MINDENÜTT FOLYTONOS, SEHOL SEM DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNYEKRŐL

MIKOLÁS MIKLÓS

Bevezetés

1. Mióta WEIERSTRASS híres példája[1] $\left(W(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)\right.$, ahol a páratlan, 1-nél nagyobb egész szám, $0<b<1$, $\left.ab>1+\frac{3}{2}\pi\right)$ a múlt század hetvenes éveiben általánosan ismertté vált, a modern valós függvénytan kialakulásával párhuzamosan számos szerző foglalkozott *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvényekkel.*[2] KNOPP egy hosszabb dolgozatban[3] foglalta össze az 1918-ig talált példák legnagyobb részét, mégpedig egységes, általános eljárás alapján. A tárgykör mindmáig a matematikai érdeklődés előterében maradt: VAN DER WAERDEN újabb keletű elegáns példáján[4] $\left(V(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}\psi(10^n x)\right.$, ahol $\psi(x)$ azt az 1 szerint periodikus függvényt jelenti, melyre $\psi(x)=|x|$, ha $\left.-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$ és más, egészen speciális jellegű példákon kívül,[5] ki kell emelnünk a lengyel és indiai matematikai iskola bizonyos eredményeit a harmincas és negyvenes években, melyek értékes adalékokat szolgáltatnak a szóban forgó függvények DINI-féle derivált-számok szerinti osztályozására, ill. nulla-helyeire vonatkozólag.[6]

2. A következőkben egyszerű, új *módszert* adunk meg, mely lehetővé teszi mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvények „családjainak"

[1] L. [6] és [26].

[2] L. az irodalomjegyzéket.

[3] [12]. KNOPP törtvonalakból határátmenettel keletkező periodikus $f(x)$ függvényekkel foglalkozik; fő kikötése, hogy az $[f(x+h)-f(x)]/h$ különbségi hányados (kétoldali) limesz szuperiorja $+\infty$, limesz inferiorja $-\infty$ legyen az alapintervallum minden x belső helyén.

[4] Vö. [25]. (A bizonyítás HEYTINGtől származik.)

[5] Vö. pl. [3], [4], [8], [10], [15], [24].

[6] Vö. [2], [18], [19], [20], ill. [17], [21].

tényleges konstrukcióját (II. tétel); az eljárás — KNOPPtól eltérően — a differenciálhatóságnak egy szükséges és elégséges feltételére (vö. (1)) támaszkodik. Az így nyert függvényosztály magában foglal majdnem minden az irodalomban megtalálható, idevágó példát, eltekintve néhánytól, melyek konstrukciója aritmetikai jellegű. Egy nagyon speciális esetben, mely mintegy a módszer „mintáját" szolgáltatja, egy *elemi példára* jutunk, melynél a folytonosság és nem-deriválhatóság igazolása két mondatban elvégezhető (I. tétel). — Az alapgondolatot $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi(\nu_k x)$ alakú függvényekre alkalmazva, ahol $\Sigma|c_k|<\infty$ és $\nu_k|\nu_{k+1}$ $(k=0, 1,\ldots)$, *új típusú eredmények* adódnak: $\Phi(x)$ folytonos, nem differenciálható tetszőleges *konvex* (vagy konkáv) ívekből felépülő, ill. LIPSCHITZ-feltételt kielégítő, periodikus $\varphi(x)$ függvény esetében, feltéve, hogy c_k, ν_k eleget tesz bizonyos könnyen teljesíthető limesz-kikötéseknek (IV—VI. tétel). Korolláriumként nyerünk két egyszerű tételt, melyek több szempontból általánosítják WEIERSTRASS, ill. VAN DER WAERDEN példáját (III. és VII. tétel).

1. §. Egy elemi példa

3. Legyen $f(x)$ egy a helyen és ennek valamely környezetében differenciálható függvény. Akkor — a definícióból folyóan — bármely pozitív ε megadása után meghatározható[7] egy $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ úgy, hogy az

$$\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}-\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}\right|<2\varepsilon \tag{1}$$

egyenlőtlenség teljesül az *összes* olyan $t_1 \neq t_2$, $u_1 \neq u_2$ értékpárok esetében, melyekre $a-\delta<t_1\leqq a\leqq t_2<a+\delta$, ill. $a-\delta<u_1\leqq a\leqq u_2<a+\delta$.

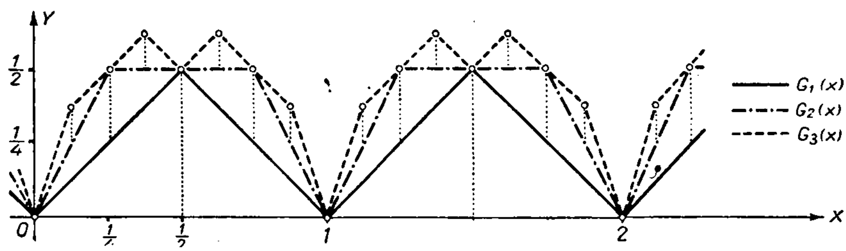
4. Legyen adva két pont: $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$, $x_1<x_2$; tekintsük azt az $M(\xi, \eta)$ pontot,[8] melynek koordinátái: $\xi=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\eta=\frac{1}{2}(y_1+y_2)+$ $+\frac{1}{2}(x_2-x_1)$ és képezzük az $\overline{MP_1}$, $\overline{MP_2}$ szakaszokat. Az utóbbiakat $\overline{P_1P_2}$ *járulékainak* fogjuk nevezni, a $P_1MP_2\triangle$-et pedig *járulékháromszögnek*. Kieme-

[7] Emlékeztetünk arra, hogy $[f(x_1)-f(x_2)]/(x_1-x_2)$ $(x_1 \neq a, x_2 \neq a;\ a-\delta<x_1\leqq a\leqq x_2<a+\delta)$ az $[f(x_1)-f(a)]/(x_1-a)$ és $[f(x_2)-f(a)]/(x_2-a)$ differenciahányadosok közé esik. Különben CAUCHY konvergenciakritériumára tekintettel (1) nemcsak szükséges, hanem elegendő feltétele is az a-ban való deriválhatóságnak.

[8] M egyszerű szerkesztésmódja nyilvánvaló.

lendő, hogy az oldalak irányhatározóira nézve fennáll: $\frac{\eta-y_1}{\xi-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+1$, $\frac{y_2-\eta}{x_2-\xi}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-1$.

Képezzük az x-tengely $[i, i+1]$ $(i=0, \pm 1, \ldots)$ szakaszainak járulékait; az így nyert törtvonal egy $G_1(x)$ folytonos függvényt ábrázol. E törtvonal minden „oldalának" járulékait meghúzva, egy $G_2(x)$ folytonos függvény képéhez, az utóbbiból járulék-képzéssel egy újabb $G_3(x)$ törtvonalhoz jutunk stb. (L. az ábrát.)



I. TÉTEL. (I) *A* $G(x)=\lim_{n\to\infty} G_n(x)$ *függvény mindenütt folytonos, de* (II) *sehol sem differenciálható. Érvényes a* $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}((2^k x))$ *sor-előállítás, ahol* $((x))$ *jelenti* x*-nek a legközelebbi egész abszcisszájú ponttól való távolságát.*

BIZONYÍTÁS. Világos, hogy $G_{k+1}(x)-G_k(x)\leq 2^{-(k+1)}$ $(k=1, 2, \ldots)$, tehát $G_n(x)=G_1(x)+\sum_{k=1}^{n}[G_{k+1}(x)-G_k(x)]$ $(n=2, 3, \ldots)$ egyenletesen konvergens minden x-re, s innen következik (I). (II)-re térve megjegyezzük, hogy $G(x)$ képe nyilván minden felhasznált járulékháromszög csúcspontjait tartalmazza; így valamely a hely s egy ezt körülvevő $(a-\delta,\ a+\delta)$ környezet megadása után található három pont: x_1, ξ, x_2 úgy, hogy abszcisszáik rendre $r\cdot 2^{-k}$, $(2r+1)2^{-k-1}$, $(r+1)2^{-k}$ (r egész) alakúak, továbbá $a\in[x_1, x_2]\subset(a-\delta, a+\delta)$ és

$$\frac{G(\xi)-G(x_1)}{\xi-x_1}-\frac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{G(x_2)-G(\xi)}{x_2-\xi}=1,$$

ellentétben az (1) feltétellel.

Ami $G(x)$ kérdéses előállítását illeti, ez rögtön folyik, ha $G_0(x)\equiv 0$-t írva figyelembe vesszük, hogy a $G_{k+1}(x)-G_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots)$ különbség minden $[r\cdot 2^{-k}, (r+1)2^{-k}]$ alakú intervallum felezőpontjában a 2^{-k-1}, két végpontjában pedig a 0 értéket veszi fel, továbbá lineáris ennek mindkét felében.

2. §. Egy lemma és egy ezen alapuló általános geometriai konstrukció

5. A fenti okoskodás lényege — kissé általánosítva — a következő módon fejezhető ki:

LEMMA. *Legyen $f(x)$ egy I számközben értelmezett függvény és a I-nek egy belső pontja. Ha minden $(a-\delta, a+\delta)$ alakú I-ben fekvő intervallum tartalmaz három ekvidisztans pontot: x_0-h, x_0, x_0+h $(h>0)$ úgy, hogy $a\in[x_0-h, x_0+h]$ és*

$$(2)\qquad \left|f(x_0)-\frac{1}{2}[f(x_0+h)+f(x_0-h)]\right|\geqq 2h\cdot\lambda,$$

ahol λ fix pozitív szám, akkor $f(x)$ nem differenciálható az a helyen.

Valóban: (2)-ből látjuk, hogy a

$$(3)\qquad d=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}-\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

különbség abszolút értékben nem kisebb 2λ-nál, ami pedig elegendő kis δ esetén ellentmond az (1) feltételnek.

6. Legyen $\lambda>0$ megadva egyszer s mindenkorra. Evidens módon bármely adott $Q(x,y)$, $Q'(x',y')$, $x<x'$ pontpárhoz szerkeszthető (végtelen sok) oly $P(\xi,\eta)$ pont, hogy $\xi=\frac{1}{2}(x+x')$, $\left|\eta-\frac{1}{2}(y+y')\right|\geqq\lambda(x'-x)$ (vö. (2)); P-t a Q, Q' pontok egy *asszociált*jának fogjuk hívni.

Az eddigiek alapján könnyű az 1. §-ban megadott eljárást messzemenően általánosítani; így olyan *módszer*re jutunk, mely ekvidisztans alappontokon átmenő törtvonalak helyett változatos módon választható alappontokat és görbeíveket[9] használ fel. Legyen ui. $y=F_0(x)$ egy mindenütt folytonos függvény, $Q_i(a_i, b_i)$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ egy pontsorozat, melyre $a_i<a_{i+1}$, $b_i=F_0(a_i)$, $\lim\limits_{i\to\infty} a_i=\infty$, $\lim\limits_{i\to-\infty} a_i=-\infty$ és legyen adva egy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varrho_n$ pozitív-tagú összetartó sor. Tekintsük az $y=F_0(x)$ függvénygörbe ϱ_1-környezetét[10] (jelöljük V_{ϱ_1}-gyel)

[9] A következőkben az „ív" és „görbeív" szavakat kizárólag olyan JORDAN-féle görbeívek megjelölésére tartjuk fenn, melyeknek $y=y(x)$ analitikus előállításában $y(x)$ *egyértékű* folytonos függvény.

[10] Egy $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq a')$ ív ϱ-környezetén (V_ϱ) értjük azon (x,y) pontok halmazát, melyekre $a\leqq x\leqq a'$, $f(x)-\varrho<y<f(x)+\varrho$.

és rendeljünk hozzá a grafikon minden $[Q_i, Q_{i+1}]$ ívéhez egy $P_r(x_r, y_r)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ pontrendszert úgy, hogy 1) P_0, P_m azonos Q_i-vel ill. Q_{i+1}-gyel, $P_r \in V_{\varrho_1}$ és $x_r < x_{r+1}$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$; 2) minden P_r, P_{r+1} „szomszédos" pontpárnak van V_{ϱ_1}-be eső P_r^* asszociáltja.[11] Húzzunk mármost V_{ϱ_1}-ben egy görbeívet úgy, hogy átmenjen a P_r, P_r^* pontok mindegyikén és vetülete az x-tengelyen az $[a_i, a_{i+1}]$ számköz legyen; nevezzük ezt a $[Q_i, Q_{i+1}]$ ív egy elsőrendű *adjungált*jának. Következő lépésként tekintsük ennek az adjungáltnak ϱ_2-környezetét (V_{ϱ_2}), s ebben minden $[P_r, P_r^*]$, $[P_r^*, P_{r+1}]$ ívnek képezzük egy adjungáltját ugyanolyan értelemben, mint az imént $[Q_i, Q_{i+1}]$-ét; kapjuk az eredeti $[Q_i, Q_{i+1}]$ görbeív $2m$-számú másodrendű adjungáltját. Ez utóbbiak mindegyikére ismét alkalmazva az eljárást, előállnak $[Q_i, Q_{i+1}]$ harmadrendű adjungáltjai $(\subset V_{\varrho_3})$ s. i. t. — Az összes $[Q_i, Q_{i+1}]$ $(i = 0, \pm 1, \ldots)$ görbeívek elsőrendű adjungáltjai egy folytonos $y = F_1(x)$ függvényt ábrázolnak, az összes másodrendű adjungáltak szolgáltatta folytonos függvény legyen $y = F_2(x)$ stb.

II. TÉTEL. $F(x) = \lim\limits_{n \to \infty} F_n(x)$ *mindenütt folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható.*

BIZONYÍTÁS. 1° A konstrukció szerint $|F_{k+1}(x) - F_k(x)| < \varrho_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; mivel $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varrho_{k+1} < \infty$, inneh folyik az

$$F_n(x) = F_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} [F_{k+1}(x) - F_k(x)] \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

függvénysorozat egyenletes konvergenciája és, tekintettel $F_n(x)$ mindenütt folytonos voltára, egyúttal $F(x)$ folytonossága $-\infty < x < \infty$ mellett.

Jelöljük E_n-nel az összes n-edrendű adjungáltak végpontjainak halmazát. Az 1) feltétel szerint E_n pontjai egyidejűleg hozzátartoznak az $F_n(x)$, $F_{n+1}(x)$, $F_{n+2}(x), \ldots$ függvénygörbékhez, tehát szükségképp $F(x)$ képéhez is $(n = 1, 2 \ldots)$. Ennélfogva az utóbbi tartalmazza a $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ halmazt.

2° Először is megállapítjuk, hogy (az asszociált pontok felhasználása miatt) $[Q_i, Q_{i+1}]$ bármely másodrendű adjungáltjának vetülete az x-tengelyen legfeljebb $\frac{1}{2}(a_{i+1} - a_i)$ hosszúságú, minden harmadrendű adjungált vetületének hossza legfeljebb $\frac{1}{4}(a_{i+1} - a_i)$ stb. $(i = 0, \pm 1, \ldots)$. Innen folyik, hogy bármely rögzített $[Q_i, Q_{i+1}]$ ívhez és $\delta > 0$ számhoz található olyan $N = N(\delta)$

[11] Világos, hogy ha az 1)-nek megfelelő x_r abszcisszákra $\max(x_{r+1} - x_r)$ elegendő kicsi, találhatók olyan P_r pontok, hogy 2) is teljesüljön.

küszöbszám, hogy $[Q_i, Q_{i+1}]$ összes N-ed- (és magasabb) rendű adjungáltjának vetülete legfeljebb δ hosszúságú; különben $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ vetülete mindenütt sűrű az x-tengelyen.

Legyen megadva mármost egy $x=a$ hely s ennek egy $(a-\delta, a+\delta)$ környezete; válasszuk i-t úgy, hogy a beleessék az $[a_i, a_{i+1}]$ intervallumba és N-et az imént említett módon. Akkor található egy (N-edrendű) C_N adjungált, melynek x-tengelymenti vetülete tartalmazza az a pontot és része $(a-\delta, a+\delta)$-nak. A konstrukció és 1° alapján C_N tartalmaz három olyan $Q(x, F(x))$, $P(\xi, F(\xi))$, $Q'(x', F(x'))$ pontot, hogy $a \in [x, x']$ és P asszociáltja Q-nak és Q'-nek; mivel $[x, x'] \subset (a-\delta, a+\delta)$ és $\delta > 0$ tetszőleges, a lemma felhasználásával közvetlenül folyik, hogy $F(x)$ nem differenciálható az a pontban, qu. e. d.

7. Ami a II. tétel *alkalmazásait* illeti, nehézség nélkül igazolható, hogy az ismert geometriai példák jó része eleget tesz a szóban forgó feltételeknek (vö. [12]). Ha az $F_0(x)=f_0(x)$, $F_{k+1}(x)-F_k(x)=f_{k+1}(x)$ $(k=0, 1, \ldots)$, $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ jelöléseket vezetjük be, akkor az

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \tag{5}$$

sorról van szó, melynek részletösszegei bizonyos megszorításoknak vannak alávetve. Az utóbbiak legkönnyebben úgy teljesíthetők analitikus úton, hogy olyan periodikus függvények lineáris kombinációját tekintjük, melyeknek frekvenciái racionális viszonyban vannak, s amelyek eltűnnek az alapintervallum végpontjaiban. (Meggyőződhetünk pl. arról, hogy $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} (2\mu)^{-k}((2^k \mu^k x))$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} (2\mu)^{-k}((2^k \mu^k x))$, $\mu=1, 2, \ldots$ esetén kielégülnek a II. tétel feltételei; itt $((x))$-nek ugyanaz a jelentése, mint az I. tételben.)

3. §. $\Phi(x)=\Sigma c_k \varphi(\nu_k x)$ alakú függvények vizsgálata $\varphi(x)$-re vonatkozó konvexitási (konkavitási) kikötések mellett

8. A következő fejezetekben néhány állandó jellegű *jelöléssel* ill. *megszorítással* élünk. — Így $c_0, c_1, c_2, \ldots$ mindig oly valós, 0-t nem tartalmazó együttható-sorozatot jelent, melyre $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ konvergens; $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ pozitív egész számok szigorúan monoton növekedő sorozata, melyben ν_{k+1} osztható ν_k-val

$(k=0,1,2,\ldots)$; rövidség kedvéért írjuk: $\nu_{k,l}=\frac{\nu_k}{\nu_l}$. $\varphi(x)$ folytonos és $p>0$ szerint periodikus függvény; legyen

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k\varphi(\nu_k x). \tag{6}$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos.*

III. TÉTEL. *Legyen* $\varphi(x)$ *konvex*[12] *(konkáv) a* $[0,p]$ *számközben. Tegyük fel, hogy* sgn c_k $(k=0,1,\ldots)$ *állandó és hogy van oly* $\varrho>0$ *konstans, hogy* $\nu_k|c_k|\geqq\varrho$ $(k=0,1,\ldots)$.
Akkor $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható.*

9. E tételt jóval általánosabb alakban akarjuk bebizonyítani, felhasználva a következő fogalmat: egy $f(x)$ függvényt $[a,b]$-ben *szakaszonként konvex*nek nevezünk $a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$ osztópontokkal, ha $f(x)$ folytonos e pontokban és konvex vagy lineáris az $[x_{r-1},x_r]$ $(r=1,2,\ldots,m)$ szakaszok mindegyikében. A *szakaszonként konkáv* függvények definíciója analóg.

IV. TÉTEL. *Legyen* $\varphi(x)$ $[0,p]$*-ben szakaszonként konvex (vagy konkáv)* ω_r $(r=0,1,\ldots,m)$ *osztópontokkal; legyen* $\varphi(0)>$ *(ill.* $<$*)* $\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$. *Tegyük fel, hogy* 1) sgn c_k $(k=0,1,\ldots)$ *állandó;* 2) *vannak tetszőlegesen nagy olyan k indexek, melyekre a* $\nu_{k,k-1}\cdot\omega_r/p$ $(r=0,1,\ldots,m)$ *viszonyszámok egészek;* 3) $\varlimsup_{k\to\infty}\nu_k|c_k|>0$.
Akkor $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható.*

BIZONYÍTÁS. 2) folytán minden $\frac{\omega_r}{p}$ viszony racionális $\left(\text{speciálisan } \frac{\omega_0}{p}=0, \frac{\omega_m}{p}=1\right)$; tehát $\omega_r=\frac{\beta_r}{\gamma_r}p$ $(r=1,2,\ldots,m-1)$, ahol β_r,γ_r relatív prím természetes számok. Jelöljük Γ-val $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1}$ legkisebb közös többszörösét; akkor a 2) feltételből következik egy olyan $n_1<n_2<\cdots$ index-sorozat létezése, hogy $\nu_{k,k-1}$ osztható Γ-val, ha $k=n_1,n_2,\ldots$. 3) szerint van oly $\varrho>0$ konstans, hogy $\nu_k|c_k|\geqq\varrho$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

[12] Most és később JENSEN [11] definíciója veendő tekintetbe: egy $[a,b]$-ben értelmezett $f(x)$ függvényt itt konvexnek, ill. konkávnak nevezünk, ha $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$, ill. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ minden $[a,b]$-ben fekvő x_1,x_2 pontpárra és nem mindig az egyenlőség jele érvényes (linearitás esete).

Tekintsünk három ekvidisztans pontot rendre $\frac{\mu}{\nu_n}p$, $\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p$, $\frac{\mu+1}{\nu_n}p$ ($\mu=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$) alakú abszcisszákkal, s képezzük a következő különbséget;

$$\Delta = \Phi\left(\frac{\mu}{\nu_n}p\right)+\Phi\left(\frac{\mu+1}{\nu_n}p\right)-2\Phi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p\right)=$$

$$(7)\qquad =\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left[\varphi\left(\frac{\mu\nu_k}{\nu_k}p\right)+\varphi\left(\frac{(\mu+1)\nu_k}{\nu_n}p\right)-2\varphi\left(\frac{(2\mu+1)\nu_k}{2\nu_n}p\right)\right]=\sum{}'+\sum{}'',$$

ahol

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum{}' &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k\left[\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right)+\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right)-2\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right],\\ \sum{}'' &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k\left[\varphi(\mu\nu_{k,n}p)+\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}p)-2\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{p}{2}\right)\right] \end{aligned}\right.$$

($\nu_{n,k}(k<n)$ és $\nu_{k,n}(k\geqq n)$ pozitív egész számok). Az alábbiakban n értékét az $\{n_i\}$ sorozat elemeire korlátozzuk.

Minthogy $\nu_{n,k}=\prod_{i=k}^{n-1}\nu_{i+1,i}$, a $\nu_{n,0}, \nu_{n,1},\ldots,\nu_{n,n-1}$ számok oszthatók Γ-val; innen folyik, hogy az ω_r+sp $(r=0,1,\ldots,m;\ s=0,\pm 1,\ldots)$ pontok egyike sem eshetik valamely $\left[\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p, \frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right]$ $(k=0,1,\ldots,n-1;\ \mu=0,\pm 1,\ldots)$ alakú intervallum belsejébe. Így $\varphi(x)$ szakaszonként konvex (konkáv) volta és az 1) feltétel alapján következik, hogy Σ' minden tagja ugyanolyan előjelű. Másfelől a Σ'' összegben nyilván $\varphi(\mu\nu_{k,n}p)=\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}p)=\varphi(0)$ és $\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{p}{2}\right)=\varphi(0)$ vagy $=\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$ aszerint, amint $\nu_{k,n}$ páros vagy páratlan; ennélfogva

$$(9)\qquad \sum{}''=2\left[\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right](c_n+\sum c_k),$$

ahol az utolsó összeg k-nak azon n-nél nagyobb értékeire terjesztendő ki, melyekre $\nu_{k,n}$ páratlan. Látjuk, hogy Σ'' minden tagjának előjele ugyanaz, mint Σ' tagjaié.

Végeredményben (7), (8) és (9) alapján nyerjük:

$$|\Delta|=\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\left|\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right)+\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right)-2\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}\right)\right|+$$

$$+2\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|(|c_n|+\sum|c_k|)\geqq$$

$$\geqq 2\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right||c_n|\geqq 2\lambda\cdot\frac{p}{\nu_n}\quad(\mu=0,\pm 1,\ldots,;\ n=n_1,n_2,\ldots),$$

ahol $\lambda = \frac{\varrho}{p}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|$; mivel minden előírt $(a-\delta,\ a+\delta)$ alakú intervallum tartalmaz olyan $\left[\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p\right]$ (μ egész, $n = n_1, n_2, \ldots$) alakú számközt, melyre $a \in \left[\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p\right]$, hacsak n elegendő nagy, a lemma felhasználásával (vö. [2]) azonnal adódik $\Phi(x)$ nem-deriválhatósága, qu. e. d.

4. §. Lipschitz-feltételt kielégítő $\varphi(x)$ alapfüggvény esete

10. Ha $\varphi(x)$-ről a konvexitás (konkavitás) helyett azt tesszük fel, hogy az alapintervallumban egyenletesen $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq H|x_1 - x_2|$, akkor a $\operatorname{sgn} c_k =$ konstans feltétel elejthető, s az előzőket bizonyos irányban kiegészítő tételeket mondhatunk ki.

V. TÉTEL. *Legyen* $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_H\, 1$ $(0 \leq x \leq p)$ *és* $\varphi(0) \neq \varphi\left(\frac{p}{2}\right)$. *A* c_k *együtthatók legyenek tetszőleges előjelűek, de tegyük fel, hogy*

$$\lim_{\overline{n \to \infty}} \left(\nu_n \sigma_n - A_\varphi \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \nu_k\right) > 0, \tag{10}$$

ahol $A_\varphi = H\frac{p}{2}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|^{-1}$ *és* $\sigma_n = |\Sigma c_k|$; *az utolsó összegben k azokon az* $(n-1)$*-nél nagyobb egész számokon fut végig, melyekre* $\nu_{k,n}$ *páratlan.*[13]
Akkor $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk ismét három pontot, melyeknek abszcisszái rendre $\frac{\mu}{\nu_n}p$, $\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p$, $\frac{\mu+1}{\nu_n}p$ (μ egész) alakúak. A (7), (8) alatti jelölésekkel írhatjuk:

$$\begin{aligned} |\Sigma'| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \left[\left|\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right) - \varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right) - \varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right|\right] \leq \\ &\leq H\frac{p}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k; \end{aligned} \tag{11}$$

[13] Tehát — speciálisan — $\sigma_n = |c_n|$ vagy $\sigma_n = \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k\right|$ aszerint, amint a $\nu_{k+1,k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ viszonyszámok mindegyike páros, ill. páratlan. — Nyilvánvaló, hogy a c_k-kat a $\Sigma|c_k| < \infty$ feltételnek megfelelően és $\varepsilon\,(>0)$-t tetszőlegesen előírva, a $\nu_1, \nu_2, \ldots$ egész számokat mindig sorra megválaszthatjuk úgy, hogy a $\nu_n\sigma_n > A_\varphi \sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k + \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$ egyenlőtlenségek teljesüljenek, honnan következik (10).

másfelől nyerjük, akárcsak fent (vö. (9))

$$\sum'' = 2\left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right]\sum c_k, \tag{12}$$

ahol k a tételben jelzett értékeken fut végig.

Tehát elegendő nagy n-re

$$\begin{aligned} |\Delta| \geqq \left|\sum''\right| - \left|\sum'\right| \geqq 2\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right| \sigma_n - H\frac{p}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k = \\ = \frac{2}{\nu_n}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|\left(\nu_n\sigma_n - A_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k\right) > 2\lambda\cdot\frac{p}{\nu_n}, \end{aligned} \tag{13}$$

ahol $\lambda = \dfrac{\vartheta}{2p}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\dfrac{p}{2}\right)\right|$, ϑ-val jelölve a (10) alatti limesz inferiort.

Minden a pont lefedhető $\left[\dfrac{\mu}{\nu_n}p, \dfrac{\mu+1}{\nu_n}p\right]$ $(\mu = 0, \pm 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ alakú intervallummal, s ennek hossza 0-hoz tart, midőn $n \to \infty$. Így (13) (vö. (2)) és a lemma alapján arra jutunk, hogy $\Phi(x)$ a-ban nem deriválható, qu. e. d.

11. Mint a $\varphi(x) = \sin x$ példa mutatja, figyelmet érdemel az a lehetőség is, midőn az utolsó tétel $\varphi(0) \neq \left(\dfrac{p}{2}\right)$ kikötése nem teljesül. Erre vonatkozik a következő

VI. TÉTEL. *Legyen* $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_H 1$ $(0 \leqq x \leqq p)$ *és* $\varphi(0) = \varphi\left(\dfrac{p}{2}\right) \neq \varphi\left(\pm\dfrac{p}{4}\right)$. *Tegyük fel, hogy teljesül a következő feltételek valamelyike: a* $\nu_{k+1,k}$ *viszonyszámok párosak* (1.* *eset),* $(4r+1)$*-alakúak* (2.* *eset), ill.* $(4r-1)$*-alakúak* (3.* *eset) elegendő nagy k-ra. Legyen továbbá*

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\nu_n\tau_n - B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k\right) > 0, \tag{14}$$

ahol $\begin{Bmatrix} u_\varphi \\ U_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \min \\ \max \end{Bmatrix}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\pm\dfrac{p}{4}\right)\right|$ *jelölés mellett* $B_\varphi = H\dfrac{p}{4}u_\varphi^{-1}$ *és* $\tau_n = |c_n|$, *vagy* $\tau_n = \left|\sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k\right|$, *ill.* $\tau_n = \left|\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_{n+2l}\right| - \dfrac{U_\varphi}{u_\varphi}\left|\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_{n+2l+1}\right|$ *aszerint, amint az* 1.*, 2*, *ill.* 3*. *eset áll fenn.*

Akkor $\Phi(x)$ *mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható.*

BIZONYÍTÁS. Írjuk: $\dfrac{p}{2} = q$ és tekintsük a $\dfrac{\mu}{\nu_n}q$, $\dfrac{2\mu+1}{2\nu_n}q$, $\dfrac{\mu+1}{\nu_n}q$ $(\mu = 0, \pm 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ pontokat. Ha ismét a fenti jelöléseket alkalmazzuk p

helyett q-val, mindenekelőtt nyerjük:

$$(15)\qquad \left|\sum{}'\right| \leqq H\frac{q}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k.$$

Mivel $\varphi(\mu\nu_{k,n}q)=\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}q)=\varphi(0)$ és $\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{q}{2}\right)=\varphi(0)$, $\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)$, vagy $\varphi\left(-(2\mu+1)\frac{q}{2}\right)$ aszerint, amint $\nu_{k,n}\equiv 0 \pmod 2$, $\nu_{k,n}\equiv 1$, ill. $-1 \pmod 4$, a másik szóban forgó összeg számára adódik

$$(16)\qquad \sum{}'' = \begin{cases} 2c_n\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right] & (1.^*),\\ 2\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right]\sum_{k=n}^{\infty}c_k & (2.^*),\\ 2\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right](c_n+c_{n+2}+\cdots)+ & \\ \qquad +2\left[\varphi(0)-\varphi\left(-(2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right](c_{n+1}+c_{n+3}+\cdots) & (3.^*), \end{cases}$$

rendre a jobboldalon feltüntetett eseteknek megfelelően, feltéve, hogy n nagyobb egy alkalmas természetes számnál.

Így (14) folytán elegendő nagy n-re

$$(17)\qquad |\Delta| \geqq \left|\sum{}''\right|-\left|\sum{}'\right| \geqq 2\frac{u_\varphi}{\nu_n}\left(\nu_n\tau_n-B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k|c_k|\right)>2\lambda\cdot\frac{q}{\nu_n},$$

ahol $\lambda=\frac{u_\varphi}{2q}\theta$, $\theta=\varliminf_{n\to\infty}\left(\nu_n\tau_n-B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k|c_k|\right)$, τ_n-nek és B_φ-nek a tételben megadott jelentése mellett; a bizonyítás befejezése ezek után hasonlóan történik, mint fent (vö. (13)).

12. Ha $\{c_k\}$ és $\{\nu_k\}$ *geometriai haladványok,* azaz $c_k=c^k$ $(0<|c|<1)$, $\nu_k=\nu^k (k=0,1,\ldots)$, akkor az V. és VI. tétel kikötései egyszerűbb alakot öltenek.

Valóban, ha felhasználjuk a következő zárt kifejezéseket:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k|c_k|=\frac{(\nu|c|)^n-1}{\nu|c|-1},\quad \sum_{k=n}^{\infty}c_k=\frac{c^n}{1-c},\quad \sum_{l=0}^{\infty}c_{n+2l}=\frac{c^n}{1-c^2},\quad \sum_{l=0}^{\infty}c_{n+2l+1}=\frac{c^{n+1}}{1-c^2},$$

korolláriumként könnyen adódik a

VII. TÉTEL. *Legyen* $\varphi(x)\in \mathrm{Lip}_H\, 1$ $(0\leqq x\leqq p)$, $0<|c|<1$ *és* ν *egy* 1-*nél nagyobb egész szám.*

1) *Ha* $\varphi(0) \neq \varphi\left(\frac{p}{2}\right)$, *tegyük még fel, hogy* $\nu|c| \geqq 1+A_\varphi$, *vagy* $1+A_\varphi(1-c)$ $\left(A_\varphi = H\frac{p}{2}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|^{-1}\right)$ *aszerint, amint* ν *páros vagy páratlan.*

2) *Amennyiben* $\varphi(0)=\varphi\left(\frac{p}{2}\right) \neq \varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)$, *úgy páros* ν *mellett álljon fenn a* $\nu|c| \geqq 1+B_\varphi$, $\nu \equiv 1 \pmod 4$ *mellett a* $\nu|c| \geqq 1+B_\varphi(1-c)$, *végre* $\nu \equiv -1$ $\pmod 4$ *mellett a* $\nu|c| \geqq 1+B_\varphi(1-c^2)\,(1-\Theta_\varphi|c|)^{-1}$ *és* $|c| < \Theta_\varphi^{-1}$ *egyenlőtlenség, ahol* $B_\varphi = H\frac{p}{4}u_\varphi^{-1}$, $\Theta_\varphi = U_\varphi u_\varphi^{-1}$, $\left.\begin{matrix} u_\varphi \\ U_\varphi \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix}\right\}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)\right|$.

Az összetartozó feltételek teljesülése esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} c^k\varphi(\nu^k x)$ *sor mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvényt állít elő.*

5. §. Alkalmazások, megjegyzések

13. Vessük össze tételeinket az idevágó irodalom legnevezetesebb példáival.

Legyen $\varphi(x)=|x|$ $\left(|x| \leqq \frac{1}{2}\right)$ és $p=1$, tehát $\varphi(x)=((x))\,(-\infty<x<\infty)$, $c_k=c^k$ $(0<c<1)$, $\nu_k=\nu^k$ ($\nu>1$, egész). Akkor a III. tétel értelmében adódik: $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c^k((\nu^k x))$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható, hacsak $c\nu \geqq 1$. E példát KNOPP adta meg ([12]) a $c\nu>4$ megszorítással; viszont a legfontosabb speciális eset kétségkívül éppen $c\nu=1$, mely a VAN DER WAERDEN-féle példának felel meg ([25]). — Hasonlóképpen: $\varphi(x)=((x))$, $c_k=10^{-k}$, $\nu_k=2^{k!}$ mellett nyerjük FABER példáját ([7]), míg a $\varphi(x)=|\sin \pi x|$, $c_k=c^k$ $(0<c<1)$, $\nu_k=\nu^k\,(\nu>1)$ esetben arra jutunk, hogy $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c^k|\sin \nu^k\pi x|$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható, hacsak $c\nu \geqq 1$. Az utóbbi szintén megtalálható KNOPPnál, de csak a $c\nu>1+\frac{3}{2}\pi\approx 5{,}71$ megszorítással.

Legyen $\varphi(x)=\cos \pi x$, $p=2$, $H=\pi$, tehát $A_\varphi=\frac{\pi}{2}$ a VII. tételben. Akkor következik, hogy $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c^k \cos \nu^k\pi x$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható, feltéve, hogy $0<|c|<1$, $\nu=2,3,\ldots$ és $\nu|c| \geqq 1+\frac{\pi}{2}$ vagy

$\nu|c| \geqq 1+\frac{\pi}{2}(1-c)$ aszerint, amint ν páros vagy páratlan. $\left(\nu c \geqq 1+\frac{\pi}{2} \approx 2{,}57,\right.$ tehát megfelel $c>0$ és bármely kérdéses ν esetén.$\left.\right)$ Ez WEIERSTRASS példája ([26]), de az ő feltételei c-re és ν-re: $0<c<1$, ν páratlan, $\nu c>1+\frac{3}{2}\pi \approx 5{,}71$.

Írjuk: $\Phi(x)=\sin \pi x$, $p=2$, $H=\pi$, $u_\varphi=U_\varphi=\Theta_\varphi=1$, $B_\varphi=\frac{\pi}{2}$, akkor folyik: $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c^k \sin \nu^k \pi x$ mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható, feltéve, hogy $0<|c|<1$, $\nu=2,3,\ldots$ és $\nu|c|\geqq 1+\frac{\pi}{2}$, vagy $\nu|c|\geqq 1+\frac{\pi}{2}(1-c)$, ill. $\nu|c|\geqq 1+\frac{\pi}{2}(1+|c|)$ aszerint, amint $\nu\equiv 0 \pmod 2$, vagy $\nu\equiv 1 \pmod 4$, ill. $\nu\equiv -1 \pmod 4$. (Így a $\nu|c|\geqq 1+\pi$ feltétel elegendő minden szóba jövő c és ν esetén.) E példa DINItől származik ([5]); KNOPP a $0<|c|<1$, $\nu\equiv 0$ (mod 2), vagy $\nu\equiv \operatorname{sgn} c \pmod 4$ és $\nu|c|>1+\frac{3}{2}\pi$ feltételek mellett diszkutálja. — Jelöljük $\chi(x)$-szel azt a páratlan, 2-periódusú függvényt, melyre $\chi(x)=((x))$ $(0\leqq x\leqq 1)$; újra a VII. tétel alapján adódik, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} c^k \chi(\nu^k x)$ mindenütt folytonos, nem-deriválható függvényt állít elő, hacsak $0<|c|<1$, $\nu=2,3,\ldots$, továbbá $\nu|c|$ nem kisebb, mint $\frac{3}{2}$, vagy $1+\frac{1}{2}(1-c)$, ill. $1+ +\frac{1}{2}(1+|c|)$, rendre páros, $(4r+1)$-, ill. $(4r-1)$-alakú ν-érték esetének megfelelően. Az utolsó sor szintén megtalálható KNOPP idézett dolgozatában, de a $0<|c|<1$, $\nu\equiv 0 \pmod 2$ vagy $\nu\equiv \operatorname{sgn} c \pmod 4$ és $\nu|c|>4$ feltételekkel.

A fenti tételek természetesen tetszőleges számú hasonló példát szolgáltatnak. (A legegyszerűbbek: $\varphi(x)$ legyen szakaszonként lineáris, vagy körívekből, ill. parabolaívekből összetett grafikonú függvény stb.)

14. ZYGMUND egy újabb keletű híres dolgozatában[14] többek közt olyan $f(x)$ függvényekkel foglalkozik, melyekre fennáll

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h}=0 \tag{18}$$

valamely x_0 pontban, ill. egyenletesen egy intervallumban ("smooth functions"); így az első rendszeres tárgyalását nyújtja egy függvényosztálynak, mely RIE-

[14] [27].

MANN óta alkalmazást nyert a trigonometrikus sorok elméletében, és megmutatja számos eredményen keresztül, hogy e függvények az egész valós analízisben lényeges szerepet játszanak. Mivel nyilvánvalóan a differenciálhatóság fogalmának egy általánosítása forog szóban, érdemesnek tartom megjegyezni, hogy a fent konstruált, nem-deriválható függvények semilyen szakaszon nem rendelkeznek egyenletesen a (18) tulajdonsággal; ezt könnyű igazolni (18) és (2) összehasonlítása útján.

Különben HARDYnak a WEIERSTRASS-függvényre vonatkozó mély eredményei azt mutatják, hogy az V. és VI. tételben c_k-ra és ν_k-ra tett kikötések bizonyos speciális esetben élesíthetők lehetnek.[15] Másfelől úgy látszik, hogy pl. a IV. tétel 3) kikötése (speciálisan: $c_k = c^k$, $\nu_k = \nu^k$ esetén $|c|\nu \geqq 1$) nélkülözhetetlen. E problémákkal, valamint a szóban forgó függvények DINI-számainak behatóbb vizsgálatával más alkalommal kívánok foglalkozni.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete

IRODALOM

[1] F. A. BEHREND, Some remarks on the construction of continuous non differentiable functions, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **50** (1949), 463—481.

[2] A. S. BESICOVITCH, Diskussion der stetigen Funktionen in Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit, *Bull. Acad. Sci. URSS, Leningrade*, (6) **19** (1925), 527—540.

[3] K. A. BUSH, Continuous functions without derivatives, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 222—225.

[4] J. DIEUDONNÉ, Sur une fonction continue sans dérivée, *Mathesis*, **47** (1933), 277—279.

[5] U. DINI, Su alcuni funzioni che in tutto in intervallo non hanno mai derivata, *Annali di Mat.*, (2) **8** (1877), 121—137.

[6] P. DU BOIS-REYMOND, Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente, *Journal für Math.*, **79** (1875), 21—37.

[7] G. FABER, Einfaches Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion, *Jahresber. d. Deutschen Math. Verein.*, **16** (1907), 538—540.

[8] H. HAHN, Über stetige Funktionen ohne Ableitung, *Jahresber. d. Deutschen Math. Verein.*, **26** (1918), 281—284.

[9] G. H. HARDY, Weierstrass' non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17** (1916), 301—325.

[10] T. H. HILDEBRANDT, A simple continuous function with a finite derivative at no point, *Amer. Math. Monthly*. **40** (1933), 547—548.

[15] A [9] dolgozatban többek között be van bizonyitva, hogy a $\sum a^n \cos b^n \pi x$ és $\sum a^n \sin b^n \pi x$ sorok mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvényeket állítanak elő, ha $0 < a < 1$, $b > 1$ és $ab \geqq 1$. Egy másik tétel szerint a $\sum n^{-2} \sin n^2 \pi x$ RIEMANN-féle sor összegfüggvénye sem differenciálható, ha x irracionális.

[11] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), 175—193.

[12] K. Knopp, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbaren Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **2** (1918), 1—26.

[13] H. Koch, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta. Math.*, **30** (1906), 145—174.

[14] G. Kowalewski, Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion, *Acta Math.*, **44** (1923), 315—319.

[15] H. Lebesgue, Une fonction continue sans dérivée, *Enseign. Math.*, **38** (1942), 212—213,

[16] M. Mikolás, Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables, *Acta Sci. Math. Szeged*, **17** (1956), megjelenés alatt.

[17] B. N. Mukhopadhyay, On some generalisations of Weierstrass' non-differentiable functions, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **25** (1934), 179—184.

[18] W. Orlicz, Sur les fonctions continues non dérivables, *Fund. Math.*, **34** (1947), 45—60.

[19] E. D. Pepper, On continuous functions without a derivative, *Fund. Math.*, **12** (1928), 244—253.

[20] S. Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fund. Math.*, **19** (1932), 211—219.

[21] A. N. Singh, The theory and construction of non-differentiable functions, *Lucknow Univ. Studies.*, No 1. (Lucknow, 1935).

[22] E. Steinitz, Stetigkeit und Differentialquotient, *Math. Annalen*, **52** (1899), 58—69.

[23] T. Takagi, A simple example of continuous function without derivative, Journal Phys.-Math. Soc. Tokyo, 1 (1903), 176—177.

[24] R. Tambs Lyche, Une fonction continue sans dérivée, *Enseign. Math.*, **38** (1942), 208—211

[25] B. L. van der Waerden, Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), 474—475.

[26] K. Weierstrass, Über kontinuierliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Werke* **2**, 71—74. (1872 VII. 18-án tartott előadás.)

[27] A. Zygmund, Smooth functions, *Duke Math. Journal*, **12** (1945), 47—76.