

SZTOCHASZTIKUS HALMAZFÜGGVÉNYEKRŐL. I.

PRÉKOPA ANDRÁS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1956. február 21-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

A sztochasztikus folyamatok elmélete, amint KOLMOGOROV 1931-ben megalapozta, eredetileg az időben véletlenszerűen lejátszódó folyamatok matematikai tárgyalásával foglalkozott. Később azonban felvetődtek olyan gyakorlati problémák, amelyek nem időbeli folyamatokkal kapcsolatosak, de a sztochasztikus folyamatok elméletében használatos módszerekkel oldhatók meg. Ilyen problémák fordulnak elő pl. a csillagok, a kolloidrészecskék térbeli eloszlásának vizsgálatánál, vérszámításkor, adott területre, adott idő alatt lehulló csapadékmennyiség vizsgálatánál, stb.

Van egy lényeges különbség az időbeli folyamatokkal kapcsolatos és az említett problémák között: a matematikai modell a két esetben lényegesen eltér egymástól. Az időbeli folyamatoknál gyakran csak a t időpontbeli helyzet érdekel bennünket, és ezt egy ξ_t valószínűségi változóval regisztráljuk. A síkbeli ponteloszlásnál azonban nem a sík pontjaihoz, hanem halmazaihoz tartozó valószínűségi változók írják le a pontrendszer állapotát. Ha A a sík egy halmaza, akkor ehhez tartozik egy $\xi(A)$ valószínűségi változó, amely megadja a véletlenszerűen elhelyezkedő pontok közül az A halmazba esőknek a számát. $\xi(A)$ egy véletlen értékű, más szóval sztochasztikus halmazfüggvény.

Jelen dolgozat tárgya az ilyen véletlen értékű halmazfüggvények vizsgálata. Bevezetem a sztochasztikus additív és teljesen additív halmazfüggvények fogalmát és ezekkel kapcsolatban megvizsgálom olyan problémákat, amelyek közül némelyek általánosításai a közönséges, valós értékű halmazfüggvények elméletében felvetődő problémáknak, illetve azokhoz hasonlóknak, némelyek pedig valószínűségszámítási természetűek.

1. DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathfrak{R}$ valamely H tér bizonyos részhalmazaihoz álló gyűrű. Ha $\mathfrak{R}$ minden A eleméhez tartozik egy $\xi(A) = \xi(\omega, A)$ valószínűségi változó, oly módon, hogy ha $A_1, A_2, \dots, A_r$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű diszjunkt halmazai, akkor a $\xi(A_1), \xi(A_2), \dots, \xi(A_r)$ valószínűségi változók függetlenek és

$$(1) \quad \xi(A) = \sum_{k=1}^r \xi(A_k),$$

ez esetben $\xi(A)$ -t sztochasztikus additív halmazfüggvénynek nevezem.

2. DEFINÍCIÓ. Az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ sztochasztikus additív halmazfüggvényt sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvénynek nevezem, ha $\mathfrak{R}$ bármely olyan $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt halmazzsorozatára, amelyre

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R},$$

teljesül, hogy

$$\xi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k).$$

Rövidség kedvéért a sztochasztikus szót elhagyom és ott, ahol közönséges, valós értékű additív, illetve teljesen additív halmazfüggvény szerepel, ezt külön megjegyzem.

A sztochasztikus folyamatoknak véletlen értékű halmazfüggvényként való felfogásmódja S. BOCHNER [2] munkájában szerepel először. Bizonyos speciális esetekre vonatkozó véletlen értékű halmazfüggvényekkel foglalkoztak H. CRAMÉR [3], E. MARCZEWSKI [9], C. RYLL—NARDZEWSKI [12], továbbá A. BLANC—LAPIERRE és R. FORTET [1].

A gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos, hogy ha pl. H valamilyen véges dimenziós euklideszi tér, akkor gömbökhöz, tartományokhoz és esetleg bonyolultabb halmazokhoz is hozzá tudunk rendelni valószínűségi változókat. Mint a III. fejezet 1. §-ában megmutatom, a Kolmogorov-féle konstrukcióval ([8], 4. §) konstruálhatunk olyan sztochasztikus additív halmazfüggvényeket, amelyek téglákon vagy téglák véges összegein vannak értelmezve, ezzel a módszerrel azonban általánosan nem oldható meg a probléma. Ahhoz, hogy ennél továbbjussunk, foglalkoznunk kell a sztochasztikus halmazfüggvények kiterjesztésének a problémájával.

Jelen dolgozat legfőbb célja a gyűrűn értelmezett sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvények kiterjesztésének az elvégzése különböző feltételek mellett és σ -gyűrűn értelmezett sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvények egyes tulajdonságainak a vizsgálata.

Bizonyos, euklideszi terekben értelmezett, sztochasztikus halmazfüggvények kiterjesztésével H. CRAMÉR [3], E. MARCZEWSKI [9] és C. RYLL—NARDZEWSKI [12] foglalkoztak. Ennek a dolgozatnak a tételei speciális esetként tartalmazzák a [3] és [12] dolgozatok idevágó tételeit. H. CRAMÉR egy közönséges, egyparaméteres ξ_t sztochasztikus folyamat $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$ differenciái által konstruálható sztochasztikus halmazfüggvény kiterjesztésével foglalkozott.

A sztochasztikus teljesen additív halmazfüggvények kiterjesztésének a problémája általánosítása a független valószínűségi változókból álló végtelen sorok konvergenciaproblémájának. Ha ugyanis $\xi_1, \xi_2, \dots$ egy független valószínűségi változókból álló sorozat és $\mathfrak{R}$ a természetes számok véges halma-

zainak a gyűrűje, akkor a

$$\xi(A) = \sum_{i \in A} \xi_i, \quad A \in \mathfrak{A}$$

halmazfüggvény abban és csak abban az esetben terjeszthető ki az $S(\mathfrak{A})$ σ -gyűrűre, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál ([4], 118. o., Corollary 1.).

A véletlen értékű halmazfüggvények elmélete felépítésének van egy másik útja is. A sztochasztikus folyamatok elméletét fel lehet építeni úgy, hogy tekintjük a valós függvények terét és ebben a térben értelmezünk mértéket. Ugyanezt megtehetjük az $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvények terében is, mint azt E. HOPF [7] bebizonyította. Az így értelmezett mérték általában csak végesen additív. Sok szempontból szükséges azonban, hogy a valószínűség teljesen additív legyen, a kiterjesztés problémája tehát más vonatkozásban itt is felmerül.

A sztochasztikus additív halmazfüggvény fogalma bizonyos értelemben általánosítása a független növekményű folyamat fogalmának. Ugyanis gyakran csak a $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$ differenciák érdekelnek bennünket, ezek pedig, illetve ezek összegei, felfoghatók sztochasztikus additív halmazfüggvényként.

Köszönetet mondok RÉNYI ALFRÉD, SZÓKEFALVI-NAGY BÉLA és CSÁSZÁR ÁKOS professzoroknak értékes megjegyzéseikért.

Fogalmak és jelölések

Legyen H egy tetszőleges halmaz és $\mathfrak{A}$ egy H bizonyos részhalmazáiból álló halmazosztály. Az $\mathfrak{A}$ halmazosztályt gyűrűnek nevezzük, ha $A + B \in \mathfrak{A}$, $A - B \in \mathfrak{A}$, feltéve, hogy $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$. Ha $H \in \mathfrak{A}$, akkor $\mathfrak{A}$ -et algebrának nevezzük. Ha $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{A}$ gyűrű (algebra) egy tetszőleges halmazsorozata és $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$, akkor $\mathfrak{A}$ -et σ -gyűrűnek (σ -algebrának) nevezzük. Ha $\mathfrak{A}$ gyűrű (σ -gyűrű) és $\dot{A} \in \mathfrak{A}$, akkor $A\mathfrak{A}$ azt az algebrát (σ -algebrát) jelenti, amelynek elemei az A halmaznak az $\mathfrak{A}$ gyűrűhöz tartozó részhalmazai. $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ az $\mathfrak{A}$ gyűrűt tartalmazó legkisebb σ -gyűrűt jelenti. Ha $A \subseteq H$, akkor $\bar{A} = H - A$.

Valamely $\mathfrak{A}$ gyűrű elemein értelmezett valós értékű, nem negatív $m(A)$ halmazfüggvényt mértéknek nevezzük, ha $\mathfrak{A}$ bármely olyan $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt halmazsorozatára, amelyre $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$, fennáll, hogy

$$(1) \quad m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Ha $m(A)$ negatív értékeket is felvehet, de az (1) reláció továbbra is fennáll, akkor $m(A)$ -t teljesen additív halmazfüggvénynek nevezzük.

Az n -dimenziós euklideszi teret R_n jelöli. Ha A az R_n tér egy Lebesgue szerint mérhető halmaza, akkor $|A|$ jelenti az A halmaz n -dimenziós Lebesgue-mértékét.

A dolgozatban szereplő valószínűségi változók egy rögzített eseménytérben vannak értelmezve, amelyet Ω -val jelölünk. Az Ω tér elemeit ω jelöli. Feltesszük, hogy adva van egy az Ω tér bizonyos részhalmazából alkotott $\mathfrak{F}$ -algebra és $\mathfrak{F}$ elemein értelmezve van egy P valószínűségi mérték, amelyre $P(\Omega) = 1$. Az Ω térben értelmezett, majdnem mindenütt véges értékű, mérhető függvényeket valószínűségi változóknak nevezzük. Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor a $\xi = \eta$ reláció azt jelenti, hogy

$$P(\xi = \eta) = 1.$$

Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ egy valószínűségi változó-sorozat, akkor a $\xi_k \rightarrow \xi$ (vagy $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi$) reláció azt jelenti, hogy

$$P(\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi) = 1.$$

A $\xi_k \Rightarrow \xi$ (vagy $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{st } \xi_k = \xi$) reláció azt jelenti, hogy minden pozitív ε -ra

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P(|\xi_k - \xi| > \varepsilon) = 0.$$

Ha ξ_k , illetve ξ karakterisztikus függvénye $f_k(t)$, illetve $f(t)$ és $f_k(t) \rightarrow f(t)$ t minden értékére (amely ekvivalens azzal, hogy a konvergencia minden véges t -intervallumban egyenletes), akkor ezt az

$$(3) \quad f_k(t) \Rightarrow f(t)$$

relációval fejezzük ki. (2)-ből következik (3), és ha $\xi = 0$, akkor (3)-ból következik (2).

Ha ξ egy valószínűségi változó és a $Q(\lambda)$ valós számra teljesül, hogy

$$P(\xi \leq Q(\lambda)) \geq \lambda, \quad P(\xi \geq Q(\lambda)) \geq 1 - \lambda,$$

ahol $0 < \lambda < 1$, akkor a $Q(\lambda)$ számot a ξ valószínűségi változó λ -kvantilisének nevezzük.

I. FEJEZET

SEGÉDTÉTELEK

1. §. Korlátos variációjú és szubadditív halmazfüggvények

DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathfrak{A}(A, B, \dots)$ egy halmazosztály. Egy $\mathfrak{A}$ elemein értelmezett $\alpha(A)$ valós értékű halmazfüggvényt akkor nevezünk korlátos variációjúnak, ha van olyan K szám, hogy minden páronként idegen, $\mathfrak{A}$ -hoz tartozó halmazokból álló $A_1, A_2, \dots, A_r$ halmazösszességre teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^r |\alpha(A_k)| \leq K.$$

Azt a legkisebb K számot, amelyre az előző egyenlőtlenség teljesül, α variációjának nevezzük. Ha $A_k \subseteq A, k = 1, 2, \dots, r$, akkor a

$$\sup_{\{A_k\}} \sum_{k=1}^r |\alpha(A_k)|$$

számot az α halmazfüggvény A -ban vett variációjának nevezzük. Jelöljük ezt a mennyiséget $\text{Var}_\alpha(A)$ -val.

DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathfrak{A}(A, B, \dots)$ egy halmazosztály, $\alpha(A)$ pedig egy $\mathfrak{A}$ elemein értelmezett valós értékű halmazfüggvény. Az α halmazfüggvényt szubadditívnek (szuperadditívnek) nevezzük, ha bármely páronként idegen, $\mathfrak{A}$ -hoz tartozó halmazokból álló $A_1, A_2, \dots, A_r$ összességre, melyre $A = \sum_{k=1}^r A_k \in \mathfrak{A}$, teljesül, hogy

$$\alpha(A) \leq \sum_{k=1}^r \alpha(A_k), \quad \left(\alpha(A) \geq \sum_{k=1}^r \alpha(A_k) \right).$$

Ha az egyenlőség áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy α additív halmazfüggvény. Ha r végtelen is lehet, akkor α -t teljesen szubadditívnek (teljesen szuperadditívnek), illetve, ha egyenlőség áll fenn, akkor teljesen additívnek nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges, korlátos variációjú α halmazfüggvény esetében a $\text{Var}_\alpha(A)$ halmazfüggvény teljesen szuperadditív. Gyakran fel fogjuk használni a következő egyszerű tételeket, amelyek bizonyításai megtalálhatók a [11] dolgozatban.

1. 1. TÉTEL. Legyen $\mathfrak{R}$ egy gyűrű, $\alpha(A)$ pedig egy $\mathfrak{R}$ elemein értelmezett olyan nem-negatív értékű halmazfüggvény, melyre teljesülnek a következő feltételek:

- a) $\alpha(A) \leq K, A \in \mathfrak{A}$;
 b) $\alpha(A)$ szubadditív;
 c) ha $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{A}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k) < \infty.$$

E feltételekből következik, hogy az $\alpha(A)$ halmazfüggvény korlátos variációjú.

1.2. TÉTEL. Legyen $\mathfrak{A}$ egy gyűrű, α pedig egy $\mathfrak{A}$ elemein értelmezett korlátos variációjú és teljesen szubadditív halmazfüggvény. Ekkor $\text{Var}_\alpha(A)$ ($A \in \mathfrak{A}$) korlátos mérték az $\mathfrak{A}$ gyűrűn.

2. §. Egyenlőtlenségek

Ebben a paragrafusban egy-két gyakran előforduló egyenlőtlenséget vezetünk le. Itt felhasználjuk a következő elemi egyenlőtlenségeket:

$$1 - \frac{\sin x}{x} \geq \frac{x^2}{8}, \quad \text{ha } |x| \leq 1,$$

$$1 - \frac{\sin x}{x} \geq 1 - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \text{ha } 0 < \varepsilon \leq 1 \text{ és } |x| \geq \varepsilon,$$

$$1 - \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{10}, \quad \text{ha } |x| \geq 1.$$

Legyen ξ valószínűségi változó, $F(x)$ legyen az eloszlásfüggvénye, $f(t)$ pedig a karakterisztikus függvénye. Az előző egyenlőtlenségek felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $0 < \varepsilon \leq 1$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |1 - f(t)| dt &\geq \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 (1 - f(t)) dt \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dF(x) dt \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) dF(x) \geq \frac{1}{8} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x) + \left(1 - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right) \mathbf{P}(|\xi| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Innen következik, hogy

$$(1.1) \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |1 - f(t)| dt \geq \min \left(\frac{1}{8}, 1 - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right) \left[\int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x) + \mathbf{P}(|\xi| > \varepsilon) \right].$$

Legyen δ tetszőleges pozitív szám, akkor az előzőkhöz hasonlóan kapjuk, hogy

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |1-f(t)| dt &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF(x) \geq \\ &\geq \int_{|x| > \frac{1}{\delta}} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF(x) \geq \frac{1}{10} \mathbf{P} \left(|\xi| > \frac{1}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Gyakran fel fogjuk használni a következő, jól ismert egyenlőtlenséget: ha $f(t)$ karakterisztikus függvény, akkor

$$(1.3) \quad 1 - Rf(2t) \leq 4(1 - Rf(t))^*$$

(l. pl. [5] 60. o.).

A következő tétel általánosítása [5] 113. oldalán található lemmának.

1. 3. TÉTEL. Legyen ξ valószínűségi változó és $Q(\lambda)$ jelentse ennek egy λ -kvantilisét. Legyen továbbá z tetszőleges valós szám és $s(x)$ egy olyan nem-negatív függvény, hogy ha $x \geq z$, akkor $s(x)$ monoton nem-csökkenő, ha pedig $x \leq z$, akkor monoton nem-növekvő. Tegyük fel továbbá, hogy létezik $\mathbf{M}[s(\xi - \eta)]$, ahol η ξ -vel azonos eloszlású és tőle független valószínűségi változó. E feltételek mellett létezik $\mathbf{M}[s(\xi - Q(\lambda))]$ is és érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(1.4) \quad \mathbf{M}[s(\xi - \eta)] \geq \min(\lambda, 1 - \lambda) \mathbf{M}[s(\xi - Q(\lambda))].$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\xi_1 = \xi - Q(\lambda)$, $\eta_1 = \eta - Q(\lambda)$. Ekkor a 0 érték λ -kvantilise ξ_1 -nek. Jelöljük ξ_1 és η_1 közös eloszlásfüggvényét $F_1(x)$ -szel. Ilyen módon azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[s(\xi - \eta)] &= \mathbf{M}[s(\xi_1 - \eta_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x - y) dF_1(x) dF_1(y) \geq \\ &\geq \int_{x \geq z} \int_{y \leq 0} s(x - y) dF_1(x) dF_1(y) + \int_{x < z} \int_{y \geq 0} s(x - y) dF_1(x) dF_1(y) \geq \\ &\geq \int_{y \leq 0} dF_1(y) \int_{x \geq z} s(x) dF_1(x) + \int_{y \geq 0} dF_1(y) \int_{x < z} s(x) dF_1(x) \geq \\ &\geq \min(\lambda, 1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} s(x) dF_1(x) = \min(\lambda, 1 - \lambda) \mathbf{M}[s(\xi - Q(\lambda))]. \end{aligned}$$

* Rz a z komplex szám valós részét jelöli.

KOROLLÁRIUM. Ha $s(x)$ a következő függvény:

$$s(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| \leq \varepsilon, \\ 1, & \text{ha } |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon > 0,$$

akkor az (1.4) egyenlőtlenség a következőt adja:

$$(1.5) \quad \mathbf{P}(|\xi - \eta| > \varepsilon) \geq \min(\lambda, 1 - \lambda) \mathbf{P}(|\xi - Q(\lambda)| > \varepsilon).$$

Az (1.2) és (1.5) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - |f(t)|^2) dt &> \frac{1}{10} \mathbf{P}\left(|\xi - \eta| > \frac{1}{\delta}\right) \geq \\ &\geq \frac{\min(\lambda, 1 - \lambda)}{10} \mathbf{P}\left(|\xi - Q(\lambda)| > \frac{1}{\delta}\right). \end{aligned}$$

3. §. Kvantilis-halmazok korlátossága

Legyen Z egy tetszőleges halmaz, ξ_z , $z \in Z$ pedig valószínűségi változó-összettség. Jelölje $Q(\lambda, z)$ a ξ_z valószínűségi változó egy tetszőleges λ -kvantilisét. Ha minden z -hez választunk egy $Q(\lambda, z)$ mennyiséget, akkor egy $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazt kapunk. Ilyen halmaz egy vagy több képezhető, aszerint, hogy minden z -re, a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek egyértelműen meg vannak határozva, vagy nem.

Definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$\mu_1 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_z < -\varepsilon), \quad \mu_2 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_z > \varepsilon).$$

A ξ_z valószínűségi változók kvantilisei és a μ_1, μ_2 mennyiségek közötti kapcsolatot tárja fel az

1.4. TÉTEL. Ha a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos, akkor

$$(1.7) \quad \mu_1 \leq \lambda (\mu_2 \leq 1 - \lambda).$$

Ha a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz nem korlátos alulról (felülről), akkor

$$(1.8) \quad \mu_1 \geq \lambda (\mu_2 \geq 1 - \lambda).$$

BIZONYÍTÁS. Bizonyítsuk be az (1.7) és (1.8) egyenlőtlenségek első felét. A zárójelben levő állítások bizonyítása teljesen hasonlóan történik. Tegyük fel, hogy van olyan $K(\lambda)$ szám, hogy a $Q(\lambda, z)$ kvantilisek alkalmas választása mellett $Q(\lambda, z) \geq K(\lambda)$, $z \in Z$ és $\mu_1 > \lambda$. Ekkor minden ε -ra teljesül, hogy

$$\sup_{z \in Z} \mathbf{P}(\xi_z < -\varepsilon) > \lambda.$$

Legyen ε_0 olyan szám, amelyre $-\varepsilon_0 \leq K_1(\lambda)$ és válasszunk egy olyan z_0 -t, amelyre

$$P(\xi_{z_0} < -\varepsilon_0) > \lambda.$$

Ebből az következik, hogy ξ_{z_0} minden λ -kvantilisére teljesül a

$$Q(\lambda, z_0) < -\varepsilon_0 \leq K(\lambda)$$

egyenlőtlenség, ami ellentmondás, tehát (1.7) első fele igaz.

Tegyük most fel, hogy a $Q(\lambda, z)$ kvantilisok megválaszthatók úgy, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz nem korlátos alulról. Ekkor minden ε -hoz található olyan z_ε , hogy

$$P(\xi_{z_\varepsilon} < -\varepsilon) \geq \lambda,$$

tehát minden ε -ra teljesül, hogy

$$\sup_{z \in Z} P(\xi_z < -\varepsilon) \geq \lambda,$$

és így

$$\mu_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{z \in Z} P(\xi_z < -\varepsilon) \geq \lambda.$$

Ezzel (1.8) első felét is bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Az (1.7) és (1.8) egyenlőtlenségekből következik, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazok λ ($0 < \lambda < 1$) minden rögzített értékére akkor és csak akkor korlátosak alulról (felülről), ha $\mu_1 = 0$ ($\mu_2 = 0$). Defináljuk a következő mennyiséget:

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{z \in Z} P(|\xi_z| > \varepsilon).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mu_1 \leq \mu_3, \mu_2 \leq \mu_3, \mu_3 \leq \mu_1 + \mu_2.$$

Ebből következik, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazok λ ($0 < \lambda < 1$) minden rögzített értékére akkor és csak akkor korlátosak, ha $\mu_3 = 0$.

Ugyancsak az (1.7) és (1.8) egyenlőtlenségekből adódnak a következő állítások is:

A $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ ($0 < \lambda < 1$) halmazok λ minden rögzített értékére akkor és csak akkor nem korlátosak alulról (felülről), ha $\mu_1 = 1$ ($\mu_2 = 1$).

A $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ ($0 < \lambda < 1$) halmazok λ minden rögzített értékére akkor és csak akkor nem korlátosak, ha $\mu_3 = 1$.

* Ha arról van szó, hogy a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazok minden λ -ra ($0 < \lambda < 1$) korlátosak (nem korlátosak), akkor nem játszik szerepet az, hogy hogyan választjuk a $Q(\lambda, z)$ kvantiliseket. Ekkor, ha a $Q(\lambda, z)$ kvantilisok egy speciális választása esetén az említett halmazok korlátosak (nem korlátosak), akkor a kvantilisok minden megválasztása esetén szintén korlátosak (nem korlátosak). A $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazon ebben az esetben valamennyi ξ_z valószínűségi változó valamennyi λ -kvantilisének összességét is érthetjük.

4. §. Eloszlásfüggvény-halmazok kompaktsága

Jelölje $\mathcal{F}$ az egydimenziós eloszlásfüggvények halmazát. P. LÉVY bevezette az eloszlásfüggvények távolságának a fogalmát. Az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ eloszlásfüggvények távolsága alatt azoknak a h értékeknek az alsó határát értjük, melyekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$F_1(x-h)-h \leq F_2(x) \leq F_1(x+h)+h.$$

Jelöljük ezt a számot $L(F_1, F_2)$ -vel. Nyilvánvaló, hogy $L(F_1, F_2) \leq 1$. Ismeretes, hogy ez a távolság kielégíti a metrikus tér axiómáit:

- a) $L(F_1, F_2) = 0$, akkor és csak akkor, ha $F_1 \equiv F_2$,
- b) $L(F_1, F_2) = L(F_2, F_1)$,
- c) $L(F_1, F_3) \leq L(F_1, F_2) + L(F_2, F_3)$.

Ismeretes az is, hogy az $\mathcal{F}$ tér teljes a Lévy-féle távolságra nézve ([5] 42. o. 2. tétel). $\mathcal{F}$ tehát korlátos és teljes, de nem kompakt metrikus tér. A továbbiakban azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy milyen feltételek mellett kompakt az $\mathcal{F}$ tér valamely $\mathcal{F}'$ részhalmaza.

1. 5. TÉTEL. Az $\mathcal{F}$ tér valamely $\mathcal{F}' = \{F(x, z), z \in Z\}$ részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha minden λ -ra ($0 < \lambda < 1$), a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz korlátos.

BIZONYÍTÁS. Az 1. 4. tétel korolláriumája szerint a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmazok akkor és csak akkor korlátosak λ minden rögzített értékére, ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{z \in Z} [F(-\varepsilon, z) + 1 - F(\varepsilon + 0, z)] = 0.$$

Ez ekvivalens a következőkkel:

$$\sup_{z \in Z} F(-\varepsilon, z) \rightarrow 0, \quad \inf_{z \in Z} F(\varepsilon, z) \rightarrow 1, \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow \infty.$$

Ha tehát $F(x, z_1), F(x, z_2), \dots$ $\mathcal{F}'$ egy sorozata és ennek egy $F(x, z_{n_k})$ részsorozata konvergál egy balról folytonos, nem csökkenő $F(x)$ függvényhez az utóbbi minden folytonossági pontjában, akkor szükségképpen $F(-\infty) = 0$ és $F(+\infty) = 1$.

1. 6. TÉTEL. Az $\mathcal{F}$ tér valamely $\mathcal{F}' = \{F(x, z), z \in Z\}$ halmaza akkor és csak akkor kompakt, ha $\mu_3 = 0$.

BIZONYÍTÁS. Tételünk az 1. 4. tétel korolláriumának és az 1. 5. tételnek közvetlen következménye.

1. 7. TÉTEL. Az $\mathcal{F}$ tér valamely $\mathcal{F}' = \{F(x, z), z \in Z\}$ halmaza akkor és csak akkor kompakt, ha az $f(t, z), z \in Z$ karakterisztikus függvények a $t = 0$

pontban egyenlő mértékben folytonosak, vagyis minden pozitív ε -hoz tartozik olyan $\delta > 0$, hogy

$$(1.9) \quad |1 - f(t, z)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |t| < \delta.$$

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}'$ halmaz kompakt. Ebből következik, hogy elég nagy c esetén

$$\sup_{z \in Z} \mathbf{P}(|\xi_z| > c) > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} |1 - f(t, z)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dF(x, z) \right| \leq |t| \int_{|x| \geq c} |x| dF(x, z) + \\ &+ 2\mathbf{P}(|\xi_z| > c) \leq |t|c + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

tehát az (1.9) egyenlőtlenség teljesül, ha $|t| < \frac{\varepsilon}{2c} = \delta$.

Tegyük most fel, hogy teljesül az (1.9) egyenlőtlenség. Ekkor az (1.2) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $\mu_3 < 10\varepsilon$, ami csak úgy állhat fenn minden pozitív ε -ra, ha $\mu_3 = 0$.

1. 8. TÉTEL. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}' = \{F(x, z), z \in Z\}$ halmazra vonatkozólag teljesül a következő két feltétel:

1. Létezik olyan mérhető, a $t=0$ pontban folytonos $g(t)$ függvény, melyre $0 \leq g(t) \leq 1$, $g(0) = 1$ és

$$|f(t, z)| \geq g(t), \quad z \in Z.$$

2. Létezik olyan $\lambda_1 (0 < \lambda_1 < 1)$ szám, hogy a $Q(\lambda_1, z)$ kvantilisok alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, z), z \in Z\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos. Ebben az esetben minden λ -ra ($0 < \lambda < 1$) a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos.

BIZONYÍTÁS. Bizonyítsuk be azt, hogy az említett feltételek mellett minden λ -ra a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz alulról korlátos. A felülről való korlátoosságra vonatkozó állítás bizonyítása ehhez teljesen hasonlóan történik. Legyen $Q(\lambda_1, z) \geq K_1, z \in Z$. Az (1.6) egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy ha $\delta > 0$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - g^2(t)) dt &\geq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - |f(t, z)|^2) dt \geq \\ &\geq \frac{\min(\lambda_1, 1 - \lambda_1)}{10} \mathbf{P}\left(|\xi_z - Q(\lambda, z)| > \frac{1}{\delta}\right) \geq \frac{\min(\lambda_1, 1 - \lambda_1)}{10} \mathbf{P}\left(\xi_z < K_1 - \frac{1}{\delta}\right), \end{aligned}$$

tehát

$$\frac{\min(\lambda_1, 1-\lambda_1)}{10} \sup_{z \in Z} P\left(\xi_z < K_1 - \frac{1}{\delta}\right) \leq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1-g^2(t)) dt.$$

- Ha elvégezzük a $\delta \rightarrow 0$ határátmenetet, akkor innen következik, hogy $\mu_1 = 0$, tehát az 1.4. tétel korolláriumára szerint minden rögzített λ -ra a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz alulról korlátos. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

1.9. TÉTEL. Az $\mathcal{F}$ tér $\mathcal{F}' = \{F(x, z), z \in Z\}$ halmaza akkor és csak akkor kompakt, ha teljesül az 1.8. tétel 1. feltétele és van olyan λ_1 szám ($0 < \lambda_1 < 1$), hogy a $Q(\lambda_1, z)$ kvantilisok alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, z), z \in Z\}$ halmaz korlátos.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy tételünk feltételei teljesülnek. Ekkor az 1.8. tétel szerint minden rögzített λ -ra a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz korlátos és így az 1.5. tétel szerint az $\mathcal{F}'$ halmaz kompakt.

Tegyük most fel, hogy az $\mathcal{F}'$ halmaz kompakt. Az 1.5. tétel szerint ekkor minden λ -ra a $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ halmaz korlátos, tehát csupán a $g(t)$ függvény existenciáját kell belátnunk. Ehhez nyilván elég azt bebizonyítani, hogy az

$$\inf_{z \in Z} |f(t, z)| = g_1(t)$$

függvény folytonos a $t=0$ pontban.* Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan 1-nél kisebb q szám, olyan t_k és z_k sorozat, hogy $t_k \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, továbbá

$$|f(t_k, z_k)| \leq q < 1, k = 1, 2, \dots$$

Mivel az $\mathcal{F}'$ halmaz kompakt, következik, hogy az $F(x, z_k)$ sorozat tartalmaz egy olyan részsorozatot, mely konvergál egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $F(x, z_k)$ sorozat maga ilyen tulajdonságú. Ha $f(t)$ jelenti $F(x)$ karakterisztikus függvényét, akkor ezek szerint az $f(t, z_k)$ sorozat minden véges intervallumban egyenletesen konvergál az $f(t)$ határfüggvényhez, ami ellentmondás, mert $f(t)$ folytonos függvény és $f(0) = 1$.

* A $g(t)$ függvény megválasztható pl. a következőképpen: $g(t) = 0$, ha $|t| > 1$ és

$$g(t) = \inf_{\frac{1}{n+1} < |t| \leq \frac{1}{n}} g_1(t), \text{ ha } \frac{1}{n+1} < |t| \leq \frac{1}{n}, g(0) = 1.$$

5. §. Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájára vonatkozó tételek

Ebben a paragrafusban két tételt ismertetek. A tételek bizonyításai megtalálhatók a [10] dolgozatban.

A tételek arra a kérdésre vonatkoznak, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók, milyen feltételek mellett konvergál minden sorrendben 1 valószínűséggel a

$$(1.10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

sor.

Vezessük be a következő jelöléseket. Jelölje $\mathfrak{R}$ a természetes számok véges, $\mathfrak{S}$ pedig valamennyi részhalmazának az összességét. Legyen

$$(1.11) \quad \xi(A) = \sum_{i \in A} \xi_i, \text{ ha } A \in \mathfrak{R}, \text{ vagy } A \in \mathfrak{S},$$

feltéve, hogy a jobboldalon minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens összeg áll. $\xi(A)$ eloszlásfüggvényét jelölje $F(x, A)$, egy tetszőleges λ -kvantilisét $Q(\lambda, A)$.

1. 10. TÉTEL. Ha az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz kompakt, akkor az (1.10) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens.

Megfordítva, ha az (1.10) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens, akkor az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ halmaz kompakt.

1. 11. TÉTEL. Ha található olyan λ_1, λ_2 számpár, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, hogy a $Q(\lambda_1, A), Q(\lambda_2, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}, \{Q(\lambda_2, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmazok korlátosak, akkor az (1.10) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens.

Megfordítva, ha az (1.10) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens, akkor a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{S}\}$ ($0 < \lambda < 1$) halmazok λ minden rögzített értéke mellett korlátosak.

1. KOROLLÁRIUM. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók eloszlásai a 0 pontra szimmetrikusak. Ha van olyan $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ($0 < \lambda < 1$), hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, akkor az (1.10) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergens.

2. KOROLLÁRIUM. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók nem-negatívak. Ha van olyan λ ($0 < \lambda < 1$), hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, akkor az (1.10) sor konvergens.

II. FEJEZET

GYÜRÜN ÉS ALGEBRÁN ÉRTELMEZETT ADDITÍV HALMAZ-
FÜGGVÉNYEK

Ebben a fejezetben valamely H halmaz részhalmazaiából képezett $\mathfrak{R}$ gyűrű, illetve algebra elemein értelmezett $\xi(A)$ additív halmazfüggvény tulajdonságait vesszük vizsgálat alá. Ezek a vizsgálatok hozzásegítenek majd ahhoz, hogy megállapítsuk, milyen feltételek mellett lehet $\xi(A)$ -t kiterjeszteni az $\mathfrak{R}$ gyűrűt illetve algebrát tartalmazó legkisebb σ -gyűrűre. Nyilvánvaló, hogy ennek egyik szükséges feltétele, hogy $\xi(A)$ $\mathfrak{R}$ fölött teljesen additív legyen. Ezért először arra kell találnunk feltételt, hogy egy additív halmazfüggvény mikor teljesen additív is. Ezzel foglalkozik a

2.1. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy $\mathfrak{R}$ gyűrű elemein értelmezett $\xi(A)$ additív halmazfüggvény teljesen additív legyen, szükséges és elegendő, hogy minden olyan $B_1, B_2, \dots$ nem növekvő halmzsorozatra, melyre $B_k \in \mathfrak{R}, k=1, 2, \dots$,*

$\prod_{k=1}^{\infty} B_k = 0$, teljesüljön a következő feltétel:

$$(2.1) \quad \mathbf{P}(|\xi(B_k)| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty,$$

ahol ε tetszőleges pozitív szám.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy teljesül a (2.1) feltétel. Legyen $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmzsorozata. Legyen $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$. Mivel $\xi(A)$ additív halmazfüggvény, következik, hogy

$$\xi(A) = \xi(A_1) + \xi(A_2) + \dots + \xi(A_{n-1}) + \xi(B_n), \quad n=2, 3, \dots$$

Innen következik, hogy

$$\xi(A) - \sum_{k=1}^{n-1} \xi(A_k) = \xi(B_n) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

tehát ([4], 119. o. Corollary 2.)

$$\xi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k).$$

Tegyük fel most, hogy $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény. Ha $B_1, B_2, \dots$ a tételben leírt tulajdonságú halmzsorozat, és $A_n = B_n - B_{n+1}$, $n=1, 2, \dots$, akkor $A_i A_k = 0$, ha $i \neq k$ és

$$B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

amiből a teljes additivitás miatt következik, hogy

$$\xi(B_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k).$$

Innen következik, hogy teljesül a következő reláció:

$$\xi(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \xi(A_k) \rightarrow 0,$$

tehát igaz az is, hogy ha $\varepsilon > 0$, akkor

$$P(|\xi(B_n)| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

KOROLLÁRIUM. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény. Ha létezik olyan T pozitív szám, hogy $\mathfrak{R}$ minden olyan $A_1, A_2, \dots$ nem-növekvő sorozatára, amelyre $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$, teljesül, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t, A_k) = 1, \text{ ha } |t| \leq T,$$

akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény teljesen additív.

BIZONYÍTÁS. A karakterisztikus függvényekre érvényes (1.3) egyenlőtlenségből következik, hogy a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t, A_k) = 1$$

reláció minden t -re teljesül, tehát

$$\xi(A_k) \Rightarrow 0, \text{ ha } k \rightarrow \infty$$

és így az állítás a 2.1 tételből következik.

A továbbiakban a $\xi(A)$ valószínűségi változók $Q(\lambda, A)$ kvantiliseire vonatkozó tételeket bizonyítunk be. Ezeknél felhasználjuk az előző fejezet eredményeit.

2.2. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ algebrán értelmezett additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy van olyan λ_1 szám, hogy a $Q(\lambda_1, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos. Ekkor minden λ -ra a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz alulról (felülről) korlátos. Ha a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz mindkét oldalról korlátos, akkor az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz kompakt.

BIZONYÍTÁS. Ha $A \in \mathfrak{R}$, akkor feltevés szerint $\bar{A} \in \mathfrak{R}$ és $H = A + \bar{A} \in \mathfrak{R}$. Ebből következik, hogy

$$\xi(H) = \xi(A) + \xi(\bar{A}), \quad f(t, H) = f(t, A)f(t, \bar{A}).$$

Mivel $|f(t, \bar{A})| \leq 1$, következik, hogy

$$(2.2) \quad |f(t, A)| \geq |f(t, H)|, \quad A \in \mathfrak{R}.$$

$f(t, H)$ karakterisztikus függvény, tehát $|f(t, H)|$ folytonos, $|f(0, H)| = 1$ és így, ha

$$g(t) = |f(t, H)|,$$

azt kapjuk, hogy az 1. 8. tétel 1. feltétele teljesül. A 2. feltétel teljesülését feltételeink között előírtuk, tehát ezzel az állítás egyik részét igazoltuk.

Ha feltesszük azt is, hogy a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{A}\}$ halmaz mindkét oldalról korlátos, akkor a (2. 2) egyenlőtlenségből, továbbá az 1. 9. tételből következik, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{A}\}$ halmaz kompakt. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Gyűrűre vonatkozólag abból, hogy van egy mindkét oldalról korlátos kvantilis-halmaz, nem következik, hogy mindegyik kvantilis-halmaz korlátos. Ha például $\mathfrak{A}$ a pozitív egész számok véges halmazából alkotott gyűrű és

$$F(x, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

akkor $Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0$, ha $A \in \mathfrak{A}$, de ha $\lambda \neq \frac{1}{2}$, akkor a $Q(\lambda, A)$ mennyiségek nem korlátosak. Gyűrű esetére az I. fejezet eredményeit felhasználva kapjuk a következő tételeket.

2. 3. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy van olyan λ_1, λ_2 számpár, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, hogy a $Q(\lambda_1, A), Q(\lambda_2, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{A}\}, \{Q(\lambda_2, A), A \in \mathfrak{A}\}$ halmazok korlátosak. Ebben az esetben minden λ -ra a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{A}\}$ halmaz korlátos.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan λ_0 szám, és olyan A_k halmazzsorozat, hogy a $Q(\lambda_0, A_k)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén $|Q(\lambda_0, A_k)| \rightarrow \infty$, ha $k \rightarrow \infty$. Legyen $B_n = \sum_{k=1}^n A_k$, $C_n = B_{n+1} - B_n$, akkor $C, C_k = 0$, ha $i \neq k$ és így a $\xi(C_n)$ valószínűségi változók függetlenek. Figyelembe véve tételünk feltételeit, az 1. 11. tétel szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi(C_n)$$

sor 1 valószínűséggel konvergál. Jelöljük ξ -vel ennek a sornak az összegét és $f(t)$ -vel ξ karakterisztikus függvényét. Nyilvánvaló, hogy

$$f(t) = f(t, A_1 + A_2 + \dots + A_n) \prod_{k=n}^{\infty} f(t, C_k),$$

továbbá

$$f(t, A_1 + A_2 + \dots + A_n) = f(t, (A_1 + A_2 + \dots + A_n) - A_n) f(t, A_n),$$

tehát

$$|f(t)| \leq |f(t, A_1 + A_2 + \dots + A_n)| \leq |f(t, A_n)|.$$

Tudjuk, hogy a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, tehát ebből az 1. 9. és 1. 5. tételek alapján következik, hogy a $\xi(A_n)$ valószínűségi változók kvantilisei korlátosak, ami ellentmondás, mert feltettük, hogy $|Q(\lambda_0, A_n)| \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$.

2. 4. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy $\xi(A) \geq 0$, $A \in \mathfrak{R}$ és van olyan λ_1 szám, hogy a $Q(\lambda_1, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos. Ebben az esetben minden λ -ra a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan λ_0 szám és olyan A_k halmabsorozat, hogy a $Q(\lambda, A_k)$ kvantilisek alkalmas megválasztása esetén $Q(\lambda_0, A_k) \rightarrow \infty$, ha $k \rightarrow \infty$. Ha $B_n = \sum_{k=1}^n A_k$, akkor $B_n \supseteq A_n$ és mivel $\xi(A)$ additív és nem negatív, $\xi(B_n) \geq \xi(A_n)$. Ha $C_n = B_{n+1} - B_n$, akkor $C_i C_k = 0$, ha $i \neq k$, tehát a $\xi(C_n)$ valószínűségi változók függetlenek. Tudjuk azt is, hogy ha $A \in \mathfrak{R}$, akkor a $Q(\lambda_1, A)$ mennyiségek korlátosak, tehát az 1. 11. tétel 2. korolláriuma alapján azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi(C_n) < \infty.$$

Ha ennek a sornak az összegét ξ -vel jelöljük, akkor tehát

$$0 \leq \xi(A_n) \leq \xi(B_n) = \sum_{k=1}^n \xi(C_k) \leq \xi,$$

ami ellentmondás, mert feltettük, hogy $Q(\lambda_0, A_k) \rightarrow \infty$.

Legyen R gyűrű és $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ elemein értelmezett halmazfüggvény. Defináljuk a következő halmazfüggvényeket:

$$\mu_1(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{B \in \mathfrak{A} \mathfrak{R}} \mathbf{P}(\xi(B) < -\varepsilon)$$

$$\mu_2(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{B \in \mathfrak{A} \mathfrak{R}} \mathbf{P}(\xi(B) > \varepsilon),$$

$$\mu_3(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{B \in \mathfrak{A} \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(B)| > \varepsilon).$$

A $\mu_1(A)$, $\mu_2(A)$, $\mu_3(A)$ halmazfüggvények nem mások, mint az I. fejezetben definiált μ_1 , μ_2 , μ_3 mennyiségek, ha Z az $\mathfrak{R}$ gyűrű azon elemeinek a halmaza,

amelyek részei az A halmaznak. Nyilvánvaló, hogy ha $B \subseteq A, B \in \mathfrak{R}, A \in \mathfrak{R}$, akkor

$$\mu_i(B) \leq \mu_i(A), i = 1, 2, 3.$$

Igaz továbbá a következő

2. 5. TÉTEL. Ha $\xi(A)$ az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény és $A_k \in \mathfrak{R}, k = 1, 2, \dots, r$, akkor

$$\mu_i\left(\sum_{k=1}^r A_k\right) \leq \sum_{k=1}^r \mu_i(A_k), i = 1, 2, 3.$$

BIZONYÍTÁS. Végezzük el a bizonyítást az $i = 3$ esetben. A többi eset teljesen hasonlóan tárgyalható. Legyen $A_k \in \mathfrak{R}, A'_k \in A_k \mathfrak{R}, k = 1, 2, \dots, r, A_i A_l = 0$, ha $i \neq l$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\xi(A'_1 + A'_2 + \dots + A'_r)| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(|\xi(A'_1) + \xi(A'_2) + \dots + \xi(A'_r)| > \varepsilon) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(|\xi(A'_1)| > \frac{\varepsilon}{r}\right) + \mathbf{P}\left(|\xi(A'_2)| > \frac{\varepsilon}{r}\right) + \dots + \mathbf{P}\left(|\xi(A'_r)| > \frac{\varepsilon}{r}\right), \end{aligned}$$

és így

$$\sup_{C \in \sum_{k=1}^r A_k \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(C)| > \varepsilon) \leq \sum_{k=1}^r \sup_{A'_k \in A_k \mathfrak{R}} \mathbf{P}\left(|\xi(A'_k)| > \frac{\varepsilon}{r}\right),$$

ahonnan következik, hogy

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^r A_k\right) \leq \sum_{k=1}^r \mu_3(A_k).$$

Ha most $A_1, A_2, \dots, A_r$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű tetszőleges halmazai, akkor az előbbieket szerint

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^r A_k\right) \leq \mu_3(A_1) + \mu_3(A_2 - A_1) + \dots + \mu_3\left(A_r - \sum_{k=1}^{r-1} A_k\right).$$

Mivel a $\mu_i(A), i = 1, 2, 3$ halmazfüggvények monotonok, következik, hogy

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^r A_k\right) \leq \sum_{k=1}^r \mu_3(A_k).$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A $\mu_i(A)$ halmazfüggvényekre vonatkozólag fennáll egy 0 vagy 1 törvény. Ezt fejezi ki a

2. 6. TÉTEL. Az $\mathfrak{R}$ gyűrű elemein értelmezett $\mu_1(A), \mu_2(A), \mu_3(A)$ halmazfüggvények csak a 0 és az 1 értéket vehetik fel.

BIZONYÍTÁS. Legyen $A \in \mathfrak{R}$ és tekintsük az $\mathfrak{R}$ gyűrű azon B elemeit, amelyekre teljesül, hogy $B \subseteq A$. Ha $\mu_1(A) > 0$ ($\mu_2(A) > 0$), akkor az 1. 4. tétel korolláriumuma szerint van olyan λ_1 (λ_2), hogy a $Q(\lambda_1, B)$ ($Q(\lambda_2, B)$) kvantilisek

alkalmas megválasztása esetén a $\{Q(\lambda_1, B), B \in A\mathfrak{R}\} (\{Q(\lambda_2, B), B \in A\mathfrak{R}\})$ halmaz nem korlátos alulról (felülről). Ekkor azonban a 2.2 tétel felhasználásával következik, hogy λ minden rögzített értéke mellett a $\{Q(\lambda, B), B \in A\mathfrak{R}\}$ halmazok sem korlátosak alulról (felülről). Innen az 1.4. tétel korolláriumának ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\mu_1(A) = 1$ ($\mu_2(A) = 1$). Tekintsük végül a $\mu_3(A)$ értéket. Ha $\mu_3(A) > 0$, akkor abból, hogy $\mu_3(A) \leq \mu_1(A) + \mu_2(A)$, következik, hogy $\mu_1(A)$ és $\mu_2(A)$ közül legalább az egyik pozitív. Figyelembe véve az előbb mondottakat és azt, hogy $\mu_3(A) \geq \mu_1(A), \mu_3(A) \geq \mu_2(A)$, következik, hogy $\mu_3(A) = 1$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Végül bizonyítsuk be a következő tételt:

2.7. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív (teljesen additív) halmazfüggvény. Ekkor minden rögzített t -re az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény szubadditív (teljesen szubadditív).*

BIZONYÍTÁS. Legyen $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata. Az 1-nél nem nagyobb abszolút értékű $z_1, z_2, \dots, z_r$ komplex számokra érvényes

$$|1 - z_1 z_2 \dots z_r| \leq |1 - z_1| + |1 - z_2| + \dots + |1 - z_r|$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\left| 1 - f\left(t, \sum_{k=1}^r A_k\right) \right| = \left| 1 - \prod_{k=1}^r f(t, A_k) \right| \leq \sum_{k=1}^r |1 - f(t, A_k)|, r = 1, 2, \dots$$

Ha tehát $\xi(A)$ additív, az állítást igazoltuk. Ha $\xi(A)$ teljesen additív és $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, akkor, mivel

$$f\left(t, \sum_{k=1}^r A_k\right) = \prod_{k=1}^r f(t, A_k) \Rightarrow f(t, A),$$

következik, hogy

$$|1 - f(t, A)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, A_k)|.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

III. FEJEZET

TELJESEN ADDITÍV HALMAZFÜGGVÉNYEK KITERJESZTÉSE

1. §. A probléma diszkussziója

Legyen $\mathfrak{A}$ valamely H tér bizonyos részhalmazaiból álló gyűrű és $\xi(A)$ egy $\mathfrak{A}$ elemein értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy mikor terjeszthető ki $\xi(A)$ értelmezése az $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ σ -gyűrűre. Kiterjesztés alatt egy oly $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ elemein értelmezett $\xi^*(A)$ teljesen additív halmazfüggvény konstrukcióját értem, melyre teljesül, hogy

$$\xi^*(A) = \xi(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{A}.$$

Nyilvánvaló, hogy minden teljesen additív halmazfüggvény nem terjeszthető ki, mert ha speciálisan $\xi(\omega, A)$ állandó, $\xi(\omega, A) \equiv \varphi(A)$, ahol $\varphi(A)$ valós értékű, $\mathfrak{A}$ elemein értelmezett teljesen additív halmazfüggvény, akkor ennek kiterjesztéséhez is további feltételek szükségesek.

Legyen például H a sík $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ négyzete, $\mathfrak{A}$ pedig az x -tengellyel párhuzamos egyeneseken fekvő, balról zárt, jobbról nyílt intervallumok véges összegeiből, ezek komplementumaiból, melyeket röviden komplementum-típusúnak fogom nevezni, és magából a H halmazból alkotott algebra. Ha $A = \sum_{k=1}^n \{a_k \leq x < b_k, y = y_k\}$, akkor legyen $\varphi(A) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)$

és $\varphi(A) = -\varphi(A)$. $\varphi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény. Ugyanis, ha $A_1, A_2, \dots$

$\mathfrak{A}$ -nek egy diszjunkt sorozata és $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$, akkor az A_k halmazok között legfeljebb egy lehet komplementum-típusú. Ha ilyen egyáltalán nincs, akkor A véges sok olyan balról zárt, jobbról nyílt intervallum összege, melyek mindegyike fel van bontva balról zárt, jobbról nyílt intervallumok összegére. Ezek hosszait akármilyen sorrendben adjuk össze, mindig ugyanazt az összeget kapjuk, tehát $\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)$. Ha pedig van egy komplementum-

típusú halmaz, és ez A_1 , akkor abból, hogy $\varphi(A) = \varphi(A_1) + \varphi\left(\sum_{k=2}^{\infty} A_k\right)$ és $\varphi\left(\sum_{k=2}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi(A_k)$, következik, hogy $\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)$. Ennek ellenére $\varphi(A)$ nem terjeszthető ki $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ -re, mert a $+\infty$ és $-\infty$ értékek egyidejűleg nem fordulhatnak elő σ -gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény értékészletében ([6] 18. o. Theorem 3. 4. 13.).

Ismeretes, hogy a közönséges halmazfüggvények esetében a kiterjesztés elvégezhetőségéhez és ahhoz, hogy a kiterjesztett halmazfüggvény véges értékű legyen, szükséges és elegendő, hogy a halmazfüggvény mindkét oldalról korlátos legyen. A kiterjesztést pedig legegyszerűbben úgy végezhetjük el, hogy a halmazfüggvényt felbontjuk pozitív és negatív részének különbségére és ezeket külön-külön kiterjesztjük.

A valószínűségi változó-értékű halmazfüggvények esetében ez az út nem járható, mert, ha az A halmaz mérhető részhalmazainak a száma nem megszámlálható, akkor az elemi események terében értelmezett

$$\nu_1^-(A) = \sup_{B \in \mathcal{A}} \xi(B), \quad \nu_1^+(A) = \inf_{A \in \mathcal{A}} \xi(B)$$

függvények nem feltétlenül mérhetők, de ha mérhetők is, akkor is lehetséges, hogy pozitív mértékű halmazon végtelen értéket vesznek fel. Ezért a kiterjesztést ebben az esetben más úton kell elvégeznünk.

Külön ki kell emelnünk, hogy abban a speciális esetben, ha $\xi(\omega, A) = q(A)$, az a követelmény, hogy $\xi(\omega, A)$ valószínűségi változó, annyit jelent, hogy a $q(A)$ érték véges. Ilyenformán a valós értékű halmazfüggvények közül csupán azokat kapjuk meg speciális esetként, amelyek véges értékűek.

Felvetődik a kérdés: vajon nem lehetne-e a valószínűségi változó-értékű halmazfüggvények egész elméletét úgy felépíteni, hogy a mintafüggvények (amelyek közönséges, valós értékű halmazfüggvények lennének) összességéből indulunk ki. Erre a válasz az, hogy ez az út abban az esetben járható csak, ha megelégszünk additív halmazfüggvényekkel. Ha ugyanis a mintafüggvényekről kikötjük, hogy teljesen additívak legyenek, akkor kizárunk a tárgyalásból sok fontos halmazfüggvényt. Legyen pl. ξ_t , $t \geq 0$, a jól ismert Brown-mozgás folyamat, $M(\xi_t) = 0$, $D^2(\xi_t) = t$. Ha $\mathcal{A}$ a számegyenes balról zárt, jobbról nyílt intervallumai véges összegeiből áll és a $\xi(A)$, $A \in \mathcal{A}$ halmazfüggvény a folyamat megfelelő differenciáiból, illetve ezek összegeiből alkotott additív halmazfüggvény, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény $\omega(A)$ mintafüggvényei nem lehetnek teljesen additívak. Ezt igen egyszerűen beláthatjuk. Tekintsük csupán az $I = [0, 1)$ intervallumot, amikor tehát $A \subseteq I$. Legyen ξ_t egy olyan, a $0 \leq t \leq 1$ intervallumban értelmezett szeparábilis Brown-mozgás folyamat, melyre

$$P(\xi_t = \xi_s) = 1,$$

és legyen $\tilde{\xi}(A)$ a ξ_t folyamat differenciái illetve ezek összegei által származtatott additív halmazfüggvény. Nyilvánvaló, hogy

$$P(\tilde{\xi}(A) = \xi(A)) = 1, \quad \text{ha } A \in \mathcal{A}.$$

A $\tilde{\xi}_t$ folyamat majdnem minden mintafüggvénye folytonos ([4], 393. o. Theorem

2. 2). Ebből és [4], 395. Theorem 2. 3.-ból* következik, hogy egy folytonos Brown-mozgás folyamat majdnem minden mintafüggvénye nem korlátos variációjú. Osszuk fel az $I = [0, 1)$ intervallumot $\frac{1}{n}$ hosszúságú, balról zárt, jobbról nyílt, diszjunkt $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$ intervallumok összegére és legyen

$$\tilde{\xi}_n = \sum_{k=1}^n |\tilde{\xi}(\mathfrak{I}_k)|, \quad \xi_n = \sum_{k=1}^n |\xi(\mathfrak{I}_k)|.$$

Az előbb mondottakból következik, hogy

$$P(\tilde{\xi}_n \rightarrow \infty) = 1.$$

Mivel $P(\tilde{\xi}_n = \xi_n) = 1$, a ξ_n sorozatra is fennáll, hogy

$$P(\xi_n \rightarrow \infty) = 1,$$

tehát a $\xi(A)$ halmazfüggvény majdnem minden mintafüggvénye nem korlátos variációjú.

Ennek a fejezetnek az eredményei hozzásegítenek ahhoz, hogy az R_n tér Borel-halmazain értelmezett additív $\xi(A)$ halmazfüggvények egzisztenciaproblémáit megoldjuk. Bemutatom azt a gondolatmenetet, ahogyan ez egyes konkrét esetekben keresztülvihető.

Konstruáljunk például egy olyan $\xi(A)$ halmazfüggvényt, amely az R_n tér valamely véges, zárt H téglája Borel-féle részalmazain van értelmezve és $\xi(A)$ Cauchy-eloszlással rendelkezik, karakterisztikus függvénye a következő alakú:

$$f(t, A) = e^{-|A||t|}.$$

Először a Kolmogorov-féle konstrukció ([8], 4. §.) segítségével konstruálunk egy olyan $\xi_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ ($t_1, t_2, \dots, t_n \in H$) valószínűségi változó-összességet, melyre teljesülnek az alábbi feltételek:

a) Ha I a következő n -dimenziós téglá:

$$(3.1) \quad I = \{a_i \leq x_i < a_i + h_i; \quad i = 1, 2, \dots, n\}, \quad I \subseteq H,$$

és

$$A_{h_i} \xi_{t_1, t_2, \dots, t_n} = \xi_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + h_i, t_{i+1}, \dots, t_n} - \xi_{t_1, t_2, \dots, t_n},$$

továbbá

$$A_I \xi_{t_1, t_2, \dots, t_n} = A_{h_1} A_{h_2} \dots A_{h_n} \xi_{t_1, t_2, \dots, t_n},$$

akkor a

$$(3.2) \quad \xi(I) = A_I \xi_{t_1, t_2, \dots, t_n}$$

valószínűségi változó Cauchy-eloszlással rendelkezik, mégpedig

$$(3.3) \quad f(t, I) = e^{-h_1 h_2 \dots h_n |t|}.$$

* Ez a tétel eredetileg P. Lévytől származik.

b) Ha $I_1, I_2, \dots, I_r$ a H téglában fekvő diszjunkt n -dimenziós téglák, akkor a (3. 2) kifejezéssel definiált

$$\xi(I_1), \xi(I_2), \dots, \xi(I_r)$$

valószínűségi változók függetlenek.

Ezután tekintjük a (3. 1) téglák véges összegeiből alkotott $\mathfrak{A}$ gyűrűt és ennek $A = I_1 + I_2 + \dots + I_r$ elemeihez hozzárendeljük a

$$(3. 4) \quad \xi(A) = \sum_{k=1}^r \xi(I_k)$$

valószínűségi változókat.

Miután a Kolmogorov-féle konstrukcióval eddig eljutottunk, megállapítjuk, hogy $\xi(A)$ teljesen additív az $\mathfrak{A}$ gyűrűn, továbbá az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{A}\}$ halmaz kompakt és a 3. 2. tételt szem előtt tartva, elvégezzük a $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjesztését a H halmaz Borel-féle részhalmazainak $\mathbb{S}(\mathfrak{A})$ σ -gyűrűjére.* $\xi(A)$ teljes additivitása a 2. 1. tételből és abból következik, hogy ha $A_n \rightarrow 0$, akkor $|A_n| \rightarrow 0$. Ugyanis (3. 3) és (3. 4) alapján azt kapjuk, hogy

$$f(t, A_n) = e^{-|A_n||t|} \rightarrow 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

A másik tulajdonság, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{A}\}$ halmaz kompakt, abból következik, hogy

$$f(t, A) = e^{-|A||t|} \geq e^{-|H||t|} = g(t),$$

ahol $g(t)$ folytonos függvény, $g(0) = 1$, továbbá $Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0$ és így teljesülnek az 1. 9. tétel feltételei. Ezzel a konstrukciót befejeztük.

2. §. Gyűrűn értelmezett halmazfüggvény kiterjesztése

3. 1. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha van olyan pozitív T szám, hogy az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény minden olyan rögzített t értékre, melyre $|t| \leq T$, korlátos variációjú, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető az $\mathbb{S}(\mathfrak{A})$ σ -gyűrűre. A kiterjesztés egyértelmű abban az értelemben, hogy ha $\xi^*(A)$ és $\xi^{**}(A)$ az $\mathbb{S}(\mathfrak{A})$ σ -gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvények és

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{A},$$

akkor

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A), \text{ ha } A \in \mathbb{S}(\mathfrak{A}).$$

* Jelen esetben $\mathbb{S}(\mathfrak{A})$ nemcsak σ -gyűrű, hanem σ -algebra is.

Megfordítva, ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{A}$ -gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény és T tetszőleges pozitív szám, akkor a

$$(3.5) \quad \sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A)|$$

halmazfüggvény korlátos variációjú.

A TÉTEL ELSŐ FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. Feltevés szerint $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény az $\mathfrak{A}$ gyűrűn. Ha tehát $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{A}$ gyűrű egy diszjunkt

halmazsorozata, $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$, akkor

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq T} \left| f(t, A) - \prod_{k=1}^n f(t, A_k) \right| = 0.$$

Tekintsük a $[-T, T]$ intervallumban folytonos függvények $\mathfrak{B}$ Banach-algebráját, egy függvény normája legyen az abszolút értékének a maximuma. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B}$ kommutatív és van egység eleme. (3.6) szerint, ha az $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett karakterisztikus függvényeket csak a $[-T, T]$ intervallumban tekintjük és $g(t, A) = f(t, A)$, ha $|t| \leq T$, akkor $g(t, A)$ olyan teljesen multiplikatív* halmazfüggvény, melynek értelmezési tartománya az $\mathfrak{A}$ gyűrű, értékészlete pedig a $\mathfrak{B}$ Banach-algebrában van. Megjegyezzük, hogy mivel $g(0, A) = 1$, $\|g(t, A)\| = \sup_{|t| \leq T} |g(t, A)| = 1$, tehát 0 normájú függvény nem fordul elő $g(t, A)$ értékészletében.

Bebizonyítjuk, hogy az $\|1 - g(t, A)\|$, $A \in \mathfrak{A}$ halmazfüggvény korlátos variációjú és teljesen szubadditív.

Az első állítás bizonyításához kimutatjuk, hogy teljesülnek az 1.1. tétel feltételei. Mivel $\|g(t, A)\| \leq 1$, következésképpen $\|1 - g(t, A)\| \leq 2$, tehát az 1. feltétel teljesül. A 2.7. tétel szerint, ha $A_1, A_2, \dots, A_r$ az $\mathfrak{A}$ gyűrű diszjunkt halmazai, $A = \sum_{i=1}^r A_i$, akkor t minden értékére

$$|1 - f(t, A)| \leq \sum_{k=1}^r |1 - f(t, A_k)|,$$

tehát

$$\|1 - g(t, A)\| = \sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A)| \leq \sum_{k=1}^r \sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A_k)| = \sum_{k=1}^r \|1 - g(t, A_k)\|.$$

Eszerint a 2. feltétel is teljesül. Legyen $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{A}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata. Tételünk feltétele szerint

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, A_k)| < \infty, \quad \text{ha } |t| \leq T.$$

* Ennek definíciója megtalálható a [11] dolgozatban.

Ebból következik ([4], 115. o. Theorem 2.7.), hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$ sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Másrészt ez maga után vonja, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF(x, A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi(A_k)| > \varepsilon)$$

végtelen sorok abszolút konvergensek ([8] 5. §). Az

$$\begin{aligned} \|1 - g(t, A_k)\| &= \sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A_k)| \leq \sup_{|t| \leq T} \left| \int_{|x| \leq \varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx) dF(x, A_k) + \right. \\ &\quad \left. + it \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF(x, A_k) \right| + 2P(|\xi(A_k)| > \varepsilon) \leq \frac{T^2}{2} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A_k) + \\ &\quad + T \left| \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF(x, A_k) \right| + 2P(|\xi(A_k)| > \varepsilon) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségből az előbb mondottak alapján következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|1 - g(t, A_k)\| < \infty,$$

tehát az 1.1. tétel 3. feltétele is teljesül.

A második állítás a 2.7. tételből közvetlenül adódik, mert, ha t minden értékére az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény teljesen szubadditív, akkor teljesen szubadditív az $\|1 - g(t, A)\| = \sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény is.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy teljesülnek [11] 1. tételének feltételei, következésképpen a $g(t, A)$ halmazfüggvény egyértelműen kiterjeszthető az $\mathbb{S}(\mathfrak{A})$ σ -gyűrűre, más szóval, létezik egy és csak egy olyan $g^*(t, A)$, az $\mathbb{S}(\mathfrak{A})$ σ -gyűrűn értelmezett, teljesen multiplikatív halmazfüggvény, amelyre

$$g^*(t, A) = g(t, A), \quad \text{ha } A \in \mathfrak{A},$$

és

$$g^*(t, A) \in \mathfrak{A}, \quad \text{ha } A \in \mathbb{S}(\mathfrak{A}).$$

Igaz továbbá az is, hogy ha $A_n \in \mathbb{S}(\mathfrak{A})$, $n = 1, 2, \dots$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} g^*(t, A_n) = g^*(t, A)$. Speciálisan, ha $A = 0$, akkor, mivel $g^*(t, 0) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g^*(t, A_n) = 1$.

A $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjesztését transzfinit indukció segítségével végezzük el.

Konstruáljuk meg az $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ halmazosztályok transzfinit sorozatát a következőképpen. Ha minden olyan r rendszámra, melyre

$\nu < \nu' < \omega_1$, az $\mathfrak{R}_{\nu}$ halmazosztályt már értelmeztük, akkor legyen $\mathfrak{R}_{\nu'}$ azoknak a halmazoknak az összessége, amelyek előállíthatók a $\sum_{\nu < \nu'} \mathfrak{R}_{\nu}$ osztályba tartozó halmazok konvergens sorozatainak limeszeként. Nyilvánvaló, hogy minden $\nu < \omega_1$ rendszámhoz tartozó $\mathfrak{R}_{\nu}$ halmazosztály gyűrű.

Tegyük fel, hogy minden $\nu < \nu' < \omega_1$ rendszámhoz tartozó $\mathfrak{R}_{\nu}$ gyűrű elemeihez már hozzárendeltünk valószínűségi változókat, pontosabban, $\mathfrak{R}_{\nu}$ elemein értelmeztünk egy olyan $\xi_{\nu}(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt, amelyre teljesül, hogy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \xi_{\nu}(A) &= \xi_{\nu_0}(A), \quad \text{ha } \nu_0 < \nu, A \in \mathfrak{R}_{\nu_0}, \\ f_{\nu}(t, A) &= g^*(t, A), \quad \text{ha } |t| \leq T, A \in \mathfrak{R}_{\nu}, \end{aligned}$$

ahol $A \in \mathfrak{R}_{\nu}$ és $f_{\nu}(t, A)$ a $\xi_{\nu}(A)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Ezután értelmezzük a $\xi_{\nu'}(A)$, $A \in \mathfrak{R}_{\nu'}$ halmazfüggvényt.

Ehhez előbb kimutatjuk, hogy ha $A_1, A_2, \dots$ a $\sum_{\nu < \nu'} \mathfrak{R}_{\nu}$ gyűrű egy konvergens sorozata, $A_k \in \mathfrak{R}_{\nu_k}$, akkor a $\xi_{\nu_k}(A_k)$ sorozat sztochasztikusan konvergál egy valószínűségi változóhoz. Legyenek

$$C_k = \prod_{n=1}^k A_n, \quad D_k = C_k - C_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

A $C_1, D_2, D_3, \dots$ halmazok diszjunktak, tehát alkalmazva a transzfinit indukciós feltevést, következik, hogy a $\xi_{\nu_1}(C_1), \xi_{\nu_2}(D_2), \xi_{\nu_3}(D_3), \dots$ valószínűségi változók függetlenek. Mivel továbbá $C_k = C_1 + D_2 + \dots + D_k$,

$$(3.8) \quad \xi_{\nu_k}(C_k) = \xi_{\nu_1}(C_1) + \sum_{n=2}^k \xi_{\nu_n}(D_n),$$

a (3.7) indukciós feltevést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$(3.9) \quad f_{\nu_k}(t, C_k) = f_{\nu_1}(t, C_1) \prod_{n=2}^k f_{\nu_n}(t, D_n) = g^*(t, C_1) \prod_{n=2}^k g^*(t, D_n), \quad \text{ha } |t| \leq T.$$

A (3.9) reláció jobboldalán álló sorozat konvergál egy, a $[-T, T]$ intervallumban folytonos függvényhez, tehát ([4] 115. o. Theorem 2.7) a (3.8) kifejezés jobboldalán álló sor és így a $\xi_{\nu_k}(C_k)$ sorozat is 1 valószínűséggel konvergál. Ha $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$, akkor jelölje ξ ezt a határértéket. Kimutatjuk, hogy

$$\xi_{\nu_k}(A_k) \Rightarrow \xi, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty.$$

Tekintsük a következő relációt

$$\xi_{\nu_k}(A_k) = \xi_{\nu_k}(C_k) + \xi_{\nu_k}(A_k - C_k).$$

Elegendő tehát azt bebizonyítanunk, hogy

$$\xi_{\nu_k}(A_k - C_k) \Rightarrow 0, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty.$$

Mivel $\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k - C_k) = 0$, következik, hogy ha $|t| \leq T$, akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{r_k}(t, A_k - C_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g^*(t, A_k - C_k) = 1.$$

Másrészt az (1.3) egyenlőtlenség szerint

$$1 - Rf_{r_k}(2t, A_k - C_k) \leq 4(1 - Rf(t, A_k - C_k))$$

t minden értékére teljesül, tehát $f_{r_k}(t, A_k - C_k) \Rightarrow 1$, amivel az állítást igazoltuk.

Definiáljuk a $\xi_{r'}(A)$, $A \in \mathfrak{R}_{r'}$ halmazfüggvényt a következőképpen. Ha $A \in \mathfrak{R}_{r'}$, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, ahol $A_n \in \mathfrak{R}_{r_n}$, $r_n < r'$, $n = 1, 2, \dots$, akkor legyen

$$\xi_{r'}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{st } \xi_{r_n}(A_n).$$

Bebizonyítjuk, hogy $\xi_{r'}(A)$ definíciója egyértelmű. Legyen $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ a $\sum_{r < r'} \mathfrak{R}_r$ gyűrű két konvergens sorozata, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A$. Az $A_n B_n$, $A_n - B_n$ sorozatok tagjai szintén elemei a $\sum_{r < r'} \mathfrak{R}_r$ gyűrűnek, azonkívül $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - A_n) = 0$. Ha $A_n \in \mathfrak{R}_{r_n}$, $B_n \in \mathfrak{R}_{r_n}$, $r_n < r'$, akkor

$$\begin{aligned} \xi_{r_n}(A_n) &= \xi_{r_n}(A_n B_n) + \xi_{r_n}(A_n - B_n), \\ \xi_{r_n}(B_n) &= \xi_{r_n}(A_n B_n) + \xi_{r_n}(B_n - A_n). \end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - A_n) = 0$ és így, ha $|t| \leq T$,

$$\begin{aligned} f_{r_n}(t, B_n - A_n) &= g^*(t, B_n - A_n) \rightarrow 1, \\ f_{r_n}(t, A_n - B_n) &= g^*(t, A_n - B_n) \rightarrow 1, \end{aligned}$$

az (1.3) egyenlőtlenség figyelembevételével következik, hogy

$$\begin{aligned} \xi_{r_n}(A_n) - \xi_{r_n}(A_n B_n) &\Rightarrow 0, \\ \xi_{r_n}(B_n) - \xi_{r_n}(A_n B_n) &\Rightarrow 0, \end{aligned}$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{st } \xi_{r_n}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{st } \xi_{r_n}(B_n),$$

és így $\xi_{r'}(A)$ definíciója egyértelmű. Ebből következik az is, hogy

$$\xi_{r'}(A) = \xi_r(A), \quad \text{ha } r < r'.$$

Most bebizonyítjuk, hogy amit a $r < r'$ rendszámokhoz tartozó $\xi_r(A)$ halmazfüggvényekre feltettünk, az teljesül a $\xi_{r'}(A)$ halmazfüggvényre is. Először kimutatjuk, hogy $f_{r'}(t, A) = g^*(t, A)$, ha $|t| \leq T$. Legyen $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, ahol

$A_n \in \mathfrak{R}_{r_n}$, $r_n < r'$, $n = 1, 2, \dots$. Mivel $\xi_{r_n}(A_n) \Rightarrow \xi_{r'}(A)$ és így $f_{r_n}(t, A_n) \Rightarrow \Rightarrow f_{r'}(t, A)$, továbbá $g^*(t, A_n) \rightarrow g^*(t, A)$, következik, hogy

$$f_{r'}(t, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{r_n}(t, A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^*(t, A_n) = g^*(t, A), \text{ ha } |t| \leq T.$$

Az, hogy $\xi_{r'}(A)$ additív halmazfüggvény, a következőképpen látható be. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_r$ az $\mathfrak{R}_{r'}$ gyűrű diszjunkt halmazai. Legyenek $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_r^{(n)}$ a $\sum_{r'} \mathfrak{R}_{r'}$ gyűrű olyan sorozatai, melyekre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_k^{(n)} = A_k, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad A_i^{(n)} A_k^{(n)} = 0, \text{ ha } i \neq k.$$

Az $A_1^{(n)}, \dots, A_r^{(n)}$ halmazokhoz független valószínűségi változók tartoznak, összegükhöz az egyes valószínűségi változók összege. Mivel ezek a tulajdonságok a határátmenet elvégzése után is megmaradnak, a $\xi_{r'}(A_1), \dots, \xi_{r'}(A_r)$ valószínűségi változók függetlenek és $\xi_{r'}\left(\sum_{k=1}^r A_k\right) = \sum_{k=1}^r \xi_{r'}(A_k)$. $\xi_{r'}(A)$ azonban teljesen additív is, mert mint láttuk, $f_{r'}(t, A) = g^*(t, A)$, ha $|t| \leq T$, továbbá $\mathfrak{R}_{r'}$ minden nem növekvő $A_1, A_2, \dots$ sorozatára, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{r'}(t, A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^*(t, A_n) = 1 \quad (|t| \leq T),$$

és így a 2. 1. tétel korolláriumának feltétele teljesül.

Definiáljuk végül a $\xi^*(A)$ halmazfüggvényt a következőképpen:

$$\xi^*(A) = \xi_{r'}(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_{r'}, \quad r' < \omega_1.$$

Mivel $\sum_{r'} \mathfrak{R}_{r'} = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, ezáltal a $\xi^*(A)$ halmazfüggvényt $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ minden elemén értelmeztük. Világos, hogy $\xi^*(A)$ additív halmazfüggvény. $\xi^*(A)$ azonban teljesen additív is. Ez abból következik, hogy mint láttuk, a $\xi^*(A)$ valószínűségi változók $f^*(t, A)$ karakterisztikus függvényeire fennáll az $f^*(t, A) = g^*(t, A)$, $|t| \leq T$ reláció és így $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ minden nem növekvő, 0-hoz tartó A_n sorozatára

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^*(t, A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^*(t, A_n) = 1, \text{ ha } |t| \leq T,$$

ami a 2. 1. tétel korolláriumára szerint maga után vonja azt, hogy $\xi^*(A)$ teljesen additív halmazfüggvény.

A kiterjesztés egyértelműsége következőképpen látható be. Legyen $\xi^*(A)$ és $\xi^{**}(A)$ két, az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ -gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény, és tegyük fel, hogy

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}.$$

Jelölje $\mathfrak{M}$ azoknak az A halmazoknak az osztályát, amelyekre teljesül a $\xi^*(A) = \xi^{**}(A)$ egyenlőség. Legyen $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{M}$ halmazosztály egy monoton sorozata. Mivel a ξ^* és ξ^{**} halmazfüggvények teljesen additívak, követ-

kezik, hogy a $\xi^*(A_n)$, $\xi^{**}(A_n)$ sorozatok konvergensek és ha $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, akkor

$$\xi^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^*(A_n), \quad \xi^{**}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^{**}(A_n).$$

Ámde $\xi^*(A_n) = \xi^{**}(A_n)$, $n = 1, 2, \dots$, tehát $\xi^*(A) = \xi^{**}(A)$, amiből következik, hogy $A \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ tehát monoton osztály és $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$. Mivel az $\mathfrak{R}$ gyűrűt tartalmazó legkisebb monoton osztály megegyezik az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ -gyűrűvel, következik, hogy $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, vagyis

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A), \quad \text{ha } A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R}).$$

Ezzel a 3.1. tétel első részét bebizonyítottuk.

A TÉTEL MÁSODIK FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. A tétel második felének bizonyításához kimutatjuk, hogy akármilyen pozitív szám is T , a (3.5) halmazfüggvényre teljesülnek a 1.1. tétel feltételei. Az $a)$ feltétel nyilvánvalóan teljesül, hiszen $f(t, A)$ karakterisztikus függvény és így

$$\sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A)| \leq 2.$$

Lássuk a $b)$ feltételt. A 2.7. tétel szerint t minden rögzített értékére az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény szubadditív. Ebből következik, hogy ha T rögzített pozitív szám, akkor a $\sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény szintén szubadditív, tehát a $b)$ feltétel is teljesül.

Végül a $c)$ feltétellel kapcsolatban tekintsük az $\mathfrak{S}$ σ -gyűrű egy tetszőleges diszjunkt $A_1, A_2, \dots$ halmazsorozatát. Mivel a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, következik, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x| \leq 1} x^2 dF(x, A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{|x| \leq 1} x dF(x, A_k) \right|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi(A_k)| > 1)$$

végtelen sorok konvergensek ([8], 5. §.) Ebből és az

$$\begin{aligned} |1 - f(t, A_k)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-itx}) dF(x, A_k) \right| = \left| \int_{|x| \leq 1} + \int_{|x| > 1} \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{|x| \leq 1} (e^{itx} - 1 - itx) dF(x, A_k) \right| + |t| \left| \int_{|x| \leq 1} x dF(x, A_k) \right| + 2\mathbf{P}(|\xi(A_k)| > 1) \leq \\ &\leq \frac{t^2}{2} \int_{|x| \leq 1} x^2 dF(x, A_k) + |t| \left| \int_{|x| \leq 1} x dF(x, A_k) \right| + 2\mathbf{P}(|\xi(A_k)| > 1) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy a c) feltétel is teljesül, tehát a (3.6) halmazfüggvény korlátos variációjú. Ezzel a 3.1. tételt bebizonyítottuk.

A következő tétel érvényességét a 3.1. tétel bizonyításából is kiolvashatjuk, azonban ugyanezt a transzfinit indukciós konstrukció felhasználása nélkül, csupán a 3.1. tétel második felének állítására támaszkodva is bebizonyíthatjuk. Erre a tételre a továbbiakban szükségünk lesz.

3.2. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathbb{S}$ σ -gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha $A_1, A_2, \dots$ az $\mathbb{S}$ σ -gyűrű egy konvergens halmazsorozata, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, akkor

$$\xi(A_n) \Rightarrow \xi(A), \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

BIZONYÍTÁS. A 2.7. tétel szerint az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény t minden rögzített értékére teljesen szubadditív. Ebből következik, hogy minden pozitív T -re a $\sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény is teljesen szubadditív. A 3.1. tétel szerint a $\sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény korlátos variációjú is, tehát ha $W(T, A)$ jelenti ennek az $A \in \mathbb{S}$ halmazban vett variációját akkor az 1.2. tétel szerint $W(T, A)$ korlátos mérték az $\mathbb{S}$ σ -gyűrűn. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A) = 0$, következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} W(T, A_n - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(T, A - A_n) = 0$. A

$$\sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, B)| \leq W(T, B), \quad B \in \mathbb{S}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t, A_n - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, A - A_n) = 1$, ha $|t| \leq T$. Mivel ez minden pozitív T -re igaz, következik, hogy

$$\xi(A - A_n) \Rightarrow 0, \quad \xi(A_n - A) \Rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Ebből és a

$$|\xi(A_n) - \xi(A)| \leq |\xi(A_n - A)| + |\xi(A - A_n)|$$

egyenlőtlenségből következik az, amit bizonyítani akartunk.

A kiterjeszthetőség feltételét igen szemléletesen fejezi ki a

3.3. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathbb{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha $\mathbb{R}$ minden $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt halmazsorozatára a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$$

sor 1 valószínűséggel konvergál, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ -re.

BIZONYÍTÁS. A 2.7. tétel szerint $|1 - f(t, A)|$ ($A \in \mathbb{R}$) teljesen szubadditív halmazfüggvény. Feltételünkéből következik, hogy ha $A_1, A_2, \dots$ az $\mathbb{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, A_k)| < \infty,$$

hiszen a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$ sornak minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergálnia kell, ami maga után vonja az előbbi relációt (l. [4] 115. o. Theorem 2. 7 (III)). Mivel továbbá $|1 - f(t, A)| \leq 2$, az 1. 1 tétel szerint $|1 - f(t, A)|$ minden rögzített t -re korlátos variációjú halmazfüggvény. Eszerint a 3. 1. tétel feltételei teljesülnek, ami tételünket is bizonyítja.

3. §. Kiterjesztési tétel eloszlásfüggvényekre vonatkozó feltétellel

A további tételekben a kiterjesztés elvégezhetőségére vonatkozó állítást úgy bizonyítjuk, hogy visszavezetjük a 3. 1. tételre. Ezért a kiterjesztés egyértelműségét nem szükséges újból kimondani.

3. 4. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{A}\}$ eloszlásfüggvény-halmaz kompakt, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ -re.*

Megfordítva, ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ -gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény, akkor az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ halmaz kompakt.

A TÉTEL ELSŐ FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. Legyen $A_1, A_2, \dots$ az $\mathfrak{A}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata. Mivel az $\mathfrak{F}' = \{F(x, A_k), k = 1, 2, \dots\}$ halmaz kompakt, az 1. 10. tétel szerint a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$ sor 1 valószínűséggel konvergál. Ilyenformán állításunk a 3. 3. tételből közvetlenül következik.

A TÉTEL MÁSODIK FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. Először bebizonyítjuk, hogy a $\mu_3(A)$, $A \in \mathfrak{S}$ halmazfüggvény teljesen szubadditív. Legyen $A_1, A_2, \dots$ egy diszjunkt halmazsorozat, $A_k \in \mathfrak{S}$, $k = 1, 2, \dots$. A 2. 5. tételből következik, hogy

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu_3(A_k) + \mu_3\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\right).$$

Csupán azt kell belátnunk tehát, hogy a jobboldal második tagja 0-hoz tart.

Legyen $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$. A $\mu_3(A)$ halmazfüggvény monoton, tehát a $\mu_3(B_n)$ sorozat nem növekvő. A 2. 6. tétel szerint $\mu_3(A)$ csak a 0 és az 1 értékeket veheti fel, tehát két eset lehetséges: vagy van olyan N , hogy $\mu_3(B_n) = 0$, ha $n > N$, vagy $\mu_3(B_n) = 1$ n minden értékére. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy az utóbbi eset áll fenn. Ekkor az 1. 4. tétel korolláriumuma és a 2. 2. tétel szerint léteznek olyan $C_1, C_2, \dots$ halmazok, hogy $C_k \in \mathfrak{S}, C_k \subseteq B_k, \left|Q\left(\frac{1}{2}, C_k\right)\right| > 1$, $k = 1, 2, \dots$. Mivel $B_k \rightarrow 0$, következik, hogy $C_k \rightarrow 0$, és így a 3. 2. tétel

szerint $\xi(C_k) \Rightarrow 0$. Ebből azonban következik, hogy $Q\left(\frac{1}{2}, C_k\right) \rightarrow 0$, ami ellentmondás. Tehát $\mu_3(A)$ teljesen szubadditív.

A $\mu_3(A)$ halmazfüggvény monotonitásából következik, hogy fennáll a következő tulajdonság is: ha $A_1, A_2, \dots$ tetszőleges, az $\mathbb{S}$ σ -gyűrűhöz tartozó halmazok, akkor

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3(A_k).$$

Ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l \right) \quad (A_0 = 0),$$

tehát, mivel $\mu_3(A)$ teljesen szubadditív és monoton, következik, hogy

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3\left(A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3(A_k).$$

Tekintsük az $\mathbb{S}$ σ -gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathbb{S}\}$ halmaz nem kompakt. Ekkor az 1. 6. tétel szerint

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathbb{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = \varrho > 0.$$

Innen következik, hogy minden pozitív ε -ra

$$\sup_{A \in \mathbb{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = \varrho > 0.$$

Mivel

$$\sup_{A \in \mathbb{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = \sup_{A \in \mathbb{S}} \sup_{B \in A} \mathbf{P}(|\xi(B)| > \varepsilon),$$

következik, hogy létezik olyan A_n ($A_n \in \mathbb{S}$) halmazzsorozat, amelyre

$$\sup_{B \in A_n} \mathbf{P}(|\xi(B)| > n) \geq \frac{\varrho}{2} > 0.$$

Ha $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, akkor az előbbieket szerint

$$\sup_{B \in A} \mathbf{P}(|\xi(B)| > n) \geq \sup_{B \in A_n} \mathbf{P}(|\xi(B)| > n) \geq \frac{\varrho}{2} > 0,$$

tehát

$$\mu_3(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in A} \mathbf{P}(|\xi(B)| > n) \geq \frac{\varrho}{2} > 0.$$

A 2. 6. tétel szerint $\mu_3(A)$ csak a 0 és az 1 értéket veheti fel, tehát következik, hogy $\mu_3(A) = 1$.

Most bebizonyítjuk, hogy ha $B \in \mathbb{S}$, $\mu_2(B) = 1$, akkor minden λ, m szám-párhoz található olyan $B_m \in B\mathbb{S}$ halmaz, hogy a $Q(\lambda, B_m)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett

$$\mu_3(B_m) = 1, \quad |Q(\lambda, B_m)| > m.$$

Tegyük fel, hogy ilyen B_m halmaz nem létezik. Mivel $\mu_3(B) = 1$, találhatók olyan $C_k \in B\mathbb{S}$, $k = 1, 2, \dots$ halmazok, hogy $|Q(\lambda, C_k)| > k$. Feltevésünk szerint $\mu_3(C_k) = 0$, ha $k \geq m$. Tekintsük a $C = \sum_{k=m}^{\infty} C_k$ halmazt. Az előbb bebizonyítottuk, hogy

$$\mu_3(C) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu_3(C_k),$$

tehát $\mu_3(C) = 0$. Ekkor azonban az 1.6. és 1.5. tételek szerint létezik olyan $K(\lambda)$ szám, hogy a $Q(\lambda, C')$ kvantilisek tetszőleges megválasztása esetén

$$|Q(\lambda, C')| \leq K(\lambda), \quad \text{ha } C' \in C\mathbb{S},$$

ami ellentmondás.

Az előbb mondottakat a $B = A$ halmazra alkalmazva, válasszunk olyan $B_1 \in A\mathbb{S}$ halmazt, amelyre $\mu_3(B_1) = 1$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_1\right)\right| > 1$. Ugyanígy következik, hogy létezik olyan $B_2 \in B_1\mathbb{S}$ halmaz, amelyre $\mu_3(B_2) = 1$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_2\right)\right| > 2$, stb. Konstruálhatunk tehát olyan $B_1, B_2, \dots$ nem növekvő halmazsorozatot, amelyre $B_n \in \mathbb{S}$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_n\right)\right| > n$. Ámde a $\xi(B_n)$ sorozat konvergens, mert

$$\xi(B_n) = \xi(B) + \sum_{k=n}^{\infty} (\xi(B_k) - \xi(B_{k+1})), \quad B = \prod_{k=1}^{\infty} B_k,$$

tehát a $Q\left(\frac{1}{2}, B_n\right)$ sorozat korlátos, ami ellentmondás. Ezzel a 3.4. tételt bebizonyítottuk.

KOROLLÁRIUM. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = 0,$$

akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathbb{S}(\mathfrak{R})$ -re.

Megfordítva, ha $\xi(A)$ egy $\mathbb{S}$ σ -gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény, akkor

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathbb{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Az állítás a 3.4. és 1.6. tételek közvetlen következménye.

4. §. Kiterjesztési tételek kvantilisekre vonatkozó feltételekkel

A következő tételek egyszerű alkalmazásai az előző §-ban bebizonyított tételeknek és a II. fejezet tételeinek. Ezek közül az első három a 3. 4. tétel feltétele enyhítésével foglalkozik.

A 3. 5. tétel megmutatja, hogy a valószínűségi változó-értékű, teljesen additív $\xi(A)$ halmazfüggvények kiterjesztésében mennyivel több feltételre van szükség, mint a közönséges, valós értékű halmazfüggvények esetében. Ha $\varphi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett valós-értékű, teljesen additív halmazfüggvény és

$$\xi(\omega, A) \equiv \varphi(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R},$$

akkor

$$Q(\lambda, A) \equiv \varphi(A), \text{ ha } 0 < \lambda < 1, A \in \mathfrak{R},$$

vagyis $\xi(\omega, A)$ minden kvantilisre egybeesik a $\varphi(A)$ értékkel. Mivel pedig $\varphi(A)$ kiterjesztéséhez szükséges, hogy a $\{\varphi(A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos legyen, mondhatjuk, hogy a $\xi(A) = \varphi(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető, ha van olyan λ , amelyre a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos.

Ha $\xi(A)$ nem konstans, akkor, mint a 3. 5. tétel állítja, a kiterjesztéshez két különböző λ -értékhez tartozó kvantilis-halmaz korlátosságát kell feltennünk.

3. 5. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha létezik olyan λ_1, λ_2 számpár: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, hogy a $Q(\lambda_1, A), Q(\lambda_2, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}, \{Q(\lambda_2, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmazok korlátosak, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathbb{S}(\mathfrak{R})$ -re.*

BIZONYÍTÁS. A tétel a 1. 11. és a 3. 3. tételek közvetlen következménye.

3. 6. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha a $\xi(A), A \in \mathfrak{R}$ valószínűségi változók szimmetrikus eloszlásúak és létezik olyan $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ($0 < \lambda < 1$) szám, hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathbb{S}(\mathfrak{R})$ -re.*

BIZONYÍTÁS. Mivel $\lambda \neq \frac{1}{2}$, következik, hogy $\lambda \neq 1 - \lambda$. Másrészt azonban $\xi(A)$ szimmetrikus eloszlású, tehát a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmazzal együtt a $\{Q(1 - \lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz is korlátos és így a 3. 5. tétel feltételei teljesülnek.

3. 7. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha a $\xi(A), A \in \mathfrak{R}$ valószínűségi változók nem-negatívak és van olyan λ ($0 < \lambda < 1$), hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ halmaz korlátos, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathbb{S}(\mathfrak{R})$ -re.*

BIZONYÍTÁS. A tétel a 3. 5. és 2. 4. tételek közvetlen következménye.

5. §. További kiterjesztési tételek

3. 8. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha van olyan pozitív ε , hogy a következő halmazfüggvények:

$$(3. 10) \quad \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A), \quad \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF(x, A), \quad \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon), \quad A \in \mathfrak{R}$$

korlátos variációjúak, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ -re.

Megfordítva, ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ -gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény, akkor a (3. 10) halmazfüggvények ($A \in \mathfrak{S}$) minden pozitív ε -ra korlátos variációjúak.

A TÉTEL ELSŐ FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. Kimutatom, hogy az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény t minden rögzített értéke mellett korlátos variációjú. Ugyanis, ha $\varepsilon > 0$, akkor

$$|1 - f(t, A)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dF(x, A) \right| \leq \frac{t^2}{2} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A) + |t| \left| \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF(x, A) \right| + 2\mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon), \quad A \in \mathfrak{R}.$$

A TÉTEL MÁSODIK FELÉNEK BIZONYÍTÁSA. A 3. 1. tétel szerint a (3. 5) halmazfüggvény korlátos variációjú. Az (1. 1.) egyenlőtlenség szerint ebből következik, hogy ha $0 < \varepsilon \leq 1$, akkor az

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A), \quad A \in \mathfrak{S}$$

halmazfüggvény korlátos variációjú. Az (1. 2.) egyenlőtlenségből következik, hogy a

$$\mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon), \quad A \in \mathfrak{S}$$

halmazfüggvény minden pozitív ε -ra korlátos variációjú. Mivel továbbá tetszőleges ε -ra fennáll, hogy

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A) \leq \int_{|x| \leq 1} x^2 dF(x, A) + \varepsilon^2 \mathbf{P}(|\xi(A)| > 1),$$

az előbb mondottak figyelembevételével azt kapjuk, hogy az

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A)$$

halmazfüggvény is minden pozitív ε -ra korlátos variációjú. Tekintsük a következő egyenlőséget:

$$f(t, A) - 1 = \int_{|x| \leq \varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx) dF(x, A) + it \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF(x, A) + \int_{|x| > \varepsilon} (e^{itx} - 1) dF(x, A).$$

Ha $t \neq 0$, akkor innen következik, hogy

$$\left| \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF(x, A) \right| \leq \frac{1}{|t|} |1 - f(t, A)| + \frac{|t|}{2} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A) + \frac{2}{|t|} P(|\xi(A)| > \varepsilon),$$

tehát a (3.10) halmazfüggvények minden pozitív ε -ra korlátos variációjúak. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

3.9. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha az

$$1 - P_0(A) = 1 - P(\xi(A) = 0)$$

halmazfüggvény korlátos variációjú, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ -re.

BIZONYÍTÁS. A tétel az

$$|1 - f(t, A)| \leq 2(1 - P_0(A))$$

egyenlőtlenség és a 3.1. tétel közvetlen következménye.

3.10. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha az

$$M(|\xi(A)|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x, A), \quad A \in \mathfrak{A}$$

halmazfüggvény korlátos variációjú, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ -re.

BIZONYÍTÁS. A tétel az

$$|1 - f(t, A)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dF(x, A) \right| \leq |t| \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x, A)$$

egyenlőtlenség és a 3.1. tétel közvetlen következménye.

3.11. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Ha az

$$M(A) = M(\xi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, A),$$

$$D^2(A) = D^2(\xi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x, A) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, A) \right)^2$$

halmazfüggvények korlátosak, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ -re.

BIZONYÍTÁS. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$P(|\xi(A) - M(A)| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(A)}{\varepsilon^2}.$$

Ha tehát $|M(A)| \leq M_1$, $D^2(A) \leq D_1$, akkor

$$P(|\xi(A)| > M_1 + \varepsilon) \leq P(|\xi(A) - M(A)| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(A)}{\varepsilon^2} \leq \frac{D_1}{\varepsilon^2}.$$

Innen adódik, hogy

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > M_1 + \varepsilon) = 0,$$

tehát az 1. 6. tétel és a 3. 4. tétel korolláriumája szerint a kiterjesztés elvégezhető.

MEGJEGYZÉS. Nem szükséges tehát, hogy az $M(A)$ és $D^2(A)$ halmazfüggvények teljesen additívak legyenek. A kiterjesztés már akkor is elvégezhető, ha csak korlátosak.

6. §. Algebrán értelmezett halmazfüggvény kiterjesztése

Abban az esetben, ha a $\xi(A)$ halmazfüggvény értelmezési tartománya algebra, a kiterjesztésre vonatkozó feltételek enyhíthetők. Erre vonatkoznak a következő tételek.

3. 12. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathcal{R}$ algebrán értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha van olyan λ szám ($0 < \lambda < 1$), hogy a $Q(\lambda, A)$ kvantilisek alkalmas megválasztása mellett a $\{Q(\lambda, A), A \in \mathcal{R}\}$ halmaz korlátos, akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ -re.*

BIZONYÍTÁS. A tétel a 2. 2. és a 3. 4. tétel korolláriumának közvetlen következménye.

3. 13. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathcal{R}$ algebrán értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha a $\xi(A), A \in \mathcal{R}$ valószínűségi változók szimmetrikus eloszlásúak, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ -re.*

BIZONYÍTÁS. Mivel a $Q\left(\frac{1}{2}, A\right)$ kvantilisek megválaszthatók úgy, hogy $Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0, A \in \mathcal{R}$, az állítás a 3. 11. tételből közvetlenül következik.

3. 14. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathcal{R}$ algebrán értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha $\xi(A) \geq 0, A \in \mathcal{R}$, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ -re.*

BIZONYÍTÁS. A

$$\xi(H) = \xi(A) + \xi(\bar{A}), \quad A \in \mathcal{R}$$

egyenlőségből következik, hogy $\xi(A) \leq \xi(H)$. Innen következik, hogy

$$0 \leq Q(\lambda, A) \leq Q(\lambda, H) = K(\lambda),$$

tehát a 3. 5. tétel szerint $\xi(A)$ kiterjeszthető.

Végül bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő

3. 15. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ algebrán értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha létezik olyan pozitív q szám, hogy

$$P_0(A) = \mathbf{P}(\xi(A) = 0) \geq q,$$

akkor $\xi(A)$ kiterjeszthető $S(\mathfrak{R})$ -re.

BIZONYÍTÁS. Feltétel szerint

$$\sup_{A \in \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) \geq 1 - q < 1, \quad \text{ha } \varepsilon \leq 0;$$

tehát következik, hogy

$$\mu_s = \mu_s(H) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) < 1.$$

Mivel pedig a 2. 6. tétel szerint $\mu_s(H)$ csak a 0 vagy az 1 értéket veheti fel, következik, hogy $\mu_s(H) = 0$. Ilyen módon a tétel a 3. 4. tétel korolláriumából következik.

7. §. Az euklideszi tér esete

Gyakran előfordulnak olyan problémák, amelyekben arra van szükségünk, hogy az R_n tér korlátos Borel-halmazainak gyűrűjén legyen egy megadott tulajdonságú additív $\xi(A)$ halmazfüggvény. Ebben az esetben úgy járhatunk el, hogy felosztjuk az R_n teret megszámlálható sok olyan téglára, amelyekben belül a kiterjesztést el tudjuk végezni.

Jelen esetben H az n -dimenziós euklideszi tér: $H = R_n$, $\mathfrak{R}$ pedig az $a_k \leq x_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n$ egyenlőtlenségek által meghatározott típusú téglák véges összegeiből álló gyűrű. Legyen $\xi(A)$ az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy H felosztható megszámlálható sok olyan $H_1, H_2, \dots$ diszjunkt téglák összegére, melyek a végesben nem sűrűsödnek,* és $\xi(A)$ a H_k $\mathfrak{R}$ algebrákban kiterjeszthető. E feltételek mellett H minden korlátos B Borel-halmazához hozzárendelhető egy $\xi^*(B)$ valószínűségi változó oly módon, hogy az R_n tér korlátos Borel-halmazainak $\mathfrak{B}_1$ gyűrűjén ekként értelmezett $\xi^*(B)$ halmazfüggvény teljesen additív és

$$\xi^*(B) = \xi(B), \quad \text{ha } B \in \mathfrak{R}.$$

A kiterjesztés egyértelmű, vagyis ha $\xi^{**}(B)$ a $\mathfrak{B}_1$ gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény és

$$\xi^*(B) = \xi^{**}(B), \quad \text{ha } B \in \mathfrak{R},$$

akkor

$$\xi^*(B) = \xi^{**}(B), \quad \text{ha } B \in \mathfrak{B}_1.$$

* Minden korlátos tartomány lefedhető véges sok tégl segítségével.

Ezt igen egyszerűen beláthatjuk. Először végezzük el a ξ kiterjesztést a H_k halmazokon belül. Ha $B \in \mathfrak{B}_1$, akkor van olyan N , hogy $B \subseteq \sum_{k=1}^N H_k$. Legyen

$$\xi^*(B) = \sum_{k=1}^N \xi^*(BH_k).$$

Nyilvánvaló, hogy $\xi^*(B)$ teljesen additív a $\mathfrak{B}_2$ gyűrűn és $\mathfrak{A}$ elemein megegyezik $\xi(B)$ -vel. Ugyancsak egyszerűen belátható az egyértelműségre vonatkozó állítás is.

Az előzőek alapján, a 3. 12. és 3. 13. tételek felhasználásával közvetlenül adódik, hogy ha $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$ és $\xi(A)$ ugyanazt jelentik, mint az előbb és minden $A \in \mathfrak{A}$ halmazra $\xi(A)$ szimmetrikus eloszlású, vagy minden $A \in \mathfrak{A}$ halmazra $\xi(A) \geq 0$, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető a $\mathfrak{B}_1$ gyűrűre.

A következő tételben a valószínűségi változók közé soroljuk azokat a $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ függvényeket is, amelyek mérhetők, de esetleg pozitív valószínűséggel végtelen értéket vesznek fel.

3. 16. TÉTEL. *Jelentse $\mathfrak{A}$ ugyanazt, mint a 3. 15. tételben. $\mathfrak{B}$ legyen az R_n tér Borel-halmazainak σ -algebrája, $\xi(A)$ pedig egy $\mathfrak{A}$ elemein értelmezett, olyan teljesen additív halmazfüggvény, melyre*

$$0 \leq \xi(A) < \infty, A \in \mathfrak{A}.$$

E feltételek mellett $\xi(A)$ $\mathfrak{B}$ minden elemére kiterjeszthető, és a kiterjesztés egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Először a jelen § elején mondottaknak megfelelően végezzük el $\xi(A)$ kiterjesztését a $\mathfrak{B}_1$ gyűrűre. Ha most B nem korlátos Borel-halmaz és $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, ahol a B_k halmazok korlátos, diszjunkt Borel-halmazok, akkor legyen

$$\xi^*(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k).$$

Ez a hozzárendelés egyértelmű, mert ha $C_1, C_2, \dots$ egy olyan korlátos, diszjunkt Borel-halmazokból álló sorozat, melyre $B = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$, akkor mivel,

$$B_n = \sum_{k=1}^{\infty} B_n C_k, \quad C_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_k B_n,$$

következik, hogy

$$\xi^*(B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_n C_k), \quad \xi^*(C_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(C_k B_n),$$

és így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_n C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(C_k B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(C_k).$$

$\xi^*(B)$ teljesen additív halmazfüggvény. Ugyanis a konstrukcióból nyilvánvaló, hogy ha a $B_1, B_2, \dots, B_r$ halmazok páronként idegenek, akkor a $\xi^*(B_1), \xi^*(B_2), \dots, \xi^*(B_r)$ valószínűségi változók függetlenek. Ha $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, ahol B_k diszjunkt Borel-halmazokból álló sorozat, akkor konstruáljunk olyan korlátos Borel-halmazokból álló $\{C_{kn}\}$ sorozatokat, melyekre teljesül, hogy

$$B_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn}, \quad C_{kn} C_{km} = 0, \quad \text{ha } n \neq m, \quad k = 1, 2, \dots$$

Tudjuk, hogy

$$\xi^*(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(C_{kn}),$$

tehát $\xi^*(B)$ definíciójának egyértelműségéből következik, hogy

$$\xi^*(B) = \sum_{k,n} \xi^*(C_{kn}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi^*(C_{kn}) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k).$$

Ezzel a tétel bizonyítása teljes.

1. MEGJEGYZÉS. A $\xi^*(B)$, $B \in \mathfrak{B}_1$ valószínűségi változók vagy 1 valószínűséggel véges, vagy 1 valószínűséggel végtelen értékűek. Ha ugyanis $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, ahol $B_k \in \mathfrak{B}_1, k = 1, 2, \dots, B_i B_k = 0$, ha $i \neq k$, akkor annak a valószínűsége, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k)$ sor összege véges legyen, vagy 0 vagy 1 ([8], 60. o.).

2. MEGJEGYZÉS. Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{A}$ gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ halmazfüggvény homogén, vagyis $\xi(A)$ eloszlása csak az A halmaz mértékétől függ, de nem függ annak helyzetétől. Ebben az esetben, ahhoz, hogy $\xi^*(B) < \infty$, szükséges és elegendő, hogy $|B| < \infty$.

Ha ugyanis $|B| < \infty$ és B_k egy olyan korlátos, diszjunkt Borel-halmazokból álló sorozat, melyre $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, akkor létezik olyan A korlátos Borel-halmaz és olyan diszjunkt Borel-halmazokból álló A_k sorozat, hogy $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, |B_k| = |A_k|, k = 1, 2, \dots$. Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, B_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, A_k)| < \infty,$$

következik, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k)$ sor összege 1 valószínűséggel véges, tehát $\xi^*(B) < \infty$. Ha pedig $|B| = \infty$, akkor legyenek $B_1, B_2, \dots$ olyan diszjunkt Borel-halmazok, hogy $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, $|B_k| = 1$. Ebben az esetben

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f(t, B_k)| = |1 - f(t, B_1)| + |1 - f(t, B_2)| + \dots = \infty,$$

tehát a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k)$ sor nem konvergens. Ekkor azonban a 0 vagy 1 tétel szerint 1 annak a valószínűsége, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi^*(B_k) = \xi^*(B) = \infty,$$

amivel az állítást bebizonyítottuk.

IV. FEJEZET

σ -GYŰRŰN ÉRTELMEZETT, TELJESEN ADDITÍV HALMAZFÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

1. §. Korlátos variációjú halmazfüggvények

A III. fejezetben láttuk, hogy ha $\xi(A)$ egy $\mathcal{S}$ σ -gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény, akkor minden pozitív T -re és ε -ra a

$$\sup_{|t| \leq T} |1 - f(t, A)|, \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A), \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF(x, A), \quad \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon)$$

halmazfüggvények korlátos variációjúak. Erre támaszkodva bebizonyítjuk a következő két tételt.

4.1. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathcal{S}$ σ -gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény, $g(x)$ pedig egy olyan polinom, melyre $g(0) = 0$. Ha az $[a, b]$ intervallumnak a 0 pont nem határpontja, akkor az

$$\int_{a \leq x \leq b} g(x) dF(x, A)$$

halmazfüggvény korlátos variációjú.

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, elég azt bebizonyítanunk, hogy az

$$\int_{a \leq x \leq b} x dF(x, A), \int_{a \leq x \leq b} |x|^k dF(x, A), \quad k \geq 2$$

halmazfüggvények korlátos variációjúak. Legyen $c_1 = \min(|a|, |b|)$, $c_2 = \max(|a|, |b|)$. Ha $a < 0 < b$, akkor

$$\left| \int_{a \leq x \leq b} x dF(x, A) \right| \leq \left| \int_{|x| \leq c_1} x dF(x, A) \right| + c_2 \mathbf{P}(|\xi(A)| > c_1),$$

$$\int_{a \leq x \leq b} |x|^k dF(x, A) \leq \int_{|x| \leq 1} x^2 dF(x, A) + c_2^k \mathbf{P}(|\xi(A)| > 1),$$

ha pedig $b < 0$, vagy $a > 0$, akkor

$$\left| \int_{a \leq x \leq b} x dF(x, A) \right| \leq \int_{a \leq x \leq b} |x| dF(x, A) \leq c_2 \mathbf{P}(|\xi(A)| \geq c_1),$$

$$\int_{a \leq x \leq b} |x|^k dF(x, A) \leq c_2^k \mathbf{P}(|\xi(A)| \geq c_1),$$

tehát állításunk igaz.

MEGJEGYZÉS. Az V. fejezetben látunk arra példát, hogy az

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} |x| dF(x, A)$$

halmazfüggvény nem mindig korlátos variációjú.

4. 2. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathcal{S}$ σ -gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény, $h(x)$ pedig egy olyan Borel szerint mérhető függvény, amelyre

$$|h(x)| \leq C, \quad h(x) = O(x^2), \quad \text{ha } x \rightarrow 0.$$

E feltételekből következik, hogy az

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x, A)$$

halmazfüggvény korlátos variációjú.

BIZONYÍTÁS. Feltevés szerint van olyan pozitív ε szám és olyan K állandó, hogy $|h(x)| \leq Kx^2$, ha $|x| \leq \varepsilon$. Ennek alapján azt kapjuk, hogy

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x, A) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dF(x, A) \leq K \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF(x, A) + C \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon),$$

tehát mivel a jobboldalon korlátos variációjú halmazfüggvények állnak, állításunkat bebizonyítottuk.

2. §. Egy további konvergenciatétel

Ha $\xi(A)$ egy $\mathcal{S}$ σ -gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény és $A_n \in \mathcal{S}$ egy konvergens halmazsorozat, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, akkor a 3. 2. tétel szerint

a valószínűségi változókból álló $\xi(A_n)$ sorozat sztochasztikusan konvergál a $\xi(A)$ valószínűségi változóhoz. Ha az A_n sorozat monoton, akkor a teljes additivitásból következik, hogy fennáll az erősebb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(A_n) = \xi(A)$$

reláció is.

A következő tételben a $\xi(A)$ halmazfüggvényről nem tesszük fel, hogy diszjunkt halmazokhoz független valószínűségi változók tartoznak. Mivel csak nem-negatív értékű valószínűségi változókat engedünk meg $\xi(A)$ értékészletében, a tétel ugyanúgy bizonyítható, mint a közönséges mértékekre vonatkozó megfelelő tétel.

4. 3. TÉTEL. *Legyen $\mathcal{S}$ egy σ -gyűrű. $\mathcal{S}$ minden A eleméhez tartozzék egy $\xi(A)$ nem-negatív valószínűségi változó oly módon, hogy ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ egy diszjunkt halmazsorozata, akkor*

$$(4. 1) \quad \xi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k).$$

Ebben az esetben a $\xi(A)$ halmazfüggvény rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{S}$ σ -gyűrű egy konvergens sorozata, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(B_n) = \xi(B).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$C_n = B_n B_{n+1}, \dots, D_n = B_n + B_{n+1} + \dots$$

Mivel

$$C_n \subseteq B_n \subseteq D_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

következik, hogy

$$(4. 2) \quad \xi(C_n) \leq \xi(B_n) \leq \xi(D_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Másrészt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$$

és így a (4. 1) relációból következik, hogy a monoton C_n és D_n sorozatokra teljesül, hogy

$$(4. 3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(D_n) = \xi(B).$$

(4. 2)-ből és (4. 3)-ból következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(B_n) = \xi(B)$$

és ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Arra vonatkozólag, hogy egy σ -gyűrűn értelmezett teljesen additív $\xi(A)$ halmazfüggvényre vonatkozólag mindig érvényes-e a

$$\xi(A_n) \rightarrow \xi(A), \text{ ha } A_n \rightarrow A, A_n \in \mathfrak{S}$$

reláció, nem tudok végleges választ adni. Bizonyos esetben azonban pozitív és negatív értéket egyaránt felvevő $\xi(A)$ halmazfüggvényre is fennáll ez az erősebb konvergencia. Ezzel egy további dolgozatban kívánok foglalkozni.

3. §. Folytonos és teljes halmazfüggvények

Legyen $\mathfrak{S}$ egy H halmaz bizonyos részhalmazaiából alkotott σ -gyűrű. Tegyük fel, hogy H elemei hozzátartoznak $\mathfrak{S}$ -hez. Egy, az $\mathfrak{S}$ σ -gyűrűn értelmezett $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt folytonosnak nevezünk, ha a H halmaz minden h elemére teljesül, hogy

$$\xi(h) = 0.$$

A $\xi(A)$ halmazfüggvényt tisztán diszkontinuusnak nevezzük, ha létezik olyan nem üres megszámlálható $H_1 \subseteq H$ halmaz, hogy

$$\begin{aligned} \xi(A) &= 0, & \text{ha } A \in H - H_1, \\ \xi(h) &\neq 0, & \text{ha } h \in H_1. \end{aligned}$$

Ha $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény és $\xi(h) \neq 0$, ahol $h \in H$, akkor a h pontot $\xi(A)$ diszkontinuitási pontjának nevezzük. A valós értékű halmazfüggvények elméletében ismeretes, hogy minden diszkontinuitással rendelkező teljesen additív halmazfüggvény felbontható egy folytonos és egy tisztán diszkontinuus halmazfüggvény összegére. Hasonló felbontás itt is elvégezhető. Mielőtt erre rátérnénk, bebizonyítjuk a következő tételt:

4. 4. TÉTEL. *Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ -gyűrűn értelmezett, teljesen additív halmazfüggvény. Ha T rögzített pozitív szám, akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény abszolút folytonos a $W(T, A)^*$ mértékre nézve, azaz*

$$\xi(A) = 0, \text{ ha } W(T, A) = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel

$$|1 - f(t, A)| \leq W(T, A), \text{ ha } A \in \mathfrak{S},$$

következik, hogy

$$f(t, A) = 1, \text{ ha } |t| \leq T.$$

Ebből az (1. 3) egyenlőtlenség alapján következik, hogy

$$f(t, A) \equiv 1,$$

amit bizonyítani akartunk.

* Lásd 318. o.

Ezután bebizonyítjuk, hogy fennáll a

4.5. TÉTEL. Legyen $\xi(A)$ egy $\mathfrak{S}$ σ -gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy H elemei hozzátartoznak $\mathfrak{S}$ -hez és $\xi(A)$ -nak van diszkontinuitási pontja. Ebben az esetben léteznek olyan $\xi'(A), \xi''(A)$ folytonos, illetve tisztán diszkontinuus, teljesen additív halmazfüggvények, hogy

$$\xi(A) = \xi'(A) + \xi''(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{S}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen T rögzített pozitív szám. $W(T, A)$ véges mérték, tehát létezik egy olyan H_1 megszámlálható halmaz, hogy

$$W(T, h) = 0, \text{ ha } h \in H - H_1.$$

Mivel $\xi(A)$ abszolút folytonos a $W(T, A)$ mértékre nézve, következik, hogy

$$\xi(h) = 0, \text{ ha } h \in H - H_1.$$

Innen a tétel triviálisan következik.

Ugyanúgy, mint a közönséges halmazfüggvények esetében, bevezethetjük itt is a teljesség fogalmát. A definíció teljesen hasonló a [6] 34. oldalán található definícióhoz, ezért ezt nem részletezem. A 4.5. tétel figyelembevételével az is könnyen belátható, hogy a teljesség tétel processzusa is minden nehézség nélkül átvihető.

V. FEJEZET

PÉLDÁK

1. Poisson-halmazfüggvény. Jelöljön $M(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett, valós értékű, véges, nem-negatív, additív halmazfüggvényt. Legyen továbbá $\xi(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ additív halmazfüggvény. Ha

$$P(\xi(A) = k) = \frac{M^k(A)}{k!} e^{-M(A)}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvényt Poisson-típusúnak nevezzük. $\xi(A)$ karakterisztikus függvénye ebben az esetben a következő alakú:

$$f(t, A) = e^{M(A)(e^{it} - 1)}.$$

Ha az $M(A)$ halmazfüggvény teljesen additív (más szóval, $M(A)$ mérték), akkor a $\xi(A)$ halmazfüggvény is az. Ugyanis legyen $A_1, A_2, \dots$ egy $\mathfrak{R}$ elemeiből álló, nem növekvő halmzsorozat, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$, akkor az

$$(5.1) \quad |1 - f(t, A)| \leq M(A)|t|e^{M(A)|t|}$$

és a $\lim_{n \rightarrow \infty} M(A_n) = 0$ relációból következik, hogy

$$f(t, A_n) \Rightarrow 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

tehát a 2.1 tétel szerint $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvény. Ha az $M(A)$ mérték korlátos, akkor (5.1) szerint az $|1-f(t,A)|$ halmazfüggvény korlátos variációjú, tehát $\xi(A)$ kiterjeszthető. Speciálisan, ha $H=R_1$, $M(A)=c|A|$, ahol c állandó, megkapjuk a közönséges homogén Poisson-folyamat differenciái által származtatott halmazfüggvényt.

2. *Összetett Poisson-halmazfüggvény.* Legyen $M_1(A), M_2(A), \dots$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett valós értékű, nem-negatív, additív halmazfüggvények egy sorozata. Az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív $\xi(A)$ halmazfüggvényt összetett Poisson-típusúnak nevezzük, ha $\xi(A)$ karakterisztikus függvénye a következő alakú:

$$(5.2) \quad f(t, A) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} M_k(A)(e^{i\lambda_k t} - 1),$$

ahol a $\{\lambda_k\}$ halmaz a $\xi(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ valószínűségi változók lehetséges értékeinek összessége és

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(A) < \infty, \quad \text{ha } A \in \mathfrak{R}.$$

Ha

$$M(A) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(A), \quad A \in \mathfrak{R}$$

véges mérték az $\mathfrak{R}$ gyűrűn, akkor ugyanúgy, mint a Poisson-halmazfüggvények esetében, belátható, hogy $\xi(A)$ teljesen additív. Ha még azt is feltesszük, hogy

$$(5.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| M_k(A) < \infty, \quad A \in \mathfrak{R}$$

és az (5.3) összeg korlátos mérték az $\mathfrak{R}$ gyűrűn, akkor az (5.2) relációból azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |1-f(t,A)| &= \left| \prod_{k=1}^{\infty} e^{M_k(A)(e^{i\lambda_k t}-1)} - 1 \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |e^{M_k(A)(e^{i\lambda_k t}-1)} - 1| \leq \\ &\leq |t| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| M_k(A) e^{|\lambda_k t| M_k(A)} \leq L(t) \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| M_k(A), \end{aligned}$$

ahol

$$L(t) = \max_k e^{|\lambda_k t| M_k(A)},$$

tehát $|1-f(t,A)|$ t minden rögzített értékére korlátos variációjú és így $\xi(A)$ kiterjeszthető az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ -gyűrűre.

Könnyen belátható, hogy ha az $\mathfrak{R}$ gyűrű az R_n tér részhalmazai bizonyos összessége és $\xi(A)$ eloszlása csak az A halmaz $|A|$ mértékétől függ, akkor

$$M_k(A) = C_k |A|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ahol C_k állandó.

3. *Laplace—Gauss-halmazfüggvény.* Így nevezem azt az additív $\xi(A)$ halmazfüggvényt, melyre

$$f(t, A) = e^{itM(A) - D^2(A)\frac{t^2}{2}}, \quad A \in \mathfrak{R},$$

ahol $M(A)$ és $D^2(A)$ valós értékű, additív halmazfüggvények, $D^2(A) \geq 0$, $A \in \mathfrak{R}$. Ha mindkét halmazfüggvény teljesen additív, akkor a 2.1. tétel figyelembevételével következik, hogy $\xi(A)$ is az. Ha az $M(A)$ és $D^2(A)$ halmazfüggvények korlátosak is, akkor az

$$|1 - f(t, A)| \leq |1 - e^{itM(A)}| + 1 - e^{-D^2(A)\frac{t^2}{2}} \leq |t| M(A) + D^2(A) \frac{t^2}{2}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy t minden rögzített értéke mellett az $|1 - f(t, A)|$ halmazfüggvény korlátos variációjú, tehát $\xi(A)$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ -re. Ha $\mathfrak{R}$ az R_n tér bizonyos részhalmazainak összessége és $\xi(A)$ eloszlása csak $|A|$ -tól függ, akkor könnyen belátható, hogy

$$M(A) = M|A|, \quad D^2(A) = D^2|A|,$$

ahol M és D^2 állandók. Speciálisan, ha $n = 1$, akkor $\xi(A)$ nem más, mint a közönséges Brown-mozgás folyamat differenciái által származtatott halmazfüggvény.

4. Jelöljük $f_n(x)$ -szel az n -edik Rademacher-függvényt:

$$f_n(x) = \text{sgn} \sin 2^n \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Legyen a $[0, 1]$ intervallum az elemi események Ω tere és a lehetséges események legyenek a $[0, 1]$ intervallum LEBESGUE-szerint mérhető halmazai. Ekkor az $\{f_n(x)\}$ függvények független valószínűségi változók. Tekintsük a

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

valószínűségi változókat. Mivel

$$M(g_n(x)) = 0, \quad D^2(g_n(x)) = \frac{1}{n^2},$$

következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ha A a természetes számok egy halmaza, akkor a

$$\sum_{n \in A} g_n(x)$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál ugyanahhoz a határfüggvényhez, továbbá a

$$g(x, A) = \sum_{n \in A} g_n(x)$$

halmazfüggvény teljesen additív a természetes számok H halmaza összes részhalmazainak σ -algebráján ([4] 118. o. Corollary 1.) A $g(x, A)$ halmazfüggvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a)
$$P\left(|g_n(x)| = \frac{1}{n}\right) = 1,$$

tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|$$

sor divergál. Ebből következik, hogy a $g(x, A)$ halmazfüggvényt nem lehet felbontani oly módon, hogy

$$g(x, A) = g^+(x, A) - g^-(x, A),$$

ahol $g^+(x, A)$ és $g^-(x, A)$ teljesen additív, nem-negatív halmazfüggvények, mert ha ilyen felbontás lehetséges volna, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \leq g^+(x, H) + g^-(x, H)$$

egyenlőtlenségből következne, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ sor abszolút konvergens.*

b) Mivel minden pozitív ε -ra fennáll, hogy

$$M(|g_n(x)|) = \int_{|x| \leq \varepsilon} |x| dF(x, n), \quad \text{ha } n \geq \frac{1}{\varepsilon},$$

* Az előbbi egyenlőtlenségből látható, hogy $g(x, A)$ még úgy sem bontható fel nem-negatív $g^+(x, A)$, $g^-(x, A)$ halmazfüggvények különbségére, hogy az utóbbiaktól nem kívánjuk meg a 2. definícióban előírt függetlenségi feltevést, hanem csak a

$$g^+(x, A) = \sum_{k=1}^{\infty} g^+(x, A_k), \quad g^-(x, A) = \sum_{k=1}^{\infty} g^-(x, A_k)$$

relációkat, ahol $A_1, A_2, \dots$ $\mathcal{S}$ egy diszjunkt halmazsorozata és $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

az a) tulajdonságból következik, hogy az

$$\int_{|x_i| \leq \varepsilon} |x| dF(x, A)$$

halmazfüggvény nem korlátos variációjú.

IRODALOM

- [1] A. BLANC—LAPIERRE, R. FORTET, Sur les répartitions de Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **240** (1955), 1045—1046.
- [2] S. BOCHNER, Stochastic processes, *Ann. Math.*, **48** (1947), 1014—1061.
- [3] H. CRAMÉR, A contribution to the theory of stochastic processes, *Proc. Sec. Berkeley Symp., Berkeley and Los Angeles*, 1951, 329—340.
- [4] J. L. DOOB, Stochastic processes (*New-York, London*, 1953).
- [5] B. V. GNYEGYENKO, A. N. KOLMOGOROV, Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai (Magyar fordítás, Budapest, 1951).
- [6] H. HAHN, A. ROSENTHAL, Set functions (*New-Mexico*, 1948).
- [7] E. HOPF, Ergodentheorie (*Berlin*, 1937).
- [8] A. N. KOLMOGOROFF, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Berlin*, 1933).
- [9] E. MARCZEWSKI, Remarks on the Poisson stochastic process (II), *Studia Mathematica* **13** (1953), 130—136.
- [10] PRÉKOPA A., Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájáról, MTA III. Oszt. Közl., **6** (1956), 191—198.
- [11] PRÉKOPA A., Banach-algebrából vett értékű multiplikatív halmazfüggvények kiterjesztése, MTA III. Oszt. Közl., **6** (1956), 339—351.
- [12] C. RYLL—NARDZEWSKI, On the non-homogeneous Poisson process (I), *Studia Math.* **14** (1953), 124—128.