BANACH-ALGEBRÁBÓL VETT ÉRTÉKŰ MULTIPLIKATÍV HALMAZFÜGGVÉNYEK KITERJESZTÉSE

PRÉKOPA ANDRÁS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1956. április 27-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen X egy adott halmaz és $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ az X halmaz bizonyos részhalmazaiból alkotott halmazosztályok. Az $\mathfrak{R}$ halmazosztályt gyűrűnek nevezzük, ha $A+B \in \mathfrak{R}$, $A-B \in \mathfrak{R}$, feltéve, hogy $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$. Az $\mathfrak{S}$ halmazosztályt σ-gyűrűnek nevezzük, ha $\mathfrak{S}$ gyűrű és minden olyan $A_1, A_2, \ldots$ halmazsorozatra, melyre $A_k \in \mathfrak{S}$, $k=1,2,\ldots$, teljesül, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}$.

Legyen $\mathfrak{B}$ kommutatív, egységelemes Banach-algebra, tehát olyan Banach-tér, amelynek minden f, g elempárjához tartozik egy fg szorzat oly módon, hogy, ha $h \in \mathfrak{B}$, akkor $(fg)h = f(gh)$, $(f+g)h = fh+gh$, $fg = gf$, $\|fg\| \leqq \|f\| \, \|g\|$, továbbá létezik olyan $e \in \mathfrak{B}$, hogy az $ef = fe = f$ reláció $\mathfrak{B}$ minden f elemére teljesül és $\|e\| = 1$.

A vizsgálat tárgyát olyan $f(A)$ halmazfüggvény képezi, melynek értelmezési tartománya egy $\mathfrak{R}(A, B, \ldots)$ gyűrű, értékei pedig a $\mathfrak{B}$ Banach-algebrában vannak: $f(A) \in \mathfrak{B}$, ha $A \in \mathfrak{R}$.

Egy valós értékű $\alpha(A)$ halmazfüggvényt korlátos variációjúnak nevezünk, ha van olyan K szám, hogy $\mathfrak{R}$ minden $A_1, A_2, \ldots, A_r$ véges, diszjunkt halmazsorozatára teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{r} |\alpha(A_i)| \leq K.$$

Legyen $g_1, g_2, \ldots$ a $\mathfrak{B}$ Banach-algebra egy sorozata. Akkor mondom, hogy a $\prod_{i=1}^{\infty} g_i$ szorzat konvergens, ha a $g_1, g_2, \ldots$ elemek között csak véges sok 0 elem van és ha $g_i \neq 0$, $i = n_0, n_0+1, \ldots$, akkor van olyan $g_0 \in \mathfrak{B}$, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left\| g_0 - \prod_{i=n_0}^{n} g_i \right\| = 0.$$

Ha $n_0 = 1$, akkor legyen g_0 a végtelen szorzat értéke, ha pedig $n_0 > 1$, akkor legyen

$$\prod_{i=1}^{\infty} g_i = \left(\prod_{i=1}^{n_0-1} g_i \right) g_0.$$

Egy $f(A)$ halmazfüggvényt multiplikatívnak (teljesen multiplikatívnak) nevezünk, ha $\mathfrak{R}$ minden A_1, A_2 diszjunkt halmazpárjára $\left(A_1, A_2, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}\right.$, diszjunkt halmazsorozatára$\left.\right)$ teljesül, hogy

$$(1) \qquad f(A_1+A_2)=f(A_1)f(A_2) \qquad \left(f\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty} f(A_k)\right).$$

Ebben az esetben $f(0)$ legyen definíció szerint a $\mathfrak{B}$ Banach-algebra egységeleme: $f(0)=e$.

Egy $\mu(A)$ valós értékű halmazfüggvényt szubadditívnak (teljesen szubadditívnak) nevezünk, ha $\mathfrak{R}$ minden A_1, A_2 diszjunkt halmazpárjára $\left(A_1, A_2, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}\right.$, diszjunkt halmazsorozatára$\left.\right)$ teljesül, hogy

$$\mu(A_1+A_2) \leqq \mu(A_1)+\mu(A_2) \qquad \left(\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\right).$$

A dolgozat célja egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény kiterjesztése az $\mathfrak{R}$ gyűrűt tartalmazó legkisebb $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre.

1. §. Előzetes lemmák

1. Lemma. *Legyen μ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett nem-negatív, korlátos variációjú, teljesen szubadditív halmazfüggvény. Legyen*

$$\mathrm{Var}_\mu(A) = \sup_{\{A_k\}} \sum_{k=1}^{r} \mu(A_k), \qquad A \in \mathfrak{R},$$

ahol $A_1, A_2, \ldots, A_r$ az $A\mathfrak{R}$[1] *gyűrű diszjunkt halmazrendszere. A* $\mathrm{Var}_\mu(A)$ *halmazfüggvény korlátos mérték az $\mathfrak{R}$ gyűrűn.*[2]

Bizonyítás. Legyen $B_1, B_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy olyan diszjunkt halmazsorozata, melyre $B=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathfrak{R}$. Válasszunk olyan $A_1, A_2, \ldots, A_r$ diszjunkt

[1] Ha $A \in \mathfrak{R}$, $A\mathfrak{R}$ azt a gyűrűt jelenti, melynek elemei az A halmaznak az $\mathfrak{R}$ gyűrűhöz tartozó részhalmazai.

[2] Egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett valós értékű, nem-negatív m halmazfüggvényt mértéknek nevezünk, ha $\mathfrak{R}$ minden $B_1, B_2, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatára, melyre $B=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathfrak{R}$, teljesül, hogy $m(B)=\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ és $m(0)=0$.

halmazokat, amelyek elemei a $B\mathfrak{R}$ gyűrűnek és

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i) + \varepsilon,$$

ahol ε előre megadott tetszőleges kis pozitív szám. Abból, hogy a $\mu(A)$ halmazfüggvény teljesen szubadditív, következik, hogy

$$\mu(A_i) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i B_k), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i B_k) + \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i B_k) + \varepsilon \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k) + \varepsilon.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden pozitív ε-ra teljesül, következik, hogy

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k).$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k),$$

tehát ezzel az 1. lemmát bebizonyítottuk.

2. LEMMA. *Legyen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ és $g_1, g_2, \ldots, g_r$ egy tetszőleges Banach-algebra két olyan véges sorozata, hogy*

$$\left\| \prod_{i=1}^{l} f_i \right\| \leqq K, \quad \left\| \prod_{i=l}^{r} g_i \right\| \leqq K, \quad l = 1, 2, \ldots, r,$$

ahol K állandó. Ekkor

$$\left\| \prod_{i=1}^{r} f_i - \prod_{i=1}^{r} g_i \right\| \leqq K^2 \sum_{i=1}^{r} \|f_i - g_i\|.$$

BIZONYÍTÁS. Kiindulva a

$$\prod_{i=1}^{r} f_i - \prod_{i=1}^{r} g_i = \sum_{i=1}^{r} f_1 \ldots f_{i-1}(f_i - g_i) g_{i+1} \ldots g_r$$

azonosságból és mindkét oldal normáját véve, megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

3. LEMMA. *Legyen $f_1, f_2, \ldots$ a $\mathfrak{B}$ kommutatív, egységelemes Banach-algebra elemeiből álló sorozat. Ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f_k\| < \infty,$$

akkor a

$$\prod_{k=1}^{\infty} f_k$$

végtelen szorzat konvergens és a szorzat független a tényezők sorrendjétől.

BIZONYÍTÁS. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1-\|f_k\|| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|e-f_k\|$$

egyenlőtlenségből következik, hogy van olyan n_0, hogy $\|f_k\| > 0$, ha $k \geqq n_0$, és a pozitív tényezőkből álló

$$\prod_{k=n_0}^{\infty} \|f_k\|$$

végtelen szorzat abszolút konvergens. Legyen

$$K = \prod_{k=n_0}^{\infty} (1+|1-\|f_k\||).$$

A 2. lemma szerint minden m, n számpárra ($m \geqq n_0$, $n \geqq n_0$) azt kapjuk, hogy

$$\left\| \prod_{i=n_0}^{m} f_i - \prod_{i=n_0}^{n} f_i \right\| \leqq K^2 \sum_{i=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} \|e-f_i\|.$$

Figyelembe véve feltételünket, azt kapjuk, hogy van olyan $f_0 \in \mathfrak{B}$, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f_0 - \prod_{i=n_0}^{n} f_i \right\| = 0.$$

Ha $i_1, i_2, \ldots$ az $n_0, n_0+1, \ldots$ sorozat egy átrendezett sorozata, és N_n olyan nagy szám, hogy az $A_n = \{n_0, n_0+1, \ldots, N_n\}$ halmaz tartalmazza az $I_n = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ halmazt, akkor

$$\left\| \prod_{k=1}^{n} f_{i_k} - \prod_{k=n_0}^{N_n} f_k \right\| \leqq K^2 \sum_{k \in A_n - I_n} \|e-f_k\|.$$

Ez az egyenlőtlenség maga után vonja azt, hogy $\prod_{k=1}^{\infty} f_{i_k} = f_0$, amiből következik, hogy a szorzat értéke független a tényezők sorrendjétől.

4. LEMMA. *Legyen $\mu(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett olyan valós értékű, nem-negatív, szubadditív halmazfüggvény, melyre teljesül a következő két feltétel:*

a) $\mu(A) \leqq K$, $A \in \mathfrak{R}$, ahol K állandó;

b) ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű diszjunkt halmazsorozata, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty.$$

Ebben az esetben a $\mu(A)$ halmazfüggvény korlátos variációjú.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\mu(A)$ nem korlátos variációjú. Válasszunk olyan $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{k_1}^{(1)}$ $(k_1 > 1)$ $\mathfrak{R}$-beli diszjunkt halmazokat, hogy

$$\sum_{l=1}^{k_1} \mu(B_l^{(1)}) \leqq 2K.$$

Mivel a $\mu(A)$ halmazfüggvény szubadditív, következik, hogy a $\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}$ és $\overline{\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}}$ halmazok közül legalább az egyikben nem korlátos variációjú. Ha a $\overline{\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}}$ halmaz rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor találhatók benne olyan $B_{k_1+1}^{(1)}, B_{k_1+2}^{(1)}, \ldots, B_{k_2}^{(1)}$ $\mathfrak{R}$-beli diszjunkt halmazok, hogy

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} \mu(B_l^{(1)}) \geqq K.$$

Ugyanúgy, mint az előbb, belátható, hogy a $\mu(A)$ halmazfüggvény a $\sum_{l=1}^{k_2} B_l^{(1)}$ és $\overline{\sum_{l=1}^{k_2} B_l^{(1)}}$ halmazok közül legalább az egyikben nem korlátos variációjú, stb. Véges számú lépés után a láncnak vége szakad, mert ha $\mu(A)$ a $\overline{\sum_{l=1}^{k_r} B_l^{(1)}}$ halmazok egyikében sem korlátos variációjú, akkor a

$$\sum_{l=1}^{k_r} \mu(B_l^{(1)}) \geqq (r+1)K$$

egyenlőtlenségből következnék, hogy a $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots$ diszjuñkt halmazsorozat azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(B_l^{(1)}) = \infty,$$

ami a c) feltétel miatt lehetetlen. Létezik tehát a $k_1, k_2, \ldots$ számok között egy olyan n_1 szám, hogy $\mu(A)$ nem korlátos variációjú a $\sum_{l=1}^{n_1} B_l^{(1)}$ halmazban. $\mu(A)$ szubadditivitásából következik, hogy a $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{n_1}^{(1)}$ halmazok közül legalább az egyikben végtelen a variáció. Legyen az a $B_{n_1}^{(1)}$ halmaz. Ekkor, mivel

$$\sum_{l=1}^{n_1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq \sum_{l=1}^{k_1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq 2K,$$

az a) feltétel figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\sum_{l=1}^{n_1-1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq K.$$

Az előző meggondolást megismételve azt találjuk, hogy a $B_{n_1}^{(1)}$ halmazban vannak olyan diszjunkt, $\mathfrak{R}$-hez tartozó $B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \ldots, B_{n_2}^{(2)}$ halmazok, hogy a $B_{n_2}^{(2)}$ halmazban végtelen a variáció és

$$\sum_{l=1}^{n_2-1} \mu(B_l^{(2)}) \geqq K.$$

Ezt az eljárást folytatva, kiválaszthatunk egy olyan, ($\mathfrak{R}$-beli elemekből álló) $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{n_1-1}^{(1)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \ldots, B_{n_2-1}^{(2)}, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatot, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_k-1} \mu(B_l^{(k)}) = \infty,$$

ami a c) feltétel szerint ellentmondás. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2. §. Teljesen multiplikatív halmazfüggvények kiterjesztése

1. TÉTEL. *Legyen $f(A)$ valamely $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény, melyre $f(A) \in \mathfrak{B}$ és $\|f(A)\| \leqq 1$, ha $A \in \mathfrak{R}$. Ha az $\mathfrak{R}$ gyűrű minden $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatára teljesül, hogy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e-f(A_k)\| < \infty, \tag{2}$$

akkor létezik egy és csak egy olyan $f^*(A)$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény, melyre $f^*(A) = f(A)$, ha $A \in \mathfrak{R}$.

Ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrű egy konvergens halmazsorozata, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} f^*(A_k) = f^*(A).$$

BIZONYÍTÁS. Először bebizonyítom, hogy az $e-f(A)$ halmazfüggvény korlátos variációjú. Elég azt belátnunk, hogy teljesülnek a 4. lemma feltételei. Ha $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$ és $AB = 0$, akkor

$$\begin{aligned} \|e-f(A+B)\| &= \|e-f(A)+f(A)-f(A)f(B)\| \leqq \\ &\leqq \|e-f(B)\|\,\|f(A)\| + \|e-f(A)\| \leqq \|e-f(B)\| + \|e-f(A)\|, \end{aligned} \tag{3}$$

tehát az $\|e-f(A)\|$ nem-negatív halmazfüggvény szubadditív. Az a) feltétel teljesül, mert

$$\|e-f(A)\| \leqq \|e\| + \|f(A)\| \leqq 2.$$

Végül a b) feltétel teljesülését a (2) reláció biztosítja.

Legyen $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy olyan diszjunkt halmazsorozata, melyre $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \mathfrak{R}$.

A 3. egyenlőtlenségből következik, hogy minden n-re

$$\left\| e-f\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)\right\| \leqq \sum_{k=1}^{n} \|e-f(A_k)\|.$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$\|e-f(A)\| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|e-f(A_k)\|. \tag{4}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az $\|e-f(A)\|$ $(A \in \mathfrak{R})$ halmazfüggvény teljesíti az 1. lemma feltételeit, tehát ha $\mu(A)=\|e-f(A)\|$, akkor $\mathrm{Var}_\mu(A)$ korlátos mérték az $\mathfrak{R}$ gyűrűn. Legyen $m(B)$, $B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ a $\mathrm{Var}_\mu(A)$ mértéknek megfelelő, az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre kiterjesztett korlátos mérték.

Képezzünk egy gyűrűkből álló $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$ transzfinit sorozatot a következőképpen: $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_1$; $\mathfrak{R}_1$ legyen azoknak a halmazoknak a gyűrűje, amelyek előállíthatók $\mathfrak{R}_0$-ba tartozó halmazok konvergens sorozatainak limeszeként; ha $\mathfrak{R}_\nu$-t minden olyan ν-re, melyre $\nu<\nu_0<\omega_1$, már értelmeztük, akkor legyen $\mathfrak{R}_{\nu_0}$ azoknak a halmazoknak a gyűrűje, amelyek előállíthatók a $\sum_{\nu<\nu_0}' \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű elemeiből álló konvergens sorozatok limeszeként. Nyilvánvaló, hogy $\sum_{\nu}' \mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

A továbbiakban fel fogjuk használni a következő megjegyzést: ha E_n az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy olyan halmazsorozata, amelyre $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} f(E_n)=e$. Ez a tény az

$$\|e-f(E_n)\| \leqq m(E_n)$$

egyenlőtlenségből következik, figyelembe véve, hogy $\lim_{n\to\infty} m(E_n)=0$.

Legyen A_n az $\mathfrak{R}_0$ gyűrű egy konvergens halmazsorozata. Ez esetben

$$\lim_{m,n\to\infty} (A_n-A_m) = \lim_{m,n\to\infty} (A_m-A_n)=0$$

és így

$$\begin{aligned}
\|f(A_n)-f(A_m)\| &\leqq \|f(A_n)-f(A_nA_m)\| + \|f(A_m)-f(A_nA_m)\| = \\
&= \|f(A_nA_m)f(A_n-A_m)-f(A_nA_m)\| + \|f(A_nA_m)f(A_m-A_n)-f(A_nA_m)\| \leqq \\
&\leqq \|f(A_nA_m)\|\ \|e-f(A_n-A_m)\| + \|f(A_nA_m)\|\ \|e-f(A_m-A_n)\| \leqq \\
&\leqq \|e-f(A_n-A_m)\| + \|e-f(A_m-A_n)\| \to 0, \text{ ha } m,n\to\infty,
\end{aligned}$$

amiből következik, hogy az $f(A_n)$ sorozat konvergens. Definiáljuk az $f_1(A)$, $A \in \mathfrak{R}_1$ halmazfüggvényt a következőképpen: $A_n \in \mathfrak{R}_0$, $n=1,2,\ldots$ és $A=\lim_{n\to\infty} A_n$, akkor

$$f_1(A) = \lim_{n\to\infty} f(A_n).$$

Bebizonyítjuk, hogy az $f_1(A)$ halmazfüggvény definíciója egyértelmű. Legyen A_n és A'_n az $\mathfrak{R}_0$ gyűrű két konvergens sorozata, $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A'_n = A$. Az

$$A_n = A_n A'_n + (A_n - A'_n),$$
$$A'_n = A_n A'_n + (A'_n - A_n)$$

felbontásból következik, hogy

$$f(A_n) = f(A_n A'_n) f(A_n - A'_n),$$
$$f(A'_n) = f(A_n A'_n) f(A'_n - A_n).$$

Mivel $A_n A'_n \to A$ és

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n - A'_n) = \lim_{n\to\infty} f(A'_n - A_n) = e,$$

következik, hogy az $f(A_n A'_n)$ sorozat konvergens és így

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n) = \lim_{n\to\infty} f(A'_n) = \lim_{n\to\infty} f(A_n A'_n).$$

Ebből az is következik, hogy $f_1(A) = f(A)$, ha $A \in \mathfrak{R}_0$.

$f_1(A)$ multiplikatív halmazfüggvény az $\mathfrak{R}_1$ gyűrűn. Ha ugyanis A, B az $\mathfrak{R}_1$ gyűrű diszjunkt halmazai és $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, $B = \lim_{n\to\infty} B_n$, $A_n \in \mathfrak{R}_0$, $B_n \in \mathfrak{R}_0$, $n = 1, 2, \ldots$, akkor

$$f_1(A+B) = \lim_{n\to\infty} f(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} f(A_n) \lim_{n\to\infty} f(B_n - A_n) = f_1(A) f_1(B).$$

Az $f_1(A)$ halmazfüggvény azonban teljesen multiplikatív is. Ennek bizonyításához előbb megjegyzem, hogy ha $B \in \mathfrak{R}_1$, $\mu_1(B) = \|e - f_1(B)\|$, akkor $\mathrm{Var}_{\mu_1}(B) \leqq m(B)$. Ha ugyanis $B_1, B_2, \ldots, B_r$ olyan diszjunkt halmazok, amelyekre $B_i \in \mathfrak{R}_1$, $B_i \subseteq B$, $i = 1, 2, \ldots, r$, akkor találhatók olyan $B_i^{(n)}$ sorozatok, amelyekre $B_i = \lim_{n\to\infty} B_i^{(n)}$, $B_i^{(n)} \in \mathfrak{R}_0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $B_i^{(n)} B_k^{(n)} = 0$, ha $i \neq k$, $n = 1, 2, \ldots$. Mivel

$$\sum_{i=1}^{r} \|e - f(B_i^{(n)})\| \leqq m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i^{(n)}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

továbbá $\lim_{n\to\infty} f(B_i^{(n)}) = f_1(B_i)$, $\lim_{n\to\infty} m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i^{(n)}\right) = m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i\right)$, következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{r} \|e - f_1(B_i)\| \leqq m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i\right) \leqq m(B).$$

Ha most $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}_1$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}_1$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f_1(A_k)\| \leqq m(A),$$

tehát a $\prod_{k=1}^{\infty} f_1(A_k)$ végtelen szorzat konvergens. Legyen $C_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$. Felhasználva azt, hogy f_1 multiplikatív halmazfüggvény, azt kapjuk, hogy

$$\left\| f_1(A) - \prod_{k=1}^{n} f_1(A_k) \right\| = \left\| \prod_{k=1}^{n} f_1(A_k) f_1(C_{n+1}) - \prod_{k=1}^{n} f_1(A_k) \right\| \leqq$$

$$\leqq \|e - f_1(C_{n+1})\| \leqq m(C_{n+1}) \to 0, \text{ ha } n \to \infty,$$

tehát f_1 teljesen multiplikatív halmazfüggvény.

Ugyanúgy, mint ahogy $\mathfrak{R}_0$ esetében tettük, az $\mathfrak{R}_1$ gyűrűn értelmezett $\mu_1(A) = \|e - f_1(A)\|$ halmazfüggvényről is beláthatjuk, hogy teljesen szubadditív. Azt már láttuk, hogy korlátos variációjú és nyilván $\|e - f_1(A)\| \leqq 2$, tehát az 1. lemma szerint $\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)$ korlátos mérték az $\mathfrak{R}_1$ gyűrűn. Láttuk azt is, hogy ha $A \in \mathfrak{R}_0 \subseteq \mathfrak{R}_1$, akkor

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A) \leqq m(A).$$

Másrészt a $\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)$ halmazfüggvényre nyilvánvalóan fennáll a

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A) \geqq \mathrm{Var}_{\mu}(A) = m(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_0,$$

reláció, hiszen $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_0$. Ebből következik, hogy

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A) = m(A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{R}.$$

Mivel egy korlátos mérték kiterjesztése egyértelmű, következik, hogy

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A) = m(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_1.$$

Tegyük fel, hogy minden olyan ν rendszámhoz, amelyre $\nu < \nu_0 < \omega_1$, már hozzárendeltünk egy olyan $f_\nu(A)$ teljesen multiplikatív halmazfüggvényt, amelyre $f_\nu(A) = f_{\nu'}(A)$, ha $A \in \mathfrak{R}_{\nu'}$, $\nu' < \nu$ és $\mathrm{Var}\,\mu_\nu(A) = m(A)$, ahol $\mu_\nu(A) = \|e - f_\nu(A)\|$, $A \in \mathfrak{R}_\nu$.

Könnyen belátható, hogy a $\sum_{\nu < \nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrűn értelmezett

$$g_{\nu_0}(A) = f_\nu(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_\nu, \nu < \nu_0$$

halmazfüggvény teljesen multiplikatív. Ha ugyanis $A_1, A_2, \ldots$ a $\sum_{\nu < \nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \sum_{\nu < \nu_0} \mathfrak{R}_\nu$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - g_{\nu_0}(A_k)\| \leqq m(A) \quad ,$$

és így a 3. lemma szerint a $\prod_{k=1}^{\infty} g_{\nu_0}(A_k)$ végtelen szorzat konvergens; a g_{ν_0} halmazfüggvény nyilván multiplikatív, tehát

$$g_{\nu_0}(A) = \prod_{k=1}^{n} g_{\nu_0}(A_k) g_{\nu_0}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \right),$$

amiből következik, hogy

$$\left\| g_{\nu_0}(A) - \prod_{k=1}^{n} g_{\nu_0}(A_k) \right\| \leqq \left\| e - g_{\nu_0}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \right) \right\| \leq m \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \right) \to 0,$$

ha $n \to \infty$, vagyis

$$g_{\nu_0}(A) = \prod_{k=1}^{\infty} g_{\nu_0}(A_k).$$

Ugyanúgy, mint ahogy az $\mathfrak{R}_0$ gyűrűn értelmezett f halmazfüggvény segítségével megkonstruáltuk az $\mathfrak{R}_1$ gyűrűn értelmezett f_1 halmazfüggvényt, a $\sum\limits_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrűn értelmezett g_ν halmazfüggvény segítségével is megkonstruálhatjuk az f_{ν_0} halmazfüggvényt és beláthatjuk azt is, hogy az utóbbira teljesül az indukciós feltevés.

Értelmezzük az $f^*(A)$, $A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ halmazfüggvényt a következőképpen

$$f^*(A) = f_\nu(A), \text{ ha } A \in \mathfrak{R}_\nu.$$

Az, hogy az $f^*(A)$ halmazfüggvény teljesen multiplikatív, abból következik, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \sum\limits_{\nu} \mathfrak{R}_\nu$ σ-gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, $A_k \in \mathfrak{R}_{\nu_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, akkor van olyan $\nu' < \omega_1$ rendszám, hogy $\nu_k < \nu'$, $k = 1, 2, \ldots$ és így $A_k \in \mathfrak{R}_{\nu'}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}_{\nu'}$, tehát

$$f^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) = f_{\nu'}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \prod_{k=1}^{\infty} f_{\nu'}(A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} f^*(A_k).$$

Ugyanígy belátható az is, hogy ha A_n az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrű egy konvergens halmazsorozata, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f^*(A_n) = f^*(A)$.

A KITERJESZTÉS EGYÉRTELMŰSÉGÉNEK BIZONYÍTÁSA. Legyen f^{**} az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény. Legelőször megjegyezzük, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrű egy nem-csökkenő halmazsorozata, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, akkor, mivel az f^{**} halmazfüggvény teljesen multiplikatív, következik, hogy

$$f^{**}(A) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} f^{**}(A_{k+1} - A_k) \right) f^{**}(A_1) = f^{**}(A_1) \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n-1} f^{**}(A_{k+1} - A_k),$$

tehát

(5) $$f^{**}(A) = \lim_{n\to\infty} f^{**}(A_n).$$

Tegyük fel, hogy f^* és f^{**} megegyezik a $\sum\limits_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrűn:

$$f^*(A) = f^{**}(A), \quad \text{ha} \quad A \in \sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu.$$

Bebizonyítjuk, hogy ekkor e két halmazfüggvény az $\mathfrak{R}_\nu$ gyűrűn is megegyezik.

Legyen $B_1, B_2, \ldots$ a $\sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$ gyűrű egy monoton nem-növekvő halmazsorozata, $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Az f^*, f^{**} halmazfüggvények teljesen multiplikatívak, tehát

$$f^*(B_n) = f^*(B) \prod_{k=n}^{\infty} f^*(B_k - B_{k+1}),$$

$$f^{**}(B_n) = f^{**}(B) \prod_{k=n}^{\infty} f^{**}(B_k - B_{k+1}).$$

Figyelembe véve feltevésünket, azt kapjuk, hogy

$$f^*(B_n - B) = \prod_{k=n}^{\infty} f^*(B_k - B_{k+1}) = \prod_{k=n}^{\infty} f^{**}(B_k - B_{k+1}),$$

$$f^*(B_n) = f^{**}(B_n),$$

tehát

$$f^*(B) f^*(B_n - B) = f^{**}(B) f^*(B_n - B).$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} f^*(B_n - B) = e$, következik, hogy $f^*(B) = f^{**}(B)$.

Tekintsünk végül egy tetszőleges olyan C_n konvergens halmazsorozatot, amelyre $C_n \in \sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$, $n = 1, 2, \ldots$. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C, \quad A_n = C_n C_{n+1} \ldots,$$

továbbá

$$A_{r,n} = C_n C_{n+1} \ldots C_{n+r}, \quad n, r = 1, 2, \ldots.$$

Nyilvánvaló, hogy $A_{r,n} \in \sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$, $A_{r,n} \subseteq C_n$, $A_{r,n} \supseteq A_{r+1,n}$. Ebből következik, hogy

$$f^{**}(C_n) = f^{**}(C_n - A_{r,n}) f^{**}(A_{r,n}) = f^*(C_n - A_{r,n}) f^{**}(A_{r,n}). \tag{6}$$

Mivel $\lim_{r\to\infty} A_{r,n} = A_n$ és az $A_{1,n}, A_{2,n}, A_{3,n}, \ldots$ sorozat minden rögzített n-re monoton nem-növekvő, az előbbiek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{r\to\infty} f^{**}(A_{r,n}) = \lim_{r\to\infty} f^*(A_{r,n}) = f^*(A_n) = f^{**}(A_n). \tag{7}$$

Másrészt tudjuk, hogy

$$\lim_{r\to\infty} f^*(C_n - A_{r,n}) = f^*(C_n - A_n), \tag{8}$$

tehát (6), (7) és (8) alapján írhatjuk, hogy

$$f^{**}(C_n) = f^*(C_n - A_n) f^{**}(A_n). \tag{9}$$

Az A_n sorozat monoton nem-csökkenő, $\lim_{n\to\infty} A_n = C$, tehát (5) szerint

$$\lim_{n\to\infty} f^{**}(A_n) = f^{**}(C). \tag{10}$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} f^{**}(C_n) = \lim_{n\to\infty} f^*(C_n) = f^*(C), \ \lim_{n\to\infty} f^*(C_n - A_n) = e, \tag{11}$$

tehát, ha a (9) egyenlőségben elvégezzük az $n \to \infty$ határátmenetet, akkor (10) és (11) alapján azt kapjuk, hogy

$$f^*(C) = f^{**}(C).$$

A transzfinit indukció elvéből következik, hogy az f^*, f^{**} halmazfüggvények $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \sum_\nu \mathfrak{R}_\nu$ minden elemén megegyeznek. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

2. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{R}$ egy gyűrű és $f(A)$ az $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen multiplikatív halmazfüggvény, melyre $f(A) \in \mathfrak{B}$, ha $A \in \mathfrak{R}$. Tegyük fel, hogy létezik az $\mathfrak{R}$ gyűrűn egy olyan $\varphi(A)$ korlátos, valós értékű teljesen additív halmazfüggvény, amelyre*

$$\|f(A)\| \leqq 2^{\varphi(A)}, \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{R}, \tag{12}$$

és az $\mathfrak{R}$ gyűrű minden $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt halmazsorozatára teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f(A_k)\| < \infty.$$

Ebben az esetben az $f(A)$ halmazfüggvény kiterjeszthető az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűre, a kiterjesztés egyértelmű és ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrű egy konvergens sorozata, $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} f^*(A_k) = f^*(A).$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a $g(A) = 2^{-\varphi(A)} f(A)$ halmazfüggvényt. Erre teljesülnek az 1. tétel feltételei. Ugyanis egyrészt (12) szerint $\|g(A)\| \leqq 1$. Másrészt

$$\begin{aligned} \|e - g(A)\| &= \|e - e2^{-\varphi(A)} + e2^{-\varphi(A)} - 2^{-\varphi(A)} f(A)\| \leqq |1 - 2^{-\varphi(A)}| + \\ &+ \|e - f(A)\| \, 2^{-\varphi(A)} \leqq K(|\varphi(A)| + \|e - f(A)\|), \end{aligned} \tag{13}$$

ahol K pozitív állandó, tehát ha $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, akkor (13) alapján

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - g(A_k)\| \leqq K\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(A_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} \|e - f(A_k)\|\right) < \infty.$$

Ha a $\varphi(A)$ és a $g(A)$ halmazfüggvényeket kiterjesztjük és a kiterjesztett halmazfüggvényeket $\varphi^*(A)$-val, illetve $g^*(A)$-val jelöljük, akkor világos, hogy

$$f^*(A) = 2^{\varphi^*(A)} g^*(A)$$

az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ σ-gyűrűn értelmezett olyan teljesen multiplikatív halmazfüggvény, melyre

$$f^*(A) = f(A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathfrak{R}.$$

Igen egyszerűen beláthatók a tétel többi állításai is.

MEGJEGYZÉS. Ha az $\mathfrak{R}$ gyűrű minden A elemére teljesül, hogy $0 < \delta_1 \leqq \leqq \|f(A)\| \leqq \delta_2$, ahol δ_1 és δ_2 állandók, továbbá

$$\|f(A)f(B)\| = \|f(A)\| \; \|f(B)\|, \tag{14}$$

ha $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$, $AB = 0$, akkor a 2. tétel (12) feltétele teljesül. Ugyanis a $\varphi(A) = \log_2 \|f(A)\|$ halmazfüggvényre teljesül a (12) reláció. A (14) egyenlőség teljesül pl. a komplex számok Banach-algebrája esetében.

Végül köszönetet mondok Császár Ákosnak értékes megjegyzéseiért.

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete.