

EGYIK VÉGÜKÖN BEFOGOTT, MÁSIK VÉGÜKÖN TERHELT PRIZMATIKUS RUDAK RUGALMAS NAGY ALAKVÁLTOZÁSA

BONDY PÁL*

[Beérkezett 1975. június 6-án]

Egyik végén befogott, a szabad végén síkbeli erővel és erőpárral terhelt egyenes rúd (rugó) nagy hajlítási alakváltozását vizsgálva, a szerző levezeti hatványsorok alakjában az alakváltozás képleteit, a rugalmas vonal differenciálegyenletének kis alakváltozásoknál jogos egyszerűsítése nélkül.

Szimmetrikus keresztmetszetű prizmatikus rudak rugalmas alakváltozásának számítása a szimmetriasík működő erők esetében a rugalmas vonal ismert differenciálegyenletéből indul ki:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (1)$$

Kis alakváltozások esetében $y' \approx 0$, miért is ilyenkor a fenti képlet helyett az

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} \quad (1a)$$

képlet alkalmazható.

Nagyobb alakváltozások esetében az (1a) képlet helyett az (1) képlethez kell folyamodni, mely — kivételektől eltekintve — elliptikus integrálokra vagy elliptikus függvényekre vezet [1–5, 8]. Az ezekkel járó nehézségek kiküszöbölésére célszerűnek látszik egyszerűen kezelhető közelítő képleteket felállítani, amelyek a szokásos, kis alakváltozásokra érvényes képletek bővítései. Ezek a képletek hatványsorok; több szerző is foglalkozik velük, pl. [6, 7, 8]. További előnyük e képleteknek, hogy az alakváltozást a terhelés függvényében adják meg, és nem fordítva. Itt most a [7] szerinti módszer továbbfejlesztéseként arra az esetre vezetünk le képleteket, amikor a szimmetrikus keresztmetszetű prizmatikus rúd egyik vége befogott, másik vége pedig a szimmetriasíkban terhelt. A nyíróerők hatását, valamint a rúdtengelynek az axiális erők hatására bekövetkező hosszváltozását nem vesszük figyelembe.

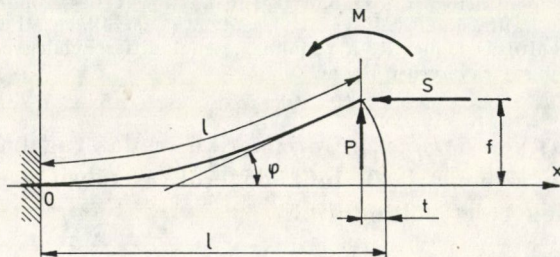
* Bondy Pál, Általános Géptervező Iroda, 1253 Budapest, Pf. 10.

Az ábra szerinti koordinátarendszerrel és jelölésekkel a rugalmas vonal egyenlete

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M + P(l-t-x) + S(f-y)}{EI}. \quad (2)$$

A bal oldal nevezőjének sorbafejtése és átrendezés után

$$y'' = \frac{1}{EI} \left(1 + \frac{3}{2} y'^2 + \frac{3}{8} y'^4 + \dots \right) [M + P(l-t-x) + S(f-y)]. \quad (3)$$



I. ábra

Bevezetjük a rugalmas vonal egyenletének megközelítéseként az

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n \quad (4)$$

hatványsort. Ebből

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{n-1}, \quad (5)$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2}, \quad (6)$$

$$y'^2 = a_1^2 + 4a_1 a_2 x + (4a_2^2 + 6a_1 a_3) x^2 + \dots + \left[\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) a_i a_{n-i} \right] x^{n-2}. \quad (7)$$

Behelyettesítjük a (4), (6) és (7) sorokat a (3) egyenletbe. Rendezés után, az

$$x = 0, y = 0, y' = 0$$

peremfeltételekkel, x hatványai együtthatóinak egyeztetése alapján

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{M + P(l-t) + Sf}{2EI}, \quad a_3 = -\frac{P}{6EI}, \quad \text{stb.}$$

Az

$$EI = H \quad (8)$$

jelöléssel a rugalmas vonal egyenlete

$$\begin{aligned}
 y = & \frac{M + P(l-t) + Sf}{2H} x^2 - \frac{P}{6H} x^3 + \left\{ \frac{[M + P(l-t) + Sf]^3}{8H^3} - \right. \\
 & - \frac{[M + P(l-t) + Sf]S}{24H^2} \left. \right\} x^4 + \left\{ - \frac{3[M + P(l-t) + Sf]^2 P}{20H^3} + \right. \\
 & + \frac{PS}{120H^2} \left. \right\} x^5 + \left\{ \frac{[M + P(l-t) + Sf]P^2}{16H^3} + \frac{[M + P(l-t) + Sf]^5}{16H^5} - \right. \\
 & - \frac{11[M + P(l-t) + Sf]^3 S}{240H^4} + \frac{[M + P(l-t) + Sf]S^2}{720H^3} \left. \right\} x^6 + \\
 & + \left\{ - \frac{15[M + P(l-t) + Sf]^4 P}{112H^5} + \frac{27[M + P(l-t) + Sf]^2 PS}{560H^4} - \right. \\
 & - \frac{P^3}{112H^3} - \frac{PS^2}{5040H^3} \left. \right\} x^7 + \dots
 \end{aligned} \quad (9)$$

A rúdvégi lehajlás

$$y_{x=l-t} = f = \frac{M + P(l-t) + Sf}{2H} (l-t)^2 - \frac{P}{6H} (l-t)^3 + \dots \quad (10)$$

(a (9) egyenletben l helyett az $l-t$ kifejezést is írva).A rúd végének elfordulása (5) és (9) alapján, az $x = l-t$ helyen,

$$\begin{aligned}
 y'_{x=l-t} = \operatorname{tg} \varphi = & \frac{M + P(l-t) + Sf}{H} (l-t) - \frac{P}{2H} (l-t)^2 + \left\{ \frac{[M + P(l-t) + Sf]^3}{2H^3} - \right. \\
 & - \frac{[M + P(l-t) + Sf]S}{6H^2} \left. \right\} (l-t)^3 + \left\{ - \frac{3[M + P(l-t) + Sf]^2 P}{4H^2} + \right. \\
 & + \frac{PS}{24H^2} \left. \right\} (l-t)^4 + \left\{ \frac{3[M + P(l-t) + Sf]P^2}{8H^3} + \frac{3[M + P(l-t) + Sf]^5}{8H^5} - \right. \\
 & - \frac{11[M + P(l-t) + Sf]^3 S}{40H^4} + \frac{[M + P(l-t) + Sf]S^2}{120H^3} \left. \right\} (l-t)^5 + \\
 & + \left\{ - \frac{15[M + P(l-t) + Sf]^4 P}{16H^5} + \frac{27[M + P(l-t) + Sf]^2 PS}{80H^3} - \right. \\
 & - \frac{P^3}{16H^3} - \frac{PS^2}{720H^3} \left. \right\} (l-t)^6 + \dots
 \end{aligned} \quad (11)$$

A rúd végének x -irányú elmozdulását az a feltétel adja meg, hogy a rugalmas vonal l hossza az alakváltozás során nem változik. Akkor

$$l = \int_0^{l-t} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{l-t} \left(1 + \frac{y'^2}{2} - \frac{y'^4}{8} + \dots \right) dx, \quad (12)$$

$$t = \int_0^{l-t} \left(\frac{y'^2}{2} - \frac{y'^4}{8} + \dots \right) dx.$$

A t az egyenlet mindkét oldalán előfordul. A probléma iterációval oldható meg: az integrál felső határát először l értékkel közelítjük meg. Ily módon első közelítésben

$$t^* = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx - \frac{1}{8} \int_0^l y'^4 dx + \dots \quad (13)$$

$$t^* = \frac{l^3}{6H^2} M^2 + \frac{l^5}{15H^2} P^2 + \frac{5l^4}{24H^2} MP + \frac{l^3}{3H^2} MSf + \dots$$

A (13) sor csak azokat a tagokat tartalmazza, amelyek P , S , M és f -ben együttesen harmadfokúnál nem magasabb fokúak, feltételezve, hogy a gyakorlat részére ez elegendő. A t^* érték bevezetése t iterációs számítása során már negyedfokú tagokat adna, ezért nem is kell tovább menni, az itteni pontossági szinten

$$t^* = t. \quad (14)$$

t értékét behelyettesítve (10)-be, a lehajlás

$$f = \frac{l^2}{2H} M + \frac{l^3}{3H} P - \frac{l^4}{24H^2} MS - \frac{l^5}{30H^2} PS + \frac{l^2}{2H} Sf -$$

$$- \frac{l^4}{24H^3} M^3 - \frac{4l^7}{105H^3} P^3 - \frac{11l^6}{80H^3} MP^2 - \frac{3l^5}{20H^3} M^2P + \quad (15)$$

$$+ \frac{l^6}{720H^3} MS^2 + \frac{l^7}{840H^3} PS^2 - \frac{l^4}{24H^2} S^2f + \dots,$$

és az elfordulás

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{H} M + \frac{l^2}{2H} P - \frac{l^3}{6H^2} MS - \frac{l^4}{8H^2} PS + \frac{l}{H} Sf +$$

$$+ \frac{l^3}{3H^3} M^3 - \frac{l^6}{240H^3} P^3 + \frac{3l^4}{3H^3} M^2P + \frac{l^5}{10H^3} MP^2 + \quad (16)$$

$$+ \frac{l^5}{120H^3} MS^2 + \frac{l^6}{144H^3} PS^2 - \frac{l^3}{6H^2} S^2f + \dots$$

A (13), (15) és (16) egyenletek még a jobb oldalon is tartalmazzák az f lehajlást. Alkalmazásuk kényelmesebb lesz, ha további átalakítással explicit alakra hozzuk. A módszert röviden a (13) egyenleten mutatjuk be.

Felírjuk f egyenletét MacLaurin-sor alakjában:

$$f(M, P, S) = \left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_0 M + \left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_0 P + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)_0 S + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial M^2}\right)_0 M^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial P^2}\right)_0 P^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)_0 S^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial M \partial P}\right)_0 MP + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial M \partial S}\right)_0 MS + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial P \partial S}\right)_0 PS \right] + \dots \quad (17)$$

A sor együtthatói (13) differenciálásával és az

$$M = P = S = 0, f = 0$$

peremfeltételek alapján kiszámíthatók. Ezekkel f sora végül

$$j = \frac{l^2}{2H} M + \frac{l^3}{3H} P - \frac{4l^7}{105H^3} P^3 - \frac{l^4}{24H^3} M^3 + \frac{2l^5}{15H^2} PS + \\ + \frac{5l^4}{24H^2} MS - \frac{3l^5}{20H^3} M^2P - \frac{11l^6}{80H^3} MP^2 + \frac{17l^7}{315H^3} PS^2 + \\ + \frac{6l^6}{720H^3} MS^2 + \dots \quad (18)$$

Hasonlóképpen eljárva, végeredményként

$$t = \frac{l^5}{15H^2} P^2 + \frac{l^3}{6H^2} M^2 + \frac{97}{5040} P^2S + \frac{5l^4}{24H^2} MP + \\ + \frac{2l^5}{15H^3} M^2S - \frac{11l^4}{240H^3} MPS + \dots, \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l^2}{2H} P - \frac{l^6}{240H^3} P^3 + \frac{l}{H} M + \frac{l^3}{3H^3} M^3 + \frac{3l^4}{8H^3} M^2P + \\ + \frac{l^5}{10H^3} MP^2 - \frac{l^4}{8H^2} PS + \frac{47l^6}{240H^3} PS^2 + \frac{2l^3}{3H^2} MS + \\ + \frac{2l^5}{15H^3} MS^2 + \dots, \quad (20)$$

és a rugalmas vonal egyenlete

$$\begin{aligned}
 y = & \left[\frac{1}{2H} M + \frac{l}{2H} P - \frac{l^5}{30H^3} P^3 - \frac{l^3}{12H^3} M^2P - \frac{5l^4}{48H^3} MP^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{l^3}{6H^2} PS + \frac{l^2}{4H^2} MS + \frac{l^5}{15H^2} PS^2 + \frac{5l^4}{48H^3} MS^2 \right] x^2 - \frac{1}{6H} Px^3 + \\
 & + \left[\frac{1}{8H^3} M^3 + \frac{3l}{8H^3} M^2P + \frac{3l^2}{8} MP^2 + l^3P^3 - \frac{1}{24H^2} MS - \right. \\
 & \left. - \frac{l}{24H^3} PS - \frac{l^3}{72H^3} PS^2 - \frac{l^2}{48H^3} MS^2 \right] x^4 + \left[-\frac{3}{20H^3} M^2P - \frac{3l}{10H^3} MP^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{3l^2}{20H^3} P^3 + \frac{1}{120H^2} PS \right] x^5 + \left[\frac{1}{16H^3} MP^2 + \frac{l}{16H^3} P^3 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{720H^3} MS^2 + \frac{l}{720H^3} PS^2 \right] x^6 + \left[-\frac{1}{112H^3} P^3 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{5040H^3} PS^2 \right] x^7 + \dots
 \end{aligned} \tag{21}$$

Fáradtságos, de elvi nehézségekkel nem járó számítási munka árán még a sorok magasabb hatványú tagjai is kiszámíthatók.

A (18), (19) és (20) sorok az

$$m = \frac{Ml}{H}, \quad p = \frac{Pl^2}{H} \quad \text{és} \quad s = \frac{Sl^2}{H}$$

kifejezések bevezetésével dimenzió nélküli, jobban áttekinthető alakra hozhatók. Ez megkönnyítheti az alkalmazásukat, mert mindjárt a numerikus számítás kezdetekor el lehet dönteni, elhanyagolhatók-e egyes tagok. Tehát

$$\begin{aligned}
 f/l = & 0,500 m + 0,333 p - 0,038 p^3 - 0,042 m^3 + 0,133 ps + 0,208 ms - \\
 & - 0,150 m^2p - 0,138 mp^2 + 0,054 ps^2 + 0,085 ms^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 t/l = & 0,067 p^2 + 0,167 m^2 + 0,019 p^2s + 0,208 mp + 0,133 m^2s - \\
 & - 0,046 mps + \dots
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \text{tg } \varphi = & 0,500 p - 0,004 p^3 + m + 0,333 m^3 + 0,375 pm^2 + 0,100 p^2m - \\
 & - 0,125 ps + 0,196 ps^2 + 0,667 ms + 0,133 ms^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Az

$$(1 + y'^2)^{3/2}$$

sorbafejtés csak $y'^2 = 1$ -ig konvergens, az alkalmazott

$$1 + \frac{3}{2} y'^2 + \frac{3}{8} y'^4$$

közelítés még $y'^2 = 1$ -nél is csak 1,7% hibával jár. Ha a rúdvég elfordulása ennek megfelelően $\varphi = 45^\circ$, a rugalmas vonal mentén az emelkedés mindenhol kisebb és a szóban forgó hiba hatása még az említettnél is kisebb.

$y, f, \operatorname{tg} \varphi$ és t sorainak konvergenciáját nem sikerült bebizonyítani, de a [7]-ben $M = \text{const}$, $P = S = 0$ terhelésre közölt vizsgálatok, valamint néhány számpélda valószínűsíti, hogy a sorok hibája a matematikailag exakt megoldáshoz viszonyítva csak néhány százalék, ameddig el nem érik az

$$f/l = 1/3, \varphi = 50^\circ$$

határok egyikét.

Mellékesen megjegyezzük, hogy hibaforrások az E fizikai állandó és a méretek bizonytalanságában is rejlenek [10], úgyhogy a képletekkel szemben túlzott pontossági igényeknek nincs gyakorlati jelentőségük.

IRODALOM

1. SAALSCHÜTZ, L.: Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft, Leipzig 1880
2. BARTEN, H. J.: On the Deflection of a Cantilever Beam. *Quarterly of Appl. Math.* 2 (1944), 3, 1945
3. BISSHOPP, K. E. — DRUCKER, D. C.: Large Deflections of Cantilever Beams. *Quarterly of Appl. Math.* 3 (1945)
4. CONWAY, H. D., Large Deflections of Simply Supported Beams. *Philos. Magazine* 38 (1947)
5. HARINGX, J. A.: The Cross Spring Pivot as a Constructional Element. *Appl. Scient. Research*, A 1, (1949) No. 4
6. AVIENGNE, J.: Intégration sous forme de série de l'équation fondamentale et complète de la flexion plane par une méthode de récurrence. *La Technique des Travaux* 36 (1960), Mars-Avril
7. BONDY, P.: Egyenes rugók nagyobb alakváltozásának számítása hajlítás esetén. *GÉP* 12 (1960) 8. sz.
8. FRISCH-FAY, R.: Flexible Bars, London 1960
9. LÖBEL, G.: Große Biegeverformungen bei schlanken geraden und kreisförmigen Trägern. *ZAMM* 43 (1963), Nr. 1/2.
10. BONDY, P.: Hibaszámítás a tervezésben — a csavarrugó mint példa. *GÉP* 14 (1963) 4. sz.

Large Elastic Deformation of Prismatic Cantilever Bars with Loads Applied at the Free End. The author investigates the large deflections of a cantilever bar (or a straight spring) to which at the free end a force and a couple are applied. Without recourse to the usual neglects justified in the theory of small deformations, he deduces power series yielding the equations of the elastica, the end slope and the end displacements.

Große elastische Formänderung von einseitig eingespannten, am freien Ende belasteten prismatischen Stäben. Für die Berechnung der großen Biegeverformung eines einseitig eingespannten, am freien Ende durch eine Kraft und ein Kräftepaar belasteten geraden Stabes (oder einer geraden Feder) werden Potenzreihen für die Formänderungen abgeleitet, wobei die bei kleinen Formänderungen übliche und berechnete Vereinfachung der D. Gl. der elastischen Linie nicht benutzt wird.