\cdot	vektorok skaláris szorzatának jele
\times	vektorok vektoriális szorzatának a jele
\tilde{q}	a térfogaton megoszló erőrendszer intenzitása
\tilde{G}	a csúsztató rugalmassági modulus
ν	Poisson szám
$\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$	fajlagos nyúlások
$\gamma_{r\varphi}$	szögváltozás
$\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$	normál feszültségek
$\tau_{r\varphi}$	csúsztató feszültség
\tilde{A}	alakváltozási tenzor
\tilde{F}	feszültségi tenzor
$\tilde{f} = f_r \tilde{e}_r + f_\varphi \tilde{e}_\varphi$	felületi terhelés
$\left. \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{matrix} \right\}$	a keresztmetszet határgörbéi
$r = k_1(\varphi)$	a γ_1 görbe egyenlete
$r = k_2(\varphi)$	a γ_2 görbe egyenlete
$\tilde{n} = n_r \tilde{e}_r + n_\varphi \tilde{e}_\varphi$	a $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ határgörbe „kifelé” irányított normális egységvektora
$\varphi_i = ih, h = \frac{\pi}{N} \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2N-1, 2N$	
$u_i = u_i(r), v_i = v_i(r), \sigma_r(\varphi_i)$	φ -ben diszkrét argumentumú függvények
$\left. \begin{matrix} a_k(r), b_k(r) \\ c_k(r), d_k(r) \end{matrix} \right\}$	együttható függvények
$\lambda_k = 2/h \sin kh/2 \quad (k = 1, 2, \dots, N-1, N)$	
$\mu_{k1}, \mu_{k2}, \mu_{k3}, \mu_{k4}$	a (2.31) karakterisztikus egyenlet gyökei
$\mu_{k1}^x, \mu_{k2}^x, \mu_{k3}^x, \mu_{k4}^x$	a (2.34) karakterisztikus egyenlet gyökei
$\left. \begin{matrix} A_{ki}, B_{ki} \\ C_{ki}, D_{ki} \end{matrix} \right\}$	integrációs állandók
A^T, B^T	sorvektorok
A, B	oszlopvektorok
Egyéb mennyiségeket, változókat a szövegben értelmezzük.	

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehéritő u. 24. IV/1.

1. Bevezetés, rugalmasságtani alapok

Jelen dolgozat tárgya az 1.1 ábrán vázolt z tengely irányában végtelen kiterjedésű, legfeljebb kétszeresen összefüggő keresztmetszetű hengeres test síkalakváltozásával kapcsolatos rugalmasságtani peremértékproblémák megoldására alkalmas módszer ismertetése.

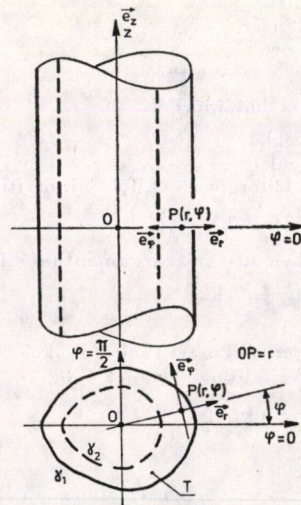
Legyen az 1.1 ábrán vázolt z tengelyű hengeres test síkalakváltozás állapotában. Ekkor az alkalmasan megválasztott r, φ, z hengerkoordináta-rendszerben a vizsgált test egy P pontjának elmozdulásvektora

$$\vec{i} = u(r, \varphi) \vec{e}_r + v(r, \varphi) \vec{e}_\varphi \quad (1.1)$$

alakú lesz. Ennek következménye — homogén, izotrop, lineárisan rugalmas anyagot és kis alakváltozást feltételezve, — hogy a P pontbeli alakváltozási és feszültségi tenzor mátrixai az r, φ, z hengerkoordináta-rendszerben az alábbiak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{\varphi r} & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & 0 \\ \tau_{\varphi r} & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$



1.1. ábra. Síkalakváltozási állapotban levő z tengelyű hengeres test

ahol

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}, \quad (1.4-1.5)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad (1.6)$$

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (1.7)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right], \quad (1.8)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad (1.9)$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \quad (1.10)$$

A rugalmasságtan $\vec{i} = u(r, \varphi)\vec{e}_r + v(r, \varphi)\vec{e}_\varphi$ elmozdulásvektorra felírt

$$\Delta \vec{i} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{i}) + \frac{\vec{q}}{G} = \vec{0} \quad (1.11)$$

alapegyenletéből az $u = u(r, \varphi)$, $v = v(r, \varphi)$ skalárkoordinátákra a következő kapcsolt parciális differenciálegyenlet-rendszert kapjuk (lásd pl. [2]):

$$\Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial A_1}{\partial r} + \frac{q_r}{G} = 0, \quad (1.12)$$

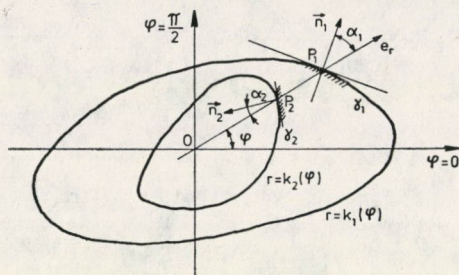
$$\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} + \frac{q_\varphi}{G} = 0. \quad (1.13)$$

Itt az A_1 az A alakváltozási tenzor első skalárinvariánsát jelöli,

$$A_1 = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (1.14)$$

Az (1.12), (1.13) Navier-egyenletek megoldására alkalmazott közelítő módszer — a φ változóban való diszkretizálás — megköveteli, hogy a vizsgált hengeres testek keresztmetszetének γ_1 és γ_2 határgörbéi (l. 1.2 ábrát) az alábbi tulajdonságokkal rendelkezzenek:

a) létezik a keresztmetszet síkjában legalább egy olyan 0 pont, hogy bármely 0 kezdőpontú félegyenes — 0 az r, φ, z hengerkoordináta-rendszer kezdőpontja — egy pontban metszse a γ_1 és γ_2 határgörbéket;



1.2. ábra. A hengeres test keresztmetszetének γ_1 és γ_2 határgörbéi

b) kis φ változás esetén r és α_i ($i = 1, 2$) — α_i a γ_i görbe P_i pontbeli normálisa és az \vec{e}_r vektor által meghatározott szög (lásd 1.2 ábrát) — is kicsit változzék a γ_i ($i = 1, 2$) görbe mentén.

A b) feltétel biztosan teljesül, ha a γ_i görbe szakaszonként vagy teljes egészében Jordan-féle görbe.

2. Navier-egyenlet megoldása polárkoordinátarendszerben φ szerinti parciális diszkretizálás módszerével

A továbbiakban feltesszük, hogy a vizsgált testet térfogaton megoszló erőrendszer nem terheli, azaz $\vec{q} = q_r \vec{e}_r + q_\varphi \vec{e}_\varphi = \vec{0}$. Ez esetben az (1.12), (1.13) egyenletek a következő alakban is felírhatók:

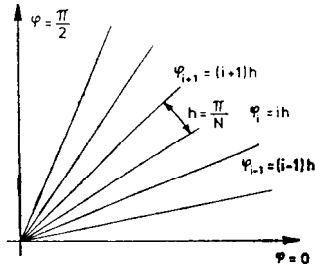
$$(2 - 2\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (2 - 2\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (1 - 2\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - (2 - 2\nu) \frac{u}{r^2} - \frac{3 - 4\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} = 0, \quad (2.1)$$

$$(1 - 2\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1 - 2\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + (2 - 2\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - (1 - 2\nu) \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3 - 4\nu}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.2)$$

Fedjük le az r, φ síkot ($z = 0$) az 0 pontra illeszkedő

$$\varphi_j = jh \quad h = \frac{\pi}{N} \quad 0 \leq r < \infty$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, 2N-1, 2N)$$



2.1. ábra. A keresztmetszet síkjának lefedése 0 kezdőpontú félegyenesekkel

egyenletű félegyenes-sorral (lásd 2.1 ábrát!) és vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned}
 u_i &= u_i(r, \varphi_i) = u_i(r), \\
 v_i &= v(r, \varphi_i) = v_i(r), \\
 u_i' &= \frac{\partial u(r, \varphi_i)}{\partial r} = u_i'(r) \\
 v_i' &= \frac{\partial v(r, \varphi_i)}{\partial r} = v_i'(r), \\
 u_i'' &= \frac{\partial^2 u(r, \varphi_i)}{\partial r^2} = u_i''(r), \\
 v_i'' &= \frac{\partial^2 v(r, \varphi_i)}{\partial r^2} = v_i''(r),
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

($i = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1, 2N$).

A (2.1) és a (2.2) φ -ben parciálisan diszkretizált változatát a

$$\begin{aligned}
 (2 - 2\nu)u_i'' + (2 - 2\nu)\frac{u_i'}{r} + (1 - 2\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_i} - (2 - 2\nu)\frac{u_i}{r^2} - \\
 - \frac{3 - 4\nu}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_i} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_i} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 (1 - 2\nu)v_i'' + (1 - 2\nu)\frac{v_i'}{r} + (2 - 2\nu)\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_i} - \frac{1 - 2\nu}{r^2}v_i' + \\
 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_i} + \frac{3 - 4\nu}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_i} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$(\varphi_i = ih, k_1(\varphi_i) \leq r \leq k_2(\varphi_i); i = 1, 2, \dots, 2N)$$

egyenletrendszerből kapjuk a φ szerinti differenciálhányadosoknak differenciálhányadosokkal való közelítése útján. A differenciálhányadosok differenciálhányadosal való közelítését [4] a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_i} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}, \quad (2.6-2.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_i} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}, \quad (2.9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 2N)$$

egyenletek alapján végezzük. A fenti $0(h^2)$ nagyságrendű közelítést tartalmazó approximációs egyenletek (2.4) és (2.5)-be való helyettesítése a következő differencia-differenciálegyenlet-rendszert adja:

$$(2 - 2\nu)u_i'' + (2 - 2\nu)\frac{u_i'}{r} + (1 - 2\nu)\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \\ - (2 - 2\nu)\frac{u_i}{r^2} - \frac{3 - 4\nu}{r^2}\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + \frac{1}{r}\frac{v_{i+1}' - v_{i-1}'}{2h} = 0, \quad (2.10)$$

$$(1 - 2\nu)v_i'' + (1 - 2\nu)\frac{v_i'}{r} + (2 - 2\nu)\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} - (1 - 2\nu)\frac{v_i}{r^2} + \\ + \frac{1}{r}\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \frac{3 - 4\nu}{r^2}\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0, \quad (2.11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 2N - 1, 2N).$$

A (2.11), (2.12) egyenletrendszer megoldásával a φ változóban diszkrét argumentum értékeknél közvetlenül megkapjuk az elmozdulásvektor-mezőt.

Keressük a (2.10) és (2.11) egyenletek megoldását

$$u_i = u_i(r) = a_0(r) + \sum_{k=1}^{N-1} [a_k(r) \cos k\varphi_i + b_k(r) \sin k\varphi_i] + a_N(r) \cos \pi i, \quad (2.12)$$

$$v_i = v_i(r) = c_0(r) + \sum_{k=1}^{N-1} [c_k(r) \cos k\varphi_i + d(r) \sin k\varphi_i] + c_N(r) \cos \pi i, \quad (2.13)$$

$$\left(h = \frac{\pi}{N}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1\right)$$

alakban.

A fenti alak megválasztását jelen esetben az u, v elmozdulásvektor koordináták egyértékűsége indokolja. A (2.12) és (2.13) alakú megoldások (2.10)-be

és (2.11)-be való helyettesítésével, valamint a *Függelékben* foglaltak alkalmazásával az $a_0(r)$, $a_k(r)$, $b_k(r)$, $a_N(r)$, $c_0(r)$, $c_k(r)$, $d_k(r)$, $c_N(r)$, ($k = 1, 2, \dots, N-1$) együtthatófüggvényekre a következő közönséges változó együtthatójú, homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert vezethetjük le:

$$a_0'' + \frac{a_0'}{r} - \frac{a_0}{r^2} = 0, \quad (2.14)$$

$$c_0'' + \frac{c_0'}{r} - \frac{c_0}{r^2} = 0, \quad (2.15)$$

$$(2-2\nu)a_k'' + (2-2\nu)\frac{a_k'}{r} - \frac{1-2\nu}{r^2}\lambda_k^2 a_k - (2-2\nu)\frac{a_k}{r} - \\ - \frac{3-4\nu}{r^2}\frac{\sin kh}{h}d_k + \frac{1}{r}\frac{\sin kh}{h}d_k' = 0, \quad (2.16)$$

$$(1-2\nu)d_k'' + (1-2\nu)\frac{d_k'}{r} - (2-2\nu)\lambda_k^2 d_k - (1-2\nu)\frac{d_k}{r^2} - \\ - \frac{1}{r}\frac{\sin kh}{h}a_k' - \frac{3-4\nu}{r^2}\frac{\sin kh}{h}a_k = 0, \quad (2.17)$$

$$(2-2\nu)b_k'' + (2-2\nu)\frac{b_k'}{r} - \frac{1-2\nu}{r^2}\lambda_k^2 b_k - (2-2\nu)\frac{b_k}{r^2} + \\ + \frac{3-4\nu}{r^2}\frac{\sin kh}{h}c_k - \frac{1}{r}\frac{\sin kh}{h}c_k' = 0, \quad (2.18)$$

$$(1-2\nu)c_k'' + (1-2\nu)\frac{c_k'}{r} - \frac{2-2\nu}{r^2}\lambda_k^2 c_k - \frac{1-2\nu}{r^2}c_k + \\ + \frac{1}{r}\frac{\sin kh}{h}b_k' - \frac{3-4\nu}{r^2}\frac{\sin kh}{h}b_k = 0, \quad (2.19)$$

$$a_N'' + \frac{a_N'}{r} + \left(1 - \frac{1-2\nu}{1-2\nu}\right)\frac{a_N}{r^2} = 0, \quad (2.20)$$

$$c_N'' + \frac{c_N'}{r} + \left(1 - \frac{2-2\nu}{1-2\nu}\right)\frac{c_N}{r^2} = 0, \quad (2.21)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-1).$$

Itt bevezettük a

$$\lambda_k = \frac{2}{h}\sin kh, \quad (2.22)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-1, N)$$

jelölést. A (2.14), (2.15), (2.20), (2.21) közönséges differenciálegyenletek általános megoldásai az alábbi függvények:

$$a_0(r) = A_{01}r + A_{02}r^{-1} \quad (2.23)$$

$$c_0(r) = C_{01}r + C_{02}r^{-1}, \quad (2.24)$$

$$a_N(r) = A_{N1}'r^{\mu_N} + A_{N2}'r^{-\mu_N} \quad (2.25)$$

$$c_N(r) = C_{N1}'r^{\mu_N^*} + C_{N2}'r^{-\mu_N^*}, \quad (2.26)$$

ahol

$$\mu_N = \sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} \lambda_N^2}, \quad (2.27)$$

$$\mu_N^* = \sqrt{1 - \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \lambda_N^2}. \quad (2.28)$$

A (2.16), (2.17) kapcsolt differenciálegyenletek megoldását

$$a_k(r) = A_k r^{\mu_k}, \quad (2.29)$$

$$d_k(r) = D_k r^{\mu_k}, \quad (2.30)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1)$$

alakban keresve, μ_k -ra az alábbi karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} & (1 - 2\nu)(2 - 2\nu)\mu_k^4 + \mu_k^2 \left\{ \frac{\sin^2 kh}{h^2} - (2 - 2\nu)^2 + (1 - 2\nu)^2 \right\} \lambda_k^2 - \\ & - 2(1 - 2\nu)(2 - 2\nu) \} + (1 - 2\nu)(2 - 2\nu)\lambda_k^4 + \lambda_k^2 [(1 - 2\nu)^2 + \\ & + (2 - 2\nu)^2] + (1 - 2\nu)(2 - 2\nu) - (3 - 4\nu)^2 \frac{\sin^2 kh}{h^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Hasonlóan eljárva a (2.18), (2.19) egyenletekből felépülő differenciálegyenletrendszer megoldásával kapcsolatosan, feltesszük, hogy

$$b_k(r) = B_k r^{\mu_k^*}, \quad (2.32)$$

$$C_k(r) = C_k r^{\mu_k^*} \quad (2.33)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1).$$

A fenti alakú megoldások az itt szereplő μ_k^* -ra a következő karakterisztikus egyenletet adják:

$$\begin{aligned} & (1 - 2\nu)(2 - 2\nu)(\mu_k^*)^4 - (\mu_k^*)^2 \left\{ \frac{\sin^2 kh}{h^2} + [(2 - 2\nu)^2 + (1 - 2\nu)^2] \lambda_k^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2(1 - 2\nu)(2 - 2\nu) \right\} + (1 - 2\nu)(2 - 2\nu) \lambda_k^4 + \\ & + \lambda_k^2 [(1 - 2\nu)^2 + (2 - 2\nu)^2] + (1 - 2\nu)(2 - 2\nu) + (3 - 4\nu)^2 \frac{\sin^2 kh}{h^2} = 0, \quad (2.34) \end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Legyen

$$\alpha_k = \frac{1}{(1 - 2\nu)(2 - 2\nu)} \left\{ \frac{\sin^2 kh}{h^2} - [(2 - 2\nu)^2 + (1 - 2\nu)^2] \lambda_k^2 \right\} - 2, \quad (2.35)$$

$$\beta_k = \lambda_k^4 + \left(\frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} + \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \right) \lambda_k^2 - \frac{3 - 4\nu}{(1 - 2\nu)(2 - 2\nu)} \frac{\sin^2 kh}{h^2} + 1, \quad (2.36)$$

$$\alpha_k^* = \frac{1}{(1 - 2\nu)(2 - 2\nu)} \left\{ \frac{\sin^2 kh}{h^2} + [(2 - 2\nu)^2 + (1 - 2\nu)^2] \lambda_k^2 \right\} - 2, \quad (2.37)$$

$$\beta_k^* = \lambda_k^4 + \left(\frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} + \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \right) \lambda_k^2 + \frac{3 - 4\nu}{(1 - 2\nu)(2 - 2\nu)} \frac{\sin^2 kh}{h^2} + 1 \quad (2.38)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1)$$

A fenti jelölések alkalmazásával a (2.31) és a (2.34) karakterisztikus egyenlet gyökei az alábbi alakban fejezhetők ki:

$$\mu_{k1} = \sqrt{\frac{-\alpha_k + \sqrt{\alpha_k^2 - 4\beta_k}}{2}}, \quad \mu_{k2} = -\sqrt{\frac{-\alpha_k + \sqrt{\alpha_k^2 - 4\beta_k}}{2}}, \quad (2.39-2.40)$$

$$\mu_{k3} = \sqrt{\frac{-\alpha_k - \sqrt{\alpha_k^2 - 4\beta_k}}{2}}, \quad \mu_{k4} = -\sqrt{\frac{-\alpha_k - \sqrt{\alpha_k^2 - 4\beta_k}}{2}}, \quad (2.41-2.42)$$

$$\mu_{k1}^* = \sqrt{\frac{\alpha_k^* + \sqrt{(\alpha_k^*)^2 - 4\beta_k^*}}{2}}, \quad \mu_{k2}^* = -\sqrt{\frac{\alpha_k^* + \sqrt{(\alpha_k^*)^2 - 4\beta_k^*}}{2}}, \quad (2.43-2.44)$$

$$\mu_{k3}^* = \sqrt{\frac{\alpha_k^* - \sqrt{(\alpha_k^*)^2 - 4\beta_k^*}}{2}}, \quad \mu_{k4}^* = -\sqrt{\frac{\alpha_k^* - \sqrt{(\alpha_k^*)^2 - 4\beta_k^*}}{2}}, \quad (2.45-2.46)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Abban az esetben, ha

$$\delta_k = \alpha_k^2 - 4\beta_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N - 1) \quad (2.47)$$

akkor a (2.31), illetve ha

$$\delta_k^* = \alpha_k^* - 4\beta_k^* = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N - 1), \quad (2.48)$$

akkor a (2.34) karakterisztikus egyenlet kétszeres gyökökkel rendelkezik, azaz

$$\mu_{k1} = \mu_{k3} \quad \text{és} \quad \mu_{k2} = \mu_{k4}, \quad (2.49)$$

illetve

$$\mu_{k1}^* = \mu_{k3}^* \quad \text{és} \quad \mu_{k2}^* = \mu_{k4}^*, \quad (2.50)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Ilyen esetben a (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) differenciálegyenletekből felépülő differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása az

$$r^{\mu_{k1}}, r^{\mu_{k2}}, r^{\mu_{k1}} \ln r, r^{\mu_{k2}} \ln r,$$

$$r^{\mu_{k1}^*}, r^{\mu_{k2}^*}, r^{\mu_{k1}^*} \ln r, r^{\mu_{k2}^*} \ln r$$

lineárisan független alrendszerből fog állni.

Így a fentiek szerint az $a_k(r)$, $b_k(r)$, $c_k(r)$, $d_k(r)$ együttható függvények explicit alakja — ha a karakterisztikus egyenletek egyszeres gyökökkel rendelkeznek, akkor

$$a_k(r) = \sum_{i=1}^4 A_{ki} r^{\mu_{ki}}, \quad d_k(r) = \sum_{i=1}^4 B_{ki} r^{\mu_{ki}}, \quad (2.51-2.52)$$

$$b_k(r) = \sum_{i=1}^4 B_{ki} r^{\mu_{ki}^*}, \quad c_k(r) = \sum_{i=1}^4 C_{ki} r^{\mu_{ki}^*}, \quad (2.53-2.54)$$

Ha pedig a karakterisztikus egyenleteknek kétszeres gyökei vannak, akkor

$$a_k(r) = \sum_{i=1}^2 [A_{ki} + A_{k(i+2)} \ln r] r^{\mu_{ki}}, \quad (2.55)$$

$$d_k(r) = \sum_{i=1}^2 [D_{ki} + D_{k(i+2)} \ln r] r^{\mu_{ki}}; \quad (2.56)$$

$$b_k(r) = \sum_{i=1}^2 [B_{ki} + B_{k(i+2)} \ln r] r^{\mu_{ki}^*}, \quad (2.57)$$

$$c_k(r) = \sum_{i=1}^2 [C_{ki} + C_{k(i+2)} \ln r] r^{\mu_{ki}^*}. \quad (2.58)$$

Tehát egy rögzített N -nél az $a_k(r)$, $b_k(r)$, $c_k(r)$, $d_k(r)$, ($k = 1, 2, \dots, N - 1$) együttható függvények alakja (2.51–2.54), illetve a (2.55–2.58) egyenletek által adott, attól függően, hogy a (2.31), (2.34) karakterisztikus egyenleteknek a megfelelő k értékeknél ($k = 1, 2, \dots, N - 1$) egyszeres vagy kétszeres gyökei vannak. $\nu = 1/3$ és $N = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ esetére a (2.31) és (2.34) karakterisztikus egyenlet gyökeit az *I. és II. táblázatok* tartalmazzák. A fenti esetben minden gyök valós és egyszeres.

Az A_{ki} , B_{ki} , C_{ki} , D_{ki} ($k = 1, 2, \dots, N - 1$; $i = 1, 2, 3, 4$) integrációs állandók — feltéve, hogy a (2.31) és (2.34) karakterisztikus egyenletek gyökei egyszeresek — a következő kapcsolatban vannak egymással:

$$A_{ki} = \frac{\sin kh}{h} \frac{3 - 4\nu - \mu_{ki}}{(2 - 2\nu)\mu_{ki}^2 - (1 - 2\nu)\lambda_k^2 - (2 - 2\nu)} D_{ki}, \quad (2.59)$$

$$B_{ki} = -\frac{\sin kh}{h} \frac{3 - 4\nu - \mu_{ki}^*}{(2 - 2\nu)(\mu_k^*)^2 - (1 - 2\nu)\lambda_k^2 - (2 - 2\nu)} C_{ki}, \quad (2.60)$$

A feszültségi tenzor r , φ , z hengerkoordináta-rendszerbeli skalárkoordinátáit az (1.7)–(1.10) egyenletek φ változóban való finitizálása útján felírható φ -ben diszkrét argumentum értékekre vonatkozó egyenletekből tudjuk számítani:

$$\sigma_r(r, \varphi_i) = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu)u'_i + \nu \left(\frac{u'_i}{r} + \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2hr} \right) \right], \quad (2.61)$$

$$\sigma_\varphi(r, \varphi_i) = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\mu'_i}{r} + \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2hr} \right) + \nu u'_i \right], \quad (2.62)$$

$$\sigma_z(r, \varphi_i) = \nu[\sigma_r(r, \varphi_i) + \sigma_\varphi(r, \varphi_i)], \quad (2.63)$$

$$\tau_{r\varphi}(r, \varphi_i) = G \left[\frac{\mu_{i+1} - u_{i-1}}{2hr} - v'_i - \frac{v_i}{r} \right], \quad (2.64)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 2N - 1, 2N).$$

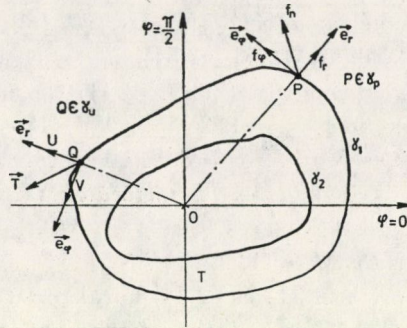
3. Az integrációs állandók meghatározása

Legyen adott a $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ peremgörbe γ_u szakaszán az elmozdulásvektor:

$$u = U, \quad (3.1)$$

$$v = V, \quad (3.2)$$

$$(P(r, \varphi) \in \gamma_u).$$



3.1. ábra. Geometriai és statikai peremfeltételek a $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ határgörbén

A $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ peremgörbe γ_p szakaszán pedig legyen előírt a felületi terhelés:

$$\vec{f} = F\vec{n}, \quad (3.3)$$

azaz

$$f_r = \sigma_r n_r + \tau_{r\varphi} n_\varphi, \quad (3.4)$$

$$f_\varphi = \tau_{r\varphi} n_r + \sigma_\varphi n_\varphi, \quad (3.5)$$

$$(P(r, \varphi) \in \gamma_p),$$

ahol

$$\vec{f} = f_r \vec{e}_r + f_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (3.6)$$

a γ_p görbeszakasz P pontjában a felületi terhelés intenzitása és

$$\vec{n} = n_r \vec{e}_r + n_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (3.7)$$

a γ_p görbeszakasz P pontbeli „anyagból” kifelé irányított normális egységvektora (3.1 ábra). A γ_u és γ_p komplementer görbék, $\gamma = \gamma_u + \gamma_p$. Az $r = k_i(\varphi)$ egyenletű γ_i ($i = 1, 2$) görbe P pontbeli „test anyagából kifelé irányított” normális egységvektora

$$\begin{aligned} \vec{n} = n_r \vec{e}_r + n_\varphi \vec{e}_\varphi &= \frac{k_i(\varphi)}{\{[k_i(\varphi)]^2 + [k'_i(\varphi)]^2\}^{1/2}} \vec{e}_r - \\ &- \frac{k'_i(\varphi)}{\{[k_i(\varphi)]^2 + [k'_i(\varphi)]^2\}^{1/2}} \vec{e}_\varphi, \quad (3.8) \\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad i = 1, 2). \end{aligned}$$

A következőkben a γ_p görbe P pontjára vonatkozó (3.4), (3.5) statikai jellegű kerületi feltételek átalakításával foglalkozunk. Ismeretes, hogy a γ_i görbe mentén

$$\frac{ds}{d\varphi} = \{[k_i(\varphi)]^2 + [k'_i(\varphi)]^2\}^{1/2}, \quad (3.9)$$

valamint

$$\Delta s = \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \quad (3.10)$$

Tekintettel a (3.8), (3.9), (3.10) egyenletekre a (3.4) és (3.5) összefüggések felírhatók

$$f_r \Delta s = (r\sigma_r - r'\tau_{r\varphi}) \Delta\varphi, \quad (3.11)$$

$$f_\varphi \Delta s = (r\tau_{r\varphi} - r'\sigma_\varphi) \Delta\varphi, \quad (3.12)$$

$$\left(r' = \frac{dr}{d\varphi} \right)$$

alakban is. A fenti egyenleteket a γ_p görbe $P_j(k_j(\varphi_j)\varphi_j)$, ($i = 1, 2$) vonatkoztatva, írhatjuk, hogy

$$F_r[k_j(\varphi_i), \varphi_i] = \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} k_j(\varphi_i) u_i' + \frac{2\nu}{1 - 2\nu} u_i + \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} - k_j'(\varphi_i) \left[\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2hk_j(\varphi_j)} - v_i' - \frac{v_i}{k_j(\varphi_i)} \right], \quad (3.13)$$

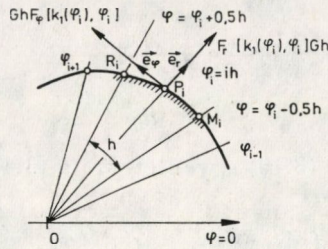
$$F_\varphi[k_j(\varphi_i), \varphi_i] = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - k_j(\varphi_i) v_i' - v_i - k_j'(\varphi_i) \left[\frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \left(\frac{u_i}{k_j(\varphi_i)} + \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2hk_j(\varphi_i)} \right) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} u_i' \right], \quad (3.14)$$

ahol

$$F_r[k_j(\varphi_i), \varphi_i] = \frac{f_r \Delta s}{Gh} \quad (3.15)$$

$$F_\varphi[k_j(\varphi_i), \varphi_i] = \frac{f_\varphi \Delta s}{Gh} \quad (3.16)$$

a γ_p görbeszakaszon a $\varphi = \varphi_i + 0,5h$ és a $\varphi = \varphi_i - 0,5h$ ($0 \leq r < \infty$) egyenletű sugarak által kijelölt $M_i P_i R_i$ íven megoszló terhelés eredőjének a P_i pontbeli \tilde{e}_r és \tilde{e}_φ irányú koordinátájával arányos mennyiség, ennek megfelelően Δs az $M P_i R_i$ görbeszakasz hosszát jelöli (3.2 ábra). Nyilvánvaló, hogy az F_r és F_φ függvény a γ_p görbeszakasz egy diszkrét pontthalmaza felett értelmezett, e tényt az $F_r[k_j(\varphi_i), \varphi_i]$, $F_\varphi[k_j(\varphi_i), \varphi_i]$, ($j = 1, 2$) jelöléssel igyekeztünk kiemelni. A $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ határgörbe pontjaira előírt geometriai peremfeltételeknek — (3.1), (3.2) egyenleteknek — valamint a statikai jellegű peremfeltételeknek — (3.4), (3.5) egyenleteknek — diszkrét argumentum értékeknél való kielégítésével általános esetben egy 8N egyenletből álló 16N — 8 ismer-



3.2. ábra. F_r és F_φ értelmezése a γ_p görbe $P_i(k_j(\varphi_i), \varphi_i)$, ($j = 1, 2$) pontjaiban

retlent — az A_{0i} , C_{0i} , A_{Ni} , C_{Ni} , $i = 1, 2$; A_{ki} , B_{ki} , C_{ki} , D_{ki} , $i = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2, \dots, N - 1$ integrációs állandókat — tartalmazó inhomogén lineáris egyenletrendszer kapunk. Az ismeretlenek egyértelmű meghatározásához még szükséges $8N - 8$ darab lineáris egyenletet a (2.59), (2.60) egyenletek jelentik. Így tehát a kitűzött rugalmasságtani feladat egy lineáris egyenletrendszer felállítására és megoldására redukálódott. Legyen

$$A_0 = [A_{01}, A_{02}]^T, \quad A_N = [A_{N1}, A_{N2}]^T$$

$$C_0 = [C_{01}, C_{02}]^T, \quad C_N = [C_{N1}, C_{N2}]^T,$$

$$A_k = [A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}, A_{k4}]^T,$$

$$B_k = [B_{k1}, B_{k2}, B_{k3}, B_{k4}]^T,$$

$$C_k = [C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}]^T,$$

$$D_k = [D_{k1}, D_{k2}, D_{k3}, D_{k4}]^T,$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1),$$

és

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{N-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{N-1} \end{bmatrix}.$$

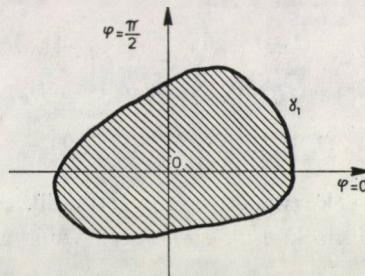
E jelölésekkel az integrációs állandók meghatározására szolgáló egyenletrendszer a vázolt felépítésű lesz:

$$P \cdot x = g \tag{3.17}$$

$$(16N - 8) \times (16N - 8) \cdot (16N - 8) \times 1 \quad (16N - 8) \times 1$$

Itt $\alpha_0, \alpha, \alpha_N, \beta, \gamma_0, \gamma, \gamma_N, \delta, \epsilon$ (3.3 ábra) a $8N$ darab $P_j[k_j(\varphi_i), \varphi_i]$ ($j = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots, 2N$) kerületi pontra felírt peremfeltételekkel kapcsolatos mátrixok, O megfelelő méretű zérus mátrix, E $8N - 8$ -as méretű egységmátrix,

$\underline{\alpha}_0$ $8N \times 2$	$\underline{\alpha}$ $8N \times (4N-4)$	$\underline{\alpha}_N$ $8N \times 2$	$\underline{\beta}$ $8N \times (4N-4)$	$\underline{\beta}_0$ $8N \times 2$	$\underline{\beta}$ $8N \times (4N-4)$	$\underline{\beta}_N$ $8N \times 2$	$\underline{\delta}$ $8N \times (4N-4)$	\underline{A}_0 2×1	\underline{C} $8N \times 1$
\underline{O} $8N \times 2$	\underline{E} $(4N-4) \times (4N-4)$	\underline{O} $8N \times 2$	\underline{O} $(4N-4) \times (4N-4)$	\underline{O} $8N \times 2$	\underline{O} $(4N-4) \times (4N-4)$	\underline{O} $8N \times 2$	\underline{L} $(4N-4) \times (4N-4)$	\underline{A} $(4N-4) \times 1$	
	\underline{O} $(4N-4) \times (4N-4)$	\underline{E} $(4N-4) \times (4N-4)$		\underline{I} $(4N-4) \times (4N-4)$		\underline{O} $(4N-4) \times (4N-4)$		\underline{B} $(4N-4) \times 1$	\underline{O} $8N \times 1$
								\underline{C}_0 2×1	
								\underline{C} $(4N-4) \times 1$	
								\underline{C}_N 2×1	
								\underline{D} $(4N-4) \times 1$	

3.3. ábra. A $Px = g$ egyenletrendszer „szerkezete”

3.4. ábra. Tömör keresztmetszetű hengeres test

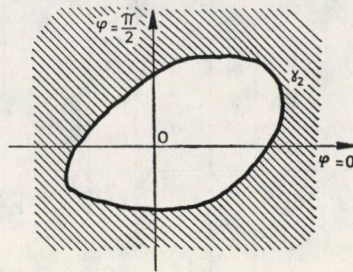
L és L^* pedig olyan diagonál mátrixokat jelölnek, melyek elemeit a (2.59), (2.60) egyenletek alapján lehet képezni. Olyan esetben, amikor a vizsgált test tömör, tehát tartalmazza az r, φ, z hengerkoordináta-rendszer kezdőpontját (3.4 ábra), az u, v elmozdulásvektor koordináták $r = 0$ helyen való korlátos voltából az integrációs állandókra

$$A_{02} = A_{N2} = C_{02} = C_{N2} = 0, \quad (3.18)$$

$$A_{k2} = A_{k4} = B_{k2} = B_{k4} = C_{k2} = C_{k4} = D_{k2} = D_{k4} = 0, \quad (3.19)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-1)$$

egyenletek következnek, feltéve, hogy a (2.31) és (2.34) karakterisztikus egyenletek gyökei valóságosak és egyszeresek. Abban az esetben pedig, ha a keresztmetszet végtelen kiterjedésű tartomány, tartalmazza az xy sík vég-



3.5. ábra. Üreges keresztmetszetű test

telen távoli pontját, — ilyen esetet ábrázol a 3.5 ábra — az elmozdulásvektor u, v koordinátáival kapcsolatos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \varphi), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v(r, \varphi)$$

határértékek véges voltából az integrációs állandókra az

$$A_{01} = A_{N1} = C_{01} = C_{N1} = 0, \quad (3.20)$$

$$A_{k1} = A_{k3} = B_{k1} = B_{k3} = C_{k1} = C_{k3} = D_{k1} = D_{k3} \quad (3.21)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1)$$

egyenletek fennállása következik. Itt ismét feltettük, hogy a (2.31) és a (2.34) karakterisztikus egyenleteknek csak egyszeres valós gyökei vannak.

4. Egy példa az elmozdulásvektormező meghatározására

Legyen feladatunk a 4.1 ábrán vázolt tömör körkeresztmetszetű hengeres test elmozdulás-vektormezőjének előállításása, ha adott a test palástján levő pontok elmozdulása:

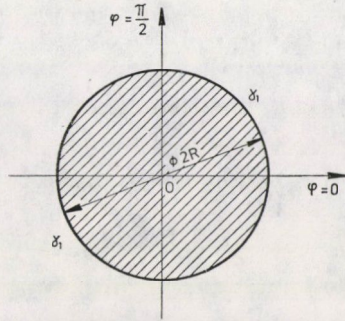
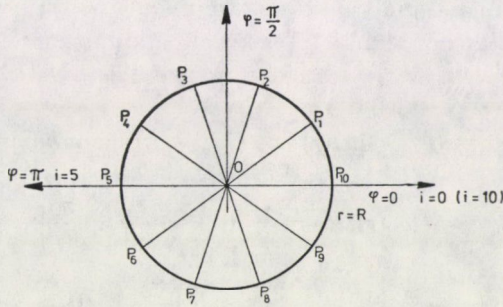
$$u(R, \varphi) = \frac{R}{100} \left(\varphi - \frac{\pi}{5} \right)^2, \quad \text{ha} \quad -\frac{\pi}{5} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{5},$$

$$u(R, \varphi) = 0, \quad \text{ha} \quad \frac{\pi}{5} < \varphi < \frac{9\pi}{5},$$

$$v(R, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Legyen $\nu = 1/3 = 0,3333$ és $N = 5$. A keresztmetszet síkjának $\varphi_i = ih/h = \pi/5, i = 1, 2, \dots, 10$ $0 \leq r < \infty$ egyenletű félegyenesekkel való lefedését a 4.2 ábrán szemléltetjük. Mivel a vizsgált test tömör, az integrációs állandók egy részét azonnal megadhatjuk:

$$A_{02} = A_{52} = C_{02} = C_{52} = A_{12} = A_{22} = A_{32} = A_{42} = A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = B_{12} = B_{22} = B_{32} = B_{42} = B_{14} = B_{24} = B_{34} = B_{44} = C_{12} = C_{22} = C_{32} = C_{42} = C_{14} = C_{23} = C_{34} = C_{44} = D_{12} = D_{22} = D_{32} = D_{42} = D_{14} = D_{24} = D_{34} = D_{44} = 0.$$

4.1. ábra R sugarú tömör körhenger4.2. ábra. Az R sugarú körkeresztmetszet lefedése 0 kezdőpontú félegyenésekkel

A továbbiakban $R = 1$ m-el számolva a hiányzó integrációs állandókra a P_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) kerületi pontokra vonatkozó geometriai peremfeltételek és (2.59), (2.60) egyenletek kielégítésével az alábbi végeredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= B_{13} = B_{21} = B_{23} = B_{31} = B_{33} = B_{41} = B_{43} = 0, \\
 C_{41} &= C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{33} = C_{41} = C_{43} = 0, \\
 A_{01} &= 3,9476 \cdot 10^{-4}, \\
 A_{11} &= -1,027 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-0,9956}, \\
 A_{13} &= 8,9228 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{0,61963}, \\
 A_{21} &= -1,927 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2,2238}, \\
 A_{23} &= 9,8223 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-0,1528}, \\
 A_{31} &= -8,2429 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-3,7331}, \\
 A_{33} &= 8,702 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-0,6207}, \\
 A_{41} &= -1,2566 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-4,97174}, \\
 A_{43} &= 8,0206 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-0,8227}, \\
 A_{51} &= 3,9476 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2,183}, \\
 D_{11} &= 1,27903 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-0,9956}, \\
 D_{13} &= -1,27903 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{0,61063}, \\
 D_{21} &= 9,1881 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2,2238}, \\
 D_{23} &= -9,1881 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-0,1528}, \\
 D_{31} &= 4,15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-3,7331}, \\
 D_{33} &= -4,15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-0,6207}, \\
 D_{41} &= 1,3454 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-4,9714}, \\
 D_{43} &= -1,3454 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-0,8227}.
 \end{aligned}$$

A megoldás explicit alakja pedig

$$u_i = u_i(r) = A_{01}r + (A_{11}r^{\mu_{11}} + A_{13}r^{\mu_{13}}) \cos \pi/5 t + (A_{21}r^{\mu_{21}} + A_{23}r^{\mu_{23}}) \cos 2\pi/5 i + (A_{31}r^{\mu_{31}} + A_{33}r^{\mu_{33}}) \cdot \cos 3\pi/5 i + (A_{41}r^{\mu_{41}} + A_{43}r^{\mu_{43}}) \cos 4\pi/5 + A_{51}r^{\lambda_5} \cos \pi i,$$

$$v_i(r) = (D_{11}r^{\mu_{11}} + D_{13}r^{\mu_{13}}) \sin \pi/5 i + (D_{21}r^{\mu_{21}} + D_{23}r^{\mu_{23}}) \sin 2\pi/5 i + (D_{31}r^{\mu_{31}} + D_{33}r^{\mu_{33}}) \cdot \sin 3\pi/5 i + D_{41}r^{\mu_{41}} + D_{43}r^{\mu_{43}} \sin 4\pi/5 i,$$

($i = 1, 2, \dots, 9, 10$; $0 \leq r \leq R$, $R = 1$ m)
 lesz, ahol $\lambda_5 = 3,183$ és

$$\begin{array}{ll} \mu_{11} = 1,9956, & \mu_{13} = 0,38037, \\ \mu_{12} = 3,2238, & \mu_{23} = 1,1528, \\ \mu_{31} = 4,7331, & \mu_{33} = 1,6207, \\ \mu_{41} = 5,9714, & \mu_{43} = 1,8227. \end{array}$$

5. Fűggelék

A dolgozatban használt diszkrét argumentumú trigonometrikus függvényekkel kapcsolatban az alábbi tétel került alkalmazásra.

Ha

$$\alpha_0(r) + \sum_{k=1}^{N-1} [\alpha_k(r) \cos khi + \beta_k(r) \sin khi] + \alpha_N(r) \cos \pi i = 0, \quad \left(h = \frac{\pi}{N} \right) \quad (5.1)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1),$$

akkor

$$\alpha_0(r) = 0, \quad (5.2)$$

$$\alpha_k(r) = 0, \quad (5.3)$$

$$\beta_k(r) = 0, \quad (5.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1),$$

$$\alpha_N(r) = 0. \quad (5.5)$$

A fenti tétel bizonyításához adjuk össze - i szerint - az (5.1) egyenletrendszer egyenleteit, és alkalmazzuk a trigonometria jól ismert [1]

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \cos khi = \sum_{i=0}^{2N-1} \sin khi = \sum_{i=0}^{2N-1} \cos \pi i = 0 \quad (5.6)$$

azonosságait. Ezáltal a következő egyenletet kapjuk:

$$2N\alpha_0(r) = 0, \quad (5.7)$$

azaz

$$\alpha_0(r) = 0. \quad (5.8)$$

Szorozzuk meg az (5.1) egyenlet mindkét oldalát $\cos \pi i$ -vel, a kapott egyenleteket adjuk össze i szerint, továbbá alkalmazzuk a trigonometria [1]

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \cos khi \cos \pi i = \sum_{i=0}^{2N-1} \sin khi \cos \pi i = \sum_{i=0}^{2N-1} \cos \pi i = 0, \quad (5.9)$$

azonosságait. Ily módon eljárva az alábbi eredményt kapjuk:

$$2N\alpha_N(r) = 0, \quad (5.11)$$

azaz

$$\alpha_N(r) = 0. \quad (5.12)$$

Ha az (5.1) egyenlet mindkét oldalát $\cos lhi$ -vel megszorozzuk, majd a kapott egyenleteket i szerint összegezzük, akkor a trigonometria [1]

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \sin khi \cos khi = 0, \quad (5.13)$$

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \cos khi \cos lhi = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq l, \\ N, & \text{ha } k = l, \end{cases} \quad (5.14)$$

$$(1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq l \leq N-1)$$

azonosságainak a felhasználásával a bizonyítandó (5.3) egyenletet kapjuk. Végül teljesen hasonlóan az (6.1) egyenletből $\sin lhi$ -vel való átszorozásból kapott egyenletek i szerinti összegezésével előállított egyenletből, a

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \sin lhi \sin khi = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq l \\ N, & \text{ha } k = l \end{cases} \quad (5.15)$$

azonosság alkalmazásával az (5.4) egyenletet tudjuk levezetni.

I. táblázat

A (2.31)-es karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\left(\nu = \frac{1}{3}; N = 5, 6, 7, 8, 9, 10 \right)$$

N = 5

k	μ_{k1}	μ_{k2}
1	1,99956	0,38037
2	3,22388	1,15277
3	4,73312	1,62068
4	5,97144	1,82274

N = 8

k	μ_{k1}	μ_{k2}
1	2,00006	0,24376
2	3,11136	1,0803
3	4,51781	1,77808
4	6,13568	2,20951
5	7,72355	2,47083
6	9,04985	2,62652
7	9,92789	2,70963

N = 6

k	μ_{k1}	μ_{k2}
1	1,99990	0,320057
2	3,17599	1,12247
3	4,68548	1,68627
4	6,20045	1,97624
5	7,30285	2,11456

N = 9

k	μ_{k1}	μ_{k2}
1	2,00007	0,216012
2	3,09075	1,06692
3	4,44427	1,81079
4	6,03695	2,30049
5	7,68944	2,61471
6	9,21166	2,81700
7	10,4359	2,94305
8	11,2285	3,01223

N = 10

k	μ_{k1}	μ_{k2}
1	2,00007	1,94776
2	3,07513	1,05611
3	4,38228	1,83734
4	5,93572	2,37834
5	7,60335	2,74131
6	9,23007	2,98696
7	10,6718	3,15207
8	11,8028	3,20321
9	12,5239	3,31739

$$\mu_{k1} = -\mu_{k3} \quad \mu_{k3} = -\mu_{k5}$$

II. táblázat

A (2.34)-es karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\left(\nu = \frac{1}{3}; N = 5, 6, 7, 8, 9, 10 \right)$$

N = 5

k	μ_{k1}^*	μ_{k2}^*
1	2,4966	1,35933
2	4,46085	1,46058
3	5,71496	1,63661
4	6,29724	1,80647

N = 8

k	μ_{k1}^*	μ_{k2}^*
1	2,54122	1,36914
2	4,81717	1,49461
3	6,74857	1,71348
4	8,23425	1,97639
5	9,25218	2,25001
6	9,85679	2,49649
7	10,1509	2,67176

N = 6

k	μ_{k1}^*	μ_{k2}^*
1	2,51879	1,36428
2	4,63390	1,47796
3	6,19662	1,67725
4	7,14497	1,90028
5	7,58723	2,08338

N = 9

k	μ_{k1}^*	μ_{k2}^*
1	2,54735	1,37048
2	4,86860	1,49899
3	6,91103	1,72247
4	8,57797	1,99334
5	9,82679	2,28396
6	10,6725	2,56658
7	11,1776	2,80881
8	11,4290	2,97486

N = 7

k	μ_{k1}^*	μ_{k2}^*
1	2,53234	1,36724
2	4,74368	1,48814
3	6,52213	1,69976
4	7,77240	1,94885
5	8,51690	2,19141
6	8,87075	2,37364

N = 10

k	μ_{k1}^*	μ_{k2}^*
1	2,55175	1,37138
2	4,90592	1,50210
3	7,03092	1,72868
4	8,83809	2,00449
5	10,2705	2,30499
6	11,3381	2,60842
7	12,0544	2,89097
8	12,4863	3,12496
9	12,7059	3,28130

$$\mu_{k1}^* = -\mu_{k2}^*, \quad \mu_{k3}^* = -\mu_{k4}^*$$

IRODALOM

1. JORDAN, CH.: Calculus of Finite Differences. Budapest 1939
2. MALVERN, L. E.: Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall, Inc. Engewood Cliffs, New Jersey 1967
- Лурье, А. И.: Теория упругости, Издательство Наука, Москва 1970
4. MICHLIN, S. G.—SMOLICZKI, H. L.: Näherungsmethoden zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen. Leipzig 1969

An Approximate Method for the Solution of Planar Problems of the Theory of Elasticity. — An approximate method to be applied for solving inplane problems of the theory of elasticity is described. The principle of the approximate procedure is the solution for Navier's partial differential equation established for the displacement vector by applying functions of discret arguments with one single variable.

Ein Annäherungsverfahren zur Lösung zweiachsiger Aufgaben der Elastizitätslehre. — Behandelt wird eine Annäherungsmethode zur Lösung zweiachsiger Aufgaben der Elastizitätslehre. Das Prinzip des Verfahrens ist die Lösung der für den Verschiebungsvektor aufgeschriebenen Navierschen Partialdifferentialgleichung durch Anwendung von Funktionen einer Veränderlichen diskreten Argumentes.