

CSUKLYA ALAKÚ HÉJAK

BÖLCSKEI ELEMÉR*
AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

[Beérkezett 1976. március 17-én]

A csuklya alakú héjak membrán erőjátékát mind önsúlyra, mind hőteherre zárt formában viszonylag egyszerű matematikai eszközökkel meg lehet oldani körcikk, illetve körgyűrűcikk alaprajz esetében. E héjtípus a gyakorlatban jól alkalmazható. A membrán-elmélet azonban nagy feszítávolság és lapos héj esetében nem ad megbízható megoldást, és e szerkezeteket hajlított héjként kell vizsgálni. Ez elektronikus számológéppel a véges elemek módszerével történhetik, de a membránmegoldás ekkor sem nélkülözhető mint a feladat egy ismert és jól kezelhető partikuláris megoldása.

1. Bevezetés

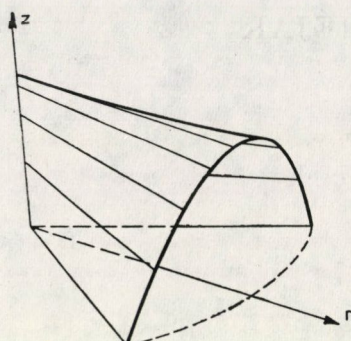
A poláris koordináta-rendszer számos olyan héjtípus erőjátékának meghatározására alkalmas, amely derékszögű koordináta-rendszerben történő vizsgálat esetében számottevő matematikai nehézséggel jár. Ilyen héjtípus az ún. csuklyás héj, melynek egyenlete

$$z = a + b(\varphi^2 - \varphi_0^2).$$

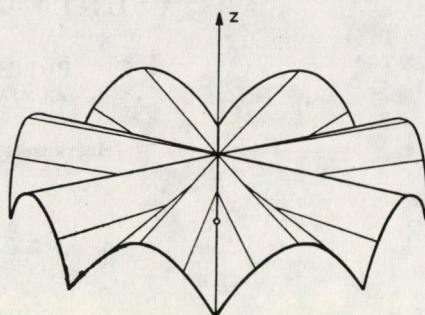
Ezt a héjfelületet a következőképpen lehet előállítani: az alapsíkkal párhuzamos egyenest a parabola alakú vezérgörbe mentén úgy mozgatjuk, hogy annak egy pontja a z forgástengelyre illeszkedjék. A felület axonometrikus képét az 1. ábra mutatja.

E felület a gyakorlatban körcikk, ill. körgyűrű cikk alaprajzú létesítmények — pl. előadótermek — lefedésére alkalmas. Ezen elemekből összerakott teljes kör, ill. körgyűrű alaprajzú építmények tetőszerkezeténél e héjtípus szintén jól alkalmazható (2., 3. ábra).

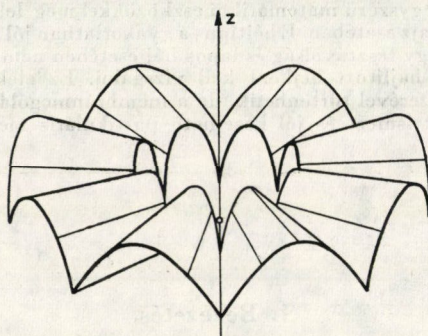
* Prof. Dr. Bölcskei Elemér, 1111 Budapest, Stoczek utca 2.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

2. A membrán feszültségi állapotot leíró differenciálegyenlet

A membrán feszültségi állapotra vonatkozó poláris koordináta-rendszerben felírt parciális másodrendű kétváltozós differenciálegyenlet [1]:

$$\frac{1}{r} (F_r z_r)_r + \frac{1}{r^2} (F_{rr} z_{\varphi\varphi} + F_{\varphi\varphi} z_{rr}) - 2 \left(\frac{F_{\varphi}}{r} \right)_r \left(\frac{z_{\varphi}}{r} \right)_r + p(r, \varphi) = 0.$$

Ebben az egyenletben

- $F(r, \varphi)$ a feszültségfüggvény,
- $z(r, \varphi)$ a felületfüggvény,
- $p(r, \varphi)$ a terhelésfüggvény.

A felületfüggvény elsőrendű parciális deriváltjai

$$z_r = 0;$$

$$z_{\varphi} = 2b\varphi,$$

míg a másodrendűek:

$$z_{rr} = 0;$$

$$z_{\varphi\varphi} = 2b;$$

$$z_{r\varphi} = 0.$$

Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenletbe, a

$$2b \frac{F_{rr}}{r^2} - 2 \left(\frac{F_\varphi}{r} \right)_r \left(\frac{2b\varphi}{r} \right)_r + p(r, \varphi) = 0,$$

illetve az

$$F_{rr} - \left(\frac{F_\varphi}{r} \right)_r \left(\frac{2\varphi}{r} \right)_r r^2 + \frac{p(r, \varphi)r^2}{2b} = 0$$

összefüggést kapjuk. Minthogy

$$\left(\frac{2\varphi}{r} \right)_r r^2 = -2\varphi,$$

tehát

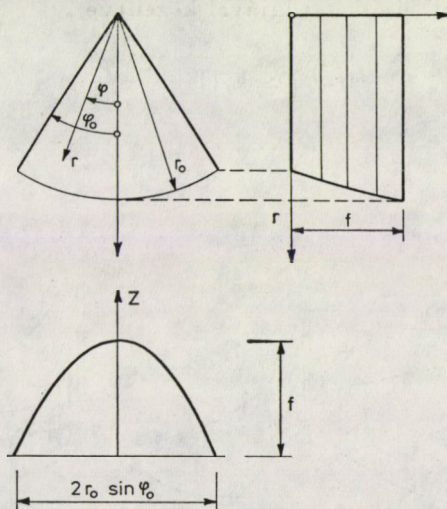
$$F_{rr} + \left(\frac{F_\varphi}{r} \right)_r 2\varphi + \frac{p(r, \varphi)r^2}{2b} = 0.$$

A differenciálegyenletet a megfelelő kerületi feltételek mellett megoldva meghatározható az $F(r, \varphi)$ feszültségfüggvény.

A héj megtámasztása legyen olyan, hogy egy r_0 körív mentén kilépőerő nem léphet fel, és szimmetria okokból a héj tengelyében a fajlagos nyíróerő zérus (4. ábra). Ezt másképpen fogalmazva

$$\varphi = 0 \rightarrow n_{r\varphi} = 0,$$

$$r = r_0 \rightarrow n_r = 0.$$



4. ábra

E feltételek tényleges felírásához szükségünk lesz a redukált feszültség-alkotókra, amelyek poláris koordináta-rendszerben

$$n_r = \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2}$$

$$n_{r\varphi} = - \left(\frac{F_{\varphi}}{r} \right)_r$$

$$n_{\varphi} = F_{rr}$$

alakban írhatók fel.

3. A terhelés

A csuklyás héjfelület elsősorban tető céljaira alkalmas, és így terhelése a g_0 önsúly, és g_h egyenletesen megoszló hőteher. Egy elemi felületrészre jutó önsúlyteher a felület mentén mérve:

$$\bar{g}(r, \varphi) = g_0 \sqrt{1 + \frac{4b^2\varphi^2}{r^2} r d\varphi dr},$$

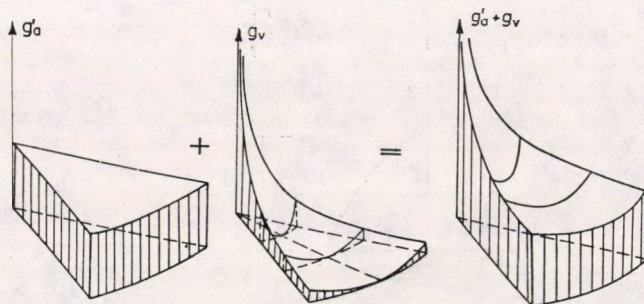
és ebből az alapsíkra számított ún. redukált érték (5. ábra)

$$g(r, \varphi) = g_0 \sqrt{1 + \frac{4b^2\varphi^2}{r^2}},$$

amely Taylor-sorának első két tagjával közelítve

$$g(r, \varphi) \simeq g_0 \left(1 + \frac{2b^2\varphi^2}{r^2} \right)$$

alakban írható.



5. ábra

Látjuk, hogy az önsúly két részből tehető össze, nevezetesen egy egyenletesen megoszló és egy változó részből. Az egyenletesen megoszló részt a hőteherrel együtt vizsgálhatjuk, és külön célszerű vizsgálni az önsúly változó részét:

$$g_a = g_h + g_0,$$

$$g_v = g_0 \frac{2b^2 \varphi^2}{r^2}.$$

4. Vizsgálat állandó teherre

Az erőjátékot leíró differenciálegyenlet:

$$F_{rr} + 2\varphi \left(\frac{F_\varphi}{r} \right)_r + \frac{g_a r^2}{2b} = 0.$$

Ezt r szerint integrálva, és rendezve, az

$$rF_r + 2\varphi F_\varphi + \frac{g_a r^4}{6b} + rc(\varphi) = 0$$

összefüggéshez jutunk, ahol $c(\varphi)$ integrálási állandó. Ezen elsőrendű parciális differenciálegyenlet normálalakja:

$$rF_r + 2\varphi F_\varphi = -\frac{g_a r^4}{6b} - rc(\varphi),$$

és így karakterisztikus egyenletei:

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{2\varphi} = -\frac{dF}{\frac{g_a r^4}{6b} + rc(\varphi)}.$$

Az egyenlőség első két tagjának felhasználásával

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{2\varphi}.$$

Ebből

$$2 \ln r + \ln c_1 = \ln \varphi,$$

$$c_1 = \frac{\varphi}{r^2}.$$

A karakterisztikus egyenletek első és harmadik tagját egyenlővé téve, a

$$\frac{dr}{r} = - \frac{dF}{\frac{g_a r^4}{6b} + rc(\varphi)}$$

összefüggést kapjuk, melyet integrálva:

$$\int dF = - \frac{1}{6b} \int [g_a r^3 + 6bc(\varphi)] dr.$$

Innen

$$F = - \frac{g_a}{24b} r^4 - rc(\varphi) + h(\varphi),$$

ahol $c(\varphi)$ és $h(\varphi)$ integrálási függvények, melyeket a kerületi feltételek figyelembevételével határozhatunk meg. Ehhez szükségünk lesz a feszültségfüggvény deriváltjaira, melyek a következők:

$$F_r = - \frac{g_a}{6b} r^3 - c(\varphi),$$

$$F_{rr} = - \frac{g_a}{2b} r^2,$$

$$F_\varphi = -rc' + h',$$

$$F_{r\varphi} = F_{\varphi r} = -c',$$

$$F_{\varphi\varphi} = -rc'' + h''.$$

Szükségünk lesz továbbá az

$$- \left(\frac{F_\varphi}{r} \right)_r = \frac{h'}{r^2}$$

összefüggésre.

A kerületi feltételeket jelen esetben az alábbiak szerint vehetjük figyelembe:

$$\text{ha } \varphi = 0, \text{ akkor } n_{r\varphi} = 0,$$

vagyis

$$n_{r\varphi} = 0 = \frac{h'(\varphi)}{r^2}.$$

Minthogy

$$h' = 0,$$

így

$$h = \text{const.}$$

Ha $r = r_0$, akkor $n_r = 0$, vagyis

$$n_r = 0 = -\frac{g_a}{6b} r_0^2 - \frac{c}{r_0} - \frac{c''}{r_0} + \frac{h''}{r_0^2}.$$

Ezek szerint

$$c'' + c + \frac{g_a}{6b} r_0^3 = 0.$$

Tehát

$$c(\varphi) = k \sin \varphi + m \cos \varphi - \frac{g_a}{6b} r_0^3.$$

Ha alkotó irányú erő nem működik, s ez a gyakorlati eset, akkor $k = m = 0$, vagyis

$$c(\varphi) = -\frac{g_a}{6b} r_0^3.$$

Tehát a redukált feszültségi alkotók:

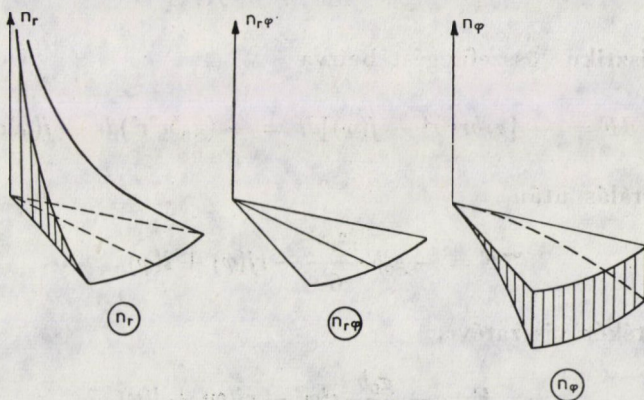
$$n_r = -\frac{g_a}{6b} \left(r^2 - \frac{r_0^3}{r} \right).$$

$$n_{r\varphi} = 0,$$

$$n_\varphi = -\frac{g_a}{2b} r^2.$$

A feszültségi alkotók axonometrikus képét a 6. ábra mutatja. Maga a feszültségfüggvény

$$F = -\frac{g_a r}{24b} (r^3 - 4r_0^3).$$



6. ábra

5. Vizsgálat az önsúlyteher változó részére

Az erőjátékot leíró differenciálegyenlet:

$$F_{rr} + 2\varphi \left(\frac{F_\varphi}{r} \right)_r + g_0 b \varphi^2 = 0.$$

Ezt r szerint egyszer integrálva az

$$rF_r + 2\varphi F_\varphi + g_0 b r^2 \varphi^2 + rj(\varphi) = 0,$$

illetve az

$$rF_r + 2\varphi F_\varphi = -g_0 b r^2 \varphi^2 - rj(\varphi).$$

összefüggést kapjuk. A karakterisztikus egyenlet tehát

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{2\varphi} = - \frac{dF}{g_0 b r^2 \varphi^2 + rj(\varphi)}.$$

Az első kettőből, hasonlóan az előbbiekhöz,

$$c = \frac{\varphi}{r^2}.$$

Az első és harmadik tag egyenlőségéből, azaz a

$$\frac{dr}{r} = - \frac{dF}{g_0 b r^2 \varphi^2 + rj(\varphi)},$$

egyenletből:

$$dF = - [g_0 b r \varphi^2 + j(\varphi)] dr.$$

A karakterisztikus összefüggést beírva

$$dF = - [g_0 b r c^2 r^4 + j(\varphi)] dr = - (g_0 b c^2 r^5) dr - j(\varphi) dr.$$

Innét integrálás után

$$F = -g_0 b \frac{c^2 r^6}{6} - rj(\varphi) + l(\varphi),$$

illetve c értékét visszatéve,

$$F = - \frac{g_0 b}{6} r^2 \varphi^2 - rj(\varphi) + l(\varphi).$$

A feszültségfüggvény deriváltjai:

$$F_r = -\frac{g_0 b r \varphi^2}{3} - j,$$

$$F_{rr} = -\frac{g_0 b \varphi^2}{3},$$

$$F_\varphi = -\frac{g_0 b r^2 \varphi}{3} - r j' + l',$$

$$F_{r\varphi} = F_{\varphi r} = -\frac{2g_0 b r \varphi}{3} - j'$$

$$F_{\varphi\varphi} = -\frac{g_0 b r^2}{3} - r j'' + l''.$$

Szükségünk lesz továbbá az

$$-\left(\frac{F_\varphi}{r}\right)_r = \frac{g_0 b \varphi}{3} + \frac{l'}{r^2}$$

kifejezésre.

Az $n_{r\varphi}$ nyíróerőre vonatkozó kerületi feltétel:

$$\text{ha } \varphi = 0, \text{ akkor } n_{r\varphi} = 0,$$

vagyis

$$n_{r\varphi} = 0 = \frac{g_0 b \varphi}{3} + \frac{l'}{r_0^2}.$$

Mint hogy $\varphi = 0$, $l' = 0$, így

$$l = \text{const.}$$

Az n_r derékerőre vonatkozó kerületi feltétel:

$$\text{ha } r = r_0, \text{ akkor } n_r = 0,$$

vagyis, figyelembe véve, hogy $l' = 0$,

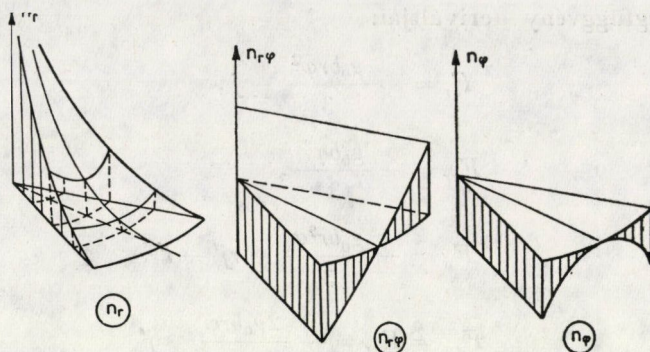
$$n_r = 0 = -\frac{g_0 b \varphi^2}{3} - \frac{j}{r_0} - \frac{g_0 b}{3} - \frac{j''}{r_0}.$$

Ezek szerint j a következő differenciálegyenletből számítható:

$$j'' + j + \frac{g_0 b r_0}{3} (1 + \varphi^2) = 0.$$

Tehát

$$j = -\frac{g_0 b r_0}{3} (\varphi^2 - 1) + k \sin \varphi + m \cos \varphi.$$



7. ábra

Ha alkotó irányú erő nem működik, s ez a gyakorlati eset, akkor $k = m = 0$, vagyis

$$j(\varphi) = -\frac{g_0 b r_0}{3} (\varphi^2 - 1).$$

Tehát a redukált feszültségi alkotók:

$$n_r = -\frac{g_0 b}{3} (\varphi^2 + 1) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right),$$

$$n_{r\varphi} = \frac{g_0 b \varphi}{3},$$

$$n_\varphi = -\frac{g_0 b \varphi^2}{3}.$$

Ezek axonometrikus képét a 7. ábra mutatja.

Maga a feszültségfüggvény:

$$F = -\frac{g_0 b}{6} r^2 \varphi^2 - \frac{g_0 b}{3} r_0 r (1 - \varphi^2).$$

IRODALOM

CSONKA Pál: A membránhéjak differenciálegyenlete hengeres koordináta-rendszerben. *Mélyépítéstudományi Szemle* 24 (1974), 241–243

Hood-shaped Shell Structures. The membrane stress pattern of a hood-shaped shell may be determined by relatively simple mathematical means in case of a sector or annular sector base form. However, the membrane theory yields no reliable solution in case of large span and flat shells; such structures should be analysed as flexural shell structures. This may be carried out with the aid of a computer by making use of the method of finite element, but the membrane solution cannot be dispensed with either in this case as a familiar and easily treatable particular solution of the problem.

Haubenschalen. Die Membrankräfte der Haubenschalen können für Eigengewicht und Schneelast mit Verhältnismäßig einfachen mathematischen Mitteln bestimmt werden falls die Grundrißfigur der Schale ein Kreissektor, bzw. Kreisringsektor ist. Dieser Schalentyp ist in der Praxis gut anwendbar. Im Falle großer Spannweiten und flacher Schalen liefert die Membrantheorie keine verlässliche Lösung und diese Konstruktionen müssen als auf Biegung beanspruchte Schalen untersucht werden. Dies kann mit Rechenautomaten, mit der Methode der endlichen Elemente durchgeführt werden, doch kann die Membranlösung, als eine bekannte und gut brauchbare partikuläre Lösung der Aufgabe nicht entbehrt werden.