VÁLTOZÓ KERESZTMESZETŰ, EGYENES RUDAKBÓL ÁLLÓ TÉRBELI RÚDSZERKEZET REZGÉSI SAJÁTFREKVENCIÁINAK JAVÍTHATÓ KÖZREFOGÁSA

III. RÉSZ

BOSZNAY ÁDÁM*
A MŰSZ. TUD. DOKTORA

[Beérkezett 1975. május 19-én]

A dolgozat e folyóiratban megjelent első két részét e harmadik rész kiegészíti — az ismertetett elmélet gyakorlati alkalmazásának előmozdítására — a követendő számítás pontokba szedett vezérfonalával, továbbá ismertet egy számpéldát, és ismerteti annak eredményeit.

Bevezetés

A dolgozatnak ebben a folyóiratban megjelent első két része a tárgyalt elméletet állította a gondolatmenet középpontjába. Ez a befejező rész az ismertetett elmélet gyakorlati alkalmazása során követendő lépéseket foglalja össze, továbbá egy számpéldával illusztrálja az elméletnek a jelenleg rendelkezésünkre álló számítógép(ek)re való programozhatóságát. Az I. illetve a II. rész egyenleteire úgy hivatkozunk, hogy a megfelelő egyenletszám elé I- illetve II-t írunk.

A számítógépi programokat szerző irányításával Czeglédi Gyula, Richlik György, Kálmán Sándor és Szervánszky György tervezték meg; a számpéldával kapcsolatos futtatásokat ellenőrizték és kiértékelték. E fáradságos és nagy szakértelmet igénylő munkáért, valamint elvi kérdésekben való tanácskozásokért szerző köszönetét fejezi ki.

2. A gyakorlati alkalmazás vezérfonala

A dolgozat előző két részében bemutatott elmélet gyakorlati alkalmazása során az alábbiak szerint célszerű haladni.

Az egyes pontok után zárójelben hivatkozunk a megfelelő egyenletekre, illetve pontokra. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az elméleti rész általában csak az alsó korlátok számítását részletezi.

2.1. A rúdszerkezet operátoros amplitúdó-eloszlási egyenletét, valamint mellékfeltételi egyenletrendszerét elő kell állítani. E munka során mind a

* Prof. Dr. Bosznay Ádám, 1111 Budapest, Goldmann György tér 3.

I. táblázat

Az 1. ábra szerinti rúdszerkezet sajátfrekvenciáinak korlátai sec^{-1}-ben

	„a" feladat	Javított alsó korlátok			
		m = 13	m = 14	m = 15	m = 16
1	186,1068	200,8565	208,2323	223,0863	267,8347
2	251,3877	275,7092	287,9766	312,6816	387,1067
3	393,7116	416,0206	427,4496	450,4664	519,8053
4	409,0567	433,8951	446,2548	471,1457	546,1307
5	420,7336	451,4326	467,0379	498,4652	593,1413
6	532,4764	564,6564	580,8693	613,5203	711,8827
7	541,0250	584,5781	606,2132	649,7840	781,0427
8	716,6454	792,6218	830,6621	907,2711	1138,0587
9	1008,7316	1083,3670	1120,7843	1196,1387	1423,1467
10	1078,1547	1154,8077	1192,9403	1269,7352	1501,0827
11	1238,4590	1323,9478	1366,6182	1452,5516	1711,4293
12	1276,6659	1362,3196	1405,1745	1491,4797	1719,6914
13	1384,9676	1427,3463	1520,3844	1611,5066	1751,4773
14	1427,3463	1475,1375	1639,9145	1713,6870	1886,0160
15	1639,9145	1639,9145	1640,8613	1783,7480	2214,2000
16	1713,6870	1713,6870	1713,6870	2041,2648	2526,6373

	Javított felső korlátok				„f" feladat
	m = 16	m = 15	m = 14	m = 13	
	326,3614	366,7493	421,6067	497,6147	1145,9299
	484,6141	551,6205	642,8589	769,2747	1846,3355
	610,6493	673,0765	758,0798	875,8565	1879,0114
	644,3717	711,8822	803,8070	931,1739	2016,8646
	717,1806	802,4595	918,4838	1079,2974	2449,7309
	840,7514	929,3091	1049,8925	1216,9674	2640,6721
	953,0103	1071,1853	1232,0965	1455,0480	3354,8628
	1440,4234	1648,2063	1931,1310	2323,1389	5662,7891
	1720,5596	1924,9397	2203,2309	2588,8190	5873,8224
	1804,1810	1012,4680	2296,0791	2689,0381	6036,8251
	2050,5963	2283,6694	2601,0301	3040,7510	6786,3225
	2092,1115	2326,1928	2644,9264	3086,5495	6848,4779
	2245,6626	2492,8091	2829,3327	3295,6049	7267,5646
	2778,1537	3165,6986	3693,3937	10652,7595	10652,7595
	3162,5448	3599,5358	12041,8853	12041,8853	12041,8853
	12140,2383	12093,9298	12093,9298	12093,9298	12093,9298

közös, mind az egyes rudakra vonatkozó koordinátarendszerek kijelölésre kerülnek. (I(1b), I/(3a).)

2. Az „*l*" és „*u*" rúdszerkezetek kiválasztása, operátoros amplitúdó-eloszlási egyenletük, továbbá a mellékfeltételeket tartalmazó egyenletrendszerek felírása. (I(16l), I(16u), I(17l), I(17u), I(1b).)

2.3. Meg kell határozni a „lényeges" mellékfeltételeket. (I. Függelék.)

2.4. Mind az „*l*", mind az „*u*" feladathoz tartozó R^{adj} operátorokkal kapcsolatos „lényeges" mellékfeltételeket elő kell állítani. (II(27), I. Függelék.)

2.5. Fel kell írni az „l" és „u" feladathoz tartozó karakterisztikus egyenletrendszereket. (I.4. záró része.)

2.6. Az „l" feladat első n_l számú sajátértékét és (nem feltétlenül normált) sajátvektorát, valamint az „u" feladat első n_u számú sajátértékét és (nem feltétlenül normált) sajátvektorát számítógéppel meg kell határoztatni. A sajátértékeket léptetési technikával, a sajátvektorokat a homogén lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldására szolgáló valamelyik módszerrel számíttathatjuk. Célszerű az $n_l = n_u = n_0$ választás. m-et úgy kell felvenni, hogy $m < n_0$ legyen. (I.4. záró része, II(16), II(17), II(24).)

2.7. Előállítjuk mind az „l", mind az „u" feladathoz tartozó projektoroperátorokat felépítő vektorokat, ahol a görög betűs mennyiségeket kivéve az összes többi mennyiség — az előzőek alapján — már számszerűen ismert:

$$p_{jl} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl}(\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}})^{-1}\,\mathbf{B}_l u_{lk}\,,$$

$$s_{jl} = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{jkl}\,\mathbf{T}_l^{-1}\,\mathbf{B}_l u_{lk}\,,$$

és ezek analógiájára:

$$p_{ju} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{jku}(\mathbf{R}_u^{\mathrm{adj}})^{-1}\,\mathbf{B}_u u_{uk}\,,$$

$$s_{ju} = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{jku}\,\mathbf{T}_u^{-1}\,\mathbf{B}_u u_{uk}\,.$$

(II(25), II(26), II(32).)

2.8. A görög betűvel jelölt állandók kiszámítására szolgáló egyenleteket előállítjuk. Az előállítás azon az alapon történik, hogy az előbb felírt projektorfelépítő vektorok különböző mellékfeltételeket kell, hogy kielégítsenek. Részletesen:

$$\mathbf{K}_{le}^{\mathrm{adj}}\,p_{jl} = \mathit{0}\,,$$

$$\mathbf{K}_{le}\,s_{jl} = \mathit{0}\,,$$

és ezek analógiájára:

$$\mathbf{K}_{ue}^{\mathrm{adj}}\,p_{ju} = \mathit{0}\,,$$

$$\mathbf{K}_{ue}\,s_{ju} = \mathit{0}\,.$$

(II(30), II(35).)

2.9. A 2.8.-ban kijelölt homogén lineáris algebrai egyenletrendszerek ismeretlen vektorai sorrendben:

$$\beta_l \doteq [\beta_{j1l}, \ldots, \beta_{jml}]\,,$$

$$\varepsilon_l \doteq [\varepsilon_{j1l}, \ldots, \varepsilon_{jml}]\,,$$

$$\beta_u \doteq [\beta_{j1u}, \ldots, \beta_{jmu}]\,,$$

$$\varepsilon_u \doteq [\varepsilon_{j1u}, \ldots, \varepsilon_{jmu}]\,.$$

Számítógéppel meg kell határoztatni a szóban forgó négy egyenletrendszer együtthatómátrixainak rangját, legyenek ezek

$$r_{1l},\ r_{2l},\ r_{3u},\ r_{4u}\,.$$

2.10. Az

$$\begin{aligned} r_{1l} &= m - k_1\,, \\ r_{2l} &= m - k_2\,, \\ r_{3u} &= m - k_3\,, \\ r_{4u} &= m - k_4 \end{aligned}$$

egyenletekből kiszámítjuk k_1-, k_2, k_3- és k_4-et, majd a 2.8. alatt kijelölt egyenletrendszerekből

a k_1 számú, lineárisan független β_l,
k_2 számú, lineárisan független ε_l,
k_3 számú, lineárisan független β_u,
k_4 számú, lineárisan független ε_u vektorokat.

(II(33), II(36).)

2.11. A 2.10. alattiakat felhasználva előállítjuk a 2.7. szerinti projektorbázisokat.

2.12. Formálisan előállítjuk a

$$(p_{il},\ p_{jl}),\ (p_{iu},\ p_{ju}),\ (s_{il},\ s_{jl}),\ (s_{iu},\ s_{ju})$$

skalárszorzatokat az összes szóbajövő i-re és j-re, majd számértéküket numerikus integrálással kiszámítjuk. (II.3.)

2.13. A 2.12. alatt nyert skalárszorzatokból felépített négy mátrix invertálandó. (II.3.)

2.14. A 2.6. és a 2.13. alatt nyert számértékekből előállítjuk az alsó, valamint a felső közbenső operátorpároknak megfelelő algebrai sajátértékfeladatok mátrixpárjait. (II.(24).)

2.15. Kiszámíttatjuk a 2.14. alatt nyert alsó és felső közbenső algebrai sajátértékfeladatok sajátértékeit.

2.16. Az „l" feladat 2.6. alatt nyert sajátértékei közül az $(m+1)$-, $(m+2)$- . . . , n_0-adikból álló halmazt egyesítjük a 2.15-ben kiszámított, m számú alsó közbenső sajátértékből álló halmazzal, majd az egyesített halmazt nagyság szerint rendezzük.

2.17. Az „u" feladat 2.6. alatt nyert sajátértékei közül az $(m+1)$-, $(m+2)$-, . . ., n_0-adikból álló halmazt egyesítjük a 2.15-beli, m számú felső közbenső sajátértékből álló halmazzal, majd az egyesített halmazt nagyság szerint rendezzük.

2.18. A 2.16. és 2.17. alatt nyert rendezett számsorozatok adják a keresett alsó és felső sajátérték-korlátokat.

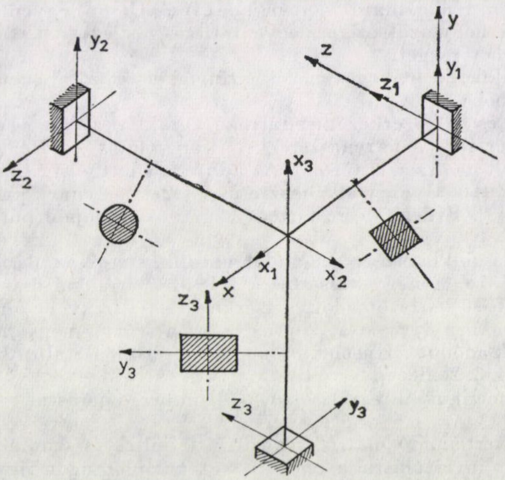
2.19. m növelésével a korlátok szűkíthetők. Nagyobb m választása során n_0 növelése is szükségessé válhatik, m és n_0 növelése esetében a számítás a 2.6. ponttal kezdődően megismétlendő.

3. Számpélda

A példa céljaira választott rúdszerkezet vázlatát az 1. ábra mutatja

A szerkezet három, egymásra merőleges tengelyű, változó keresztmetszetű egyenes rúdból áll. Mindhárom rúd hosszúsága:

$$l_1 = l_2 = l_3 = 1 \text{ m.}$$



1. ábra

Mindegyik rúdnak egy-egy vége befogott, a másik három vég elfordulás- és eltolódás-tartóan csatlakozik egymással.

Az ábra feltünteti az egyes rudak koordinátarendszereit, és a közös koordinátarendszert is.

A rúdkeresztmetszetek alakja: négyzet, kör illetve téglalap. A keresztmetszetek jellemző méretei így változnak a rúdhosszak mentén:

a négyzet élhosszúsága: $a_1(x_1) = 10^{-2}(4 - x_1)$ méter,
a kör átmérője: $d_2(x_2) = 10^{-3}(4 - x_2)$ méter,
a téglalap élhosszai:

$$a_3 = 10^{-2}(2{,}5 - x_3) \text{ méter,}$$

$$b_3 = 10^{-2}(3{,}5 - x_3) \text{ méter.}$$

A két nem körkeresztmetszetű rúd csavarási merevségére jellemző I_i $(i = 1, 3)$ mennyiségek számításánál figyelembe vettük, hogy azt az

$$I_i = \frac{16}{3} b_i^3 \left\{ a_i - b_i \left(0{,}6302488761 - \frac{192}{\pi^5} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{th}\left[\frac{(2k-1)}{2b_i} \pi a_i \right]}{k^5} \right\}$$

képlettel ([1], 71.o. 9,4 összefüggés) kell számítani; a fenti formula akkor érvényes, ha $a_i \leq b_i$.

A rúdanyagok rugalmassági modulusait az alábbiak szerint választottuk:

$$E_1 = 2{,}19 \cdot 10^{10} \text{ kp m}^{-2}, \qquad G_1 = 8{,}3 \cdot 10^9 \text{ kp m}^{-2},$$

$$E_2 = 7{,}4 \cdot 10^9 \text{ kp m}^{-2}, \qquad G_2 = 2{,}7 \cdot 10^9 \text{ kp m}^{-2},$$

$$E_3 = 1 \cdot 10^{10} \text{ kp m}^{-2}, \qquad G_3 = 5 \cdot 10^9 \text{ kp m}^{-2}.$$

Az 1 rúd anyaga tehát pl. ötvözött acél, a 2 rúdé pl. vörösréz, a 3 rúdé cinkötvözet lehetne; a számítási módszer kipróbálása kedvéért választottunk ilyen számértékeket.

A továbbiakban a számításokat az előző pontban leírt vezérfonalnak megfelelően hajtottuk végre. A vezérfonal egyes pontjaira hivatkozva néhány megjegyzést teszünk a konkrét példával kapcsolatos sajátosságoknál. Számításainkat Fortran nyelven programoztuk, és dupla pontossággal dolgoztunk.

Ad 2.2. Az „*l*" és „*u*" feladatok kijelölésénél nincs annak akadálya, hogy e rúdszerkezetek anyagának sűrűségét, rugalmassági modulusát olyan (pozitív) számértékűre vegyük fel, ami a gyakorlatban nem realizálható. Csupán II(16l) és II(16u) egyenlőtlenségeket kell kielégíteni, és arra vigyázni, hogy azok szigorú egyenlőtlenségek legyenek. Számpéldánk megoldása során éltünk ezzel a lehetőséggel.

Ad 2.3. Esetünkben a lényeges mellékfeltételeket egyszerű szemrevételezéssel lehetett kiválasztani az összesből.

Ad 2.5. Az „*l*" és „*u*" szerkezethez tartozó karakterisztikus egyenletek felírása elvben a közönséges differenciálegyenletrendszerekkel kapcsolatos sajátértékproblémák kapcsán szokásos, I.4.-ben vázolt módszerrel történt. Az adott feladattípusra CZEGLÉDI Gyula, továbbá CZEGLÉDI Gyula és RICHLIK György alkalmazta az eljárást, és ennek kapcsán figyelemre méltó eredményt ért el [2], [3]. Érdeklődésre tarthat számot e szempontból SZERVÁNSZKY György dolgozata [4].

Ad 2.6. Számításainkban $n_0 = 20$-al dolgoztunk, s m-re az alábbi négy értéket választottuk: $m = 13, 14, 15, 16$. E négy választás a 2.19.-ben írtakkal összhangban négy javított alsó, és négy javított felső korlátot adott a szerkezet sajátfrekvenciáira.

Ad 2.10. Esetünkben $k_1 = k_3$-at kaptuk, s ez a szám a négy m értéknek megfelelően rendre 10-, 9-, 8-, 7-nek adódott. Hasonlatosan $k_2 = k_4$-et tapasztaltunk, s ez a szám a négy m értéknek megfelelően 4, 3, 2 illetve 1 volt.

Ad 2.12. A numerikus integrálásokat a Romberg-eljárással rokon eljárással végeztettük.

Ad 2.13. Az invertálandó mátrixok pozitív definitek és szimmetrikusak. A pontosság fokozása érdekében az invertálásra a fent írt két tulajdonságot figyelembevevő módszert alkalmaztunk.

Ad 2.18,

2.19. Az előbbi I. táblázat az eredményeknek azt a részét mutatja, amelynek az első tizenhat sajátkörfrekvencia durva alsó és felső korlátait, valamint az $m = 13$-, 14-, 15- és 16-tal számított javított alsó és javított felső korlátait szolgáltatják.

A táblázat számértékei az elmélettel összhangban vannak. Megállapítható még, hogy az alsó és felső korlátok közötti különbség $m = 16$-nál az alsó és felső korlát számtani középértékének kb. 25%-a. Nagyobb n_0 és m választásával a szűkítés lehetősége fennáll.

IRODALOM

1. WEBER, C.—GÜNTHER, W.: Torsionstheorie. F. Vieweg et Sohn, Braunschweig, Akademie Verlag Berlin, 1958
2. CZEGLÉDI, Gy.: Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenzen von Stabwerken, *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering* 18 (1974), 191—202
3. CZEGLÉDI, Gy.—RICHLIK, Gy.: Prizmatikus rudakból felépített térbeli szerkezetek sajátkörfrekvenciáinak meghatározása a gépi számítástechnika felhasználásával, *MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Munkaközösség Tudományos ülésszak* (1974. okt. 9—10) *Tanulmányok*, Budapest 1974, 192—197. old.
4. SZERVÁNSZKY, Gy.: Néhány megjegyzés rugalmas kontinuumok sajátfrekvenciáinak számításáról, *MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Munkaközösség Tudományos Ülésszak* (1974. okt. 9—10) *Tanulmányok*, Budapest 1974, 215—220. old.

Improvable Bracketing of the Eigenfrequencies of a Space Frame Structure Consisting of Rods with Varying Cross Section, Part III. The paper completes the first two parts published in this review — in order to further the practical application of the presented theory — by arranging into points the calculation procedure. Furthermore a numerical example and its results are presented.

Verbesserungsfähige Einschließung der Eigenfrequenzen der Schwingungen von räumlichen Fachwerken aus geraden Stäben mit veränderlichem Querschnitt. III. Teil. Die Arbeit ergänzt die in dieser Zeitschrift erschienenen ersten zwei Teile — zwecks Hilfe bei der praktischen Anwendung der dargelegten Theorie — durch einen in Punkte zusammengefassten Leitfaden für den Ablauf der Berechnung. Ferner werden ein Zahlenbeispiel und dessen Ergebnisse dargestellt.