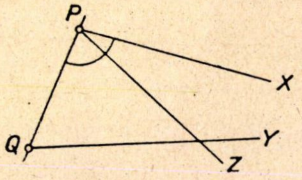
A HIPERBOLIKUS SÍK ANALITIKUS GEOMETRIÁJÁNAK INDEPENDENS ELEMI FELÉPÍTÉSE A HILBERT-FÉLE „VÉGKALKULUS" ALAPJÁN

SZÁSZ PÁL*

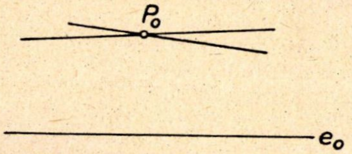
1. §.
Bevezetés

Ha a sík hiperbolikus geometriáját kizárólag síkbeli axiómák alapján és folytonossági axiómák használata nélkül akarjuk felépíteni, amit először D. HILBERT [1] tett meg, akkor az illeszkedés vagy összetartozás, az elrendezés és a kongruencia síkbeli I., II., III. HILBERT-féle axióma-csoportjai [2] mellett elegendő az a feltevés, amely az alábbi két axiómában nyer kifejezést.

IV_1. *Legyen P és Q két különböző pont a síkon s QY valamely félegyenes a PQ egyenes egyik oldalán. Akkor mindig van PQ ugyanezen oldalán olyan PX félegyenes, amely QY-t nem metszi, míg a $QPX\sphericalangle$ minden közbülső PZ félegyenese metszi e QY félegyenest* (1. ábra).



1. ábra



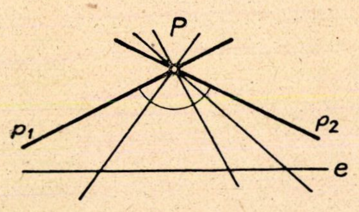
2. ábra

IV_2. *Van olyan e_0 egyenes és azon kívüli P_0 pont a síkban, hogy P_0-on át nem csak egy olyan egyenes fektethető, amely e_0-t nem metszi* (2. ábra).

Valóban, amint egy előbbi dolgozatomban [3] megjegyeztem és más helyen [4] be is bizonyítottam, ezekből már következik az a *hiperbolikus paralelaxióma*, amelyre D. HILBERT [5] a hiperbolikus síkgeometriát az I., II., III. axióma-csoportok mellett felépítette. Vagyis a fenti axiómák alapján bebizonyítható a következő

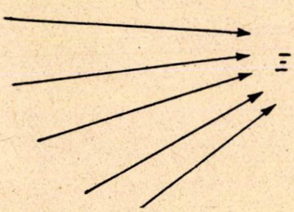
* *Előadta az Eötvös Loránd Tudományegyetem tudományos ülésszakán a matematikai szekció 1956. április 17-i ülésén.*

TÉTEL. *Ha e tetszőleges egyenes és P valamely rajta kívül fekvő pont, akkor a P ponton átmenő és az e egyenest metsző egyenesek bizonyos* $(p_1, p_2)\sphericalangle$ *közbülső egyeneseit alkotják* (3. ábra). E szög p_1, p_2 szárai, amelyek tehát már nem metszik az e egyenest, a P pontból az e egyeneshez húzott *elpattanó egyenesek* vagy *hiperbolikus paraleldák.*

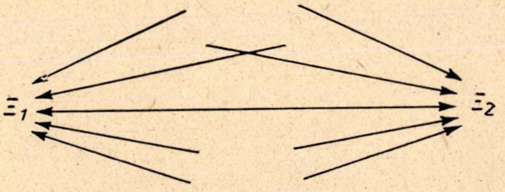


3. *ábra*

D. HILBERT [6] *„végeknek"* nevezte *a végtelen távoli pontokat,* amelyeket egy-egy *elpattanó egyenessereg* definiál (4. ábra). Mindegyikről azt mondjuk, hogy a definiáló egyenessereg egyenesei és csak ezek *rajta átmennek,* és más efélét. Minden egyenesnek két vége van, mert a fenti tételből folyólag két elpattanó egyenessereghez tartozik (5. ábra). Miután D. HILBERT [7] bebizonyította azt az alapvető tételt, hogy *ha két egyenes nem metszi egymást és*

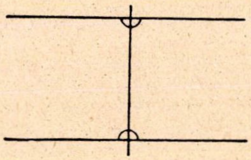


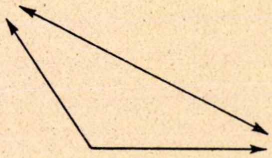
4. *ábra*

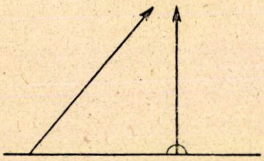


5. *ábra*

nem is elpattanók, akkor van közös merőlegesük (6. ábra), ennek alapján sikerült azt is bebizonyítania [8], hogy *két vég mindig összeköthető egyenessel* (7. ábra), amely természetesen egyetlen. Ebből már következik, hogy *valamely egyenesre rajta kívül fekvő végből egy és csak egy merőleges bocsátható*

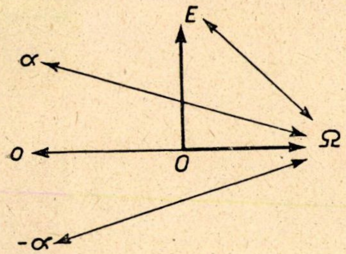

6. *ábra*


7. *ábra*

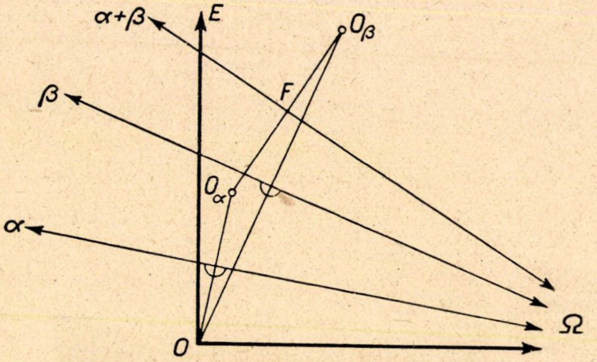

8. *ábra*

(8. ábra). Előkészítő tételei közül csak ezeket emelem itt ki. Mármost a HILBERT-féle *„végkalkulus"* célomnak megfelelő fogalmazásban röviden a következő.

Vegyünk fel valamely derékszöget, amelynek csúcsa O, szárainak mint félegyeneseknek végei Ω és E (9. ábra). Az Ω véget (ez HILBERT jelölésében a ∞) kitüntetjük és a kalkulust az ettől különböző végekre értelmezzük. Egy ilyen α véget *pozitív végnek* mondunk, ha az $\alpha\Omega$ egyenes az $O\Omega$ egyenesnek az $E\Omega$ egyenest tartalmazó oldalán van, viszont *negatív végnek*, ha a másik oldalon van [9]. Az $\alpha\Omega$ egyenes $O\Omega$-ra vonatkozó tükörképének másik végét $-\alpha$-val, az $O\Omega$ másik végét 0-val jelöljük. A végek összeadását D. HILBERT [10] az alábbi módon definiálja.



9. *ábra*



10. *ábra*

Legyenek α és β az Ω-tól különböző végek. Vegyük az O pontnak az $\alpha\Omega$ egyenesre vonatkozó O_α, valamint az $\beta\Omega$-ra vonatkozó O_β tükörképét. Az $\overline{O_\alpha O_\beta}$ egyenesdarab felezőpontját (ha O_α és O_β összeesik vagyis $\alpha=\beta$, akkor ez összeeső pontokat) F-fel jelölve, *az „$\alpha+\beta$ összeg" alatt az $F\Omega$ egyenes másik végét értjük* (10. ábra).

A szorzat definícióját egyszerűbben fejezhetjük ki, ha HILBERTtől eltérően bevezetjük a következő *távolságfüggvényt*, amely egész tárgyalásunkban alapvető szerepet fog játszani.

Az $O\Omega$ egyenest Ω felé irányítván, az előjellel vett $\overline{OA}=t$ egyenesdarab (távolság) A végpontjában állítsunk $O\Omega$-ra merőlegest. Jelöljük $E(t)$-vel e merőleges pozitív σ végét:

$$\sigma=E(t) \tag{1}$$

(11. ábra). Nyilván *bármely σ pozitív vég egy és csak egy előjeles t egyenesdarabhoz tartozik.*

Ez (1) alatti jelölés mellett *a $\sigma_1=E(t_1)$ és $\sigma_2=E(t_2)$ pozitív végek „$\sigma_1\sigma_2$ szorzata" alatt az $E(t_1+t_2)$ végét értjük, képletben*

$$E(t_1)E(t_2)=E(t_1+t_2) \tag{2}$$

(12. ábra). Megállapodunk azután abban, hogy *pozitív α, β végekre*

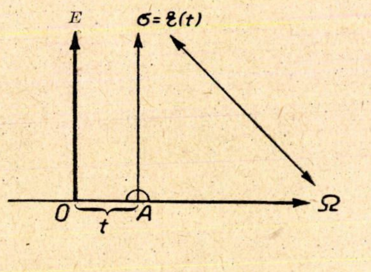
$$\alpha(-\beta)=(-\alpha)\beta=-\alpha\beta, \qquad (-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta \tag{3}$$

és az Ω-tól különböző bármely ξ végre

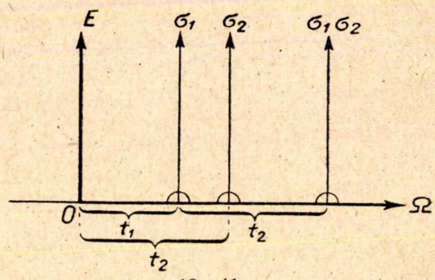
$$(4) \qquad \xi \cdot 0 = 0 \cdot \xi = 0$$

legyen.

Ezzel az Ω-tól különböző végek szorzását minden esetben definiáltuk s ez csak a fogalmazásban különbözik D. HILBERT [11] definíciójától.



11. ábra



12. ábra

Az E pozitív vég az (1) alatti jelölésben $E(0)$ s ez a szorzásnál a *pozitív egység* szerepét játssza, minthogy (2) szerint $E(t)\,E(0) = E(0)\,E(t) = E(t)$. Azért is erre az

$$(5) \qquad E(0) = 1$$

jelölést vezetjük be, ami (2) alapján még az

$$(5^*) \qquad E(t)\,E(-t) = 1$$

alakban is írható.

A 0-val jelölt vég, amely a szorzásnál (4) szerint a *zérus* szerepét játssza, az összeadásnál is mint ilyen viselkedik, mert nyilván az Ω-tól különböző bármely ξ végre

$$(6) \qquad \xi + 0 = 0 + \xi = \xi$$

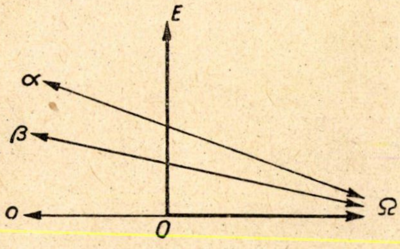
és

$$(7) \qquad \xi + (-\xi) = 0.$$

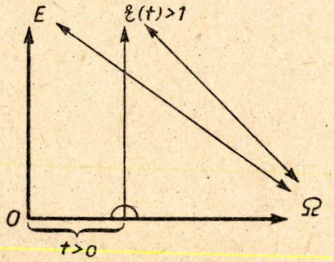
D. HILBERT idézett munkájában megmutatta, hogy *az így definiált végkalkulusban a négy alapműveletet illetően a közönséges törvények érvényesek.* Érvényes azonban az a fontos tétel is, hogy *pozitív végnek mindig van pozitív négyzetgyöke* [12]. Valóban (2) értelmében $E(t) = E\left(\frac{t}{2}\right)^2$. Ezekhez még hozzátehetem, miszerint *megállapodva abban, hogy $\alpha > \beta$ (vagy $\beta < \alpha$), ha $\alpha - \beta$ pozitív, az egyenlőtlenség is a közönséges törvényeket követi.* Különben könnyen belátható, miszerint *pozitív α és β végek esetén $\alpha > \beta$ azt jelenti,* *hogy a $\beta\Omega$ egyenes az $O\Omega$ és $\alpha\Omega$ egyenesek közé esik* (13. ábra). Ennek folyománya, hogy $E(t) > 1$, ha $t > 0$ (14. ábra) s ebből tüstént következik, hogy *általában*

$$E(t_2) > E(t_1), \quad ha \quad t_2 > t_1. \tag{8}$$

Az itt bemutatásra kerülő dolgozatban a végkalkulus birtokában a hiperbolikus sík analitikus geometriája alapjainak *közvetlen* felépítését adom, amely a hiperbolikus trigonometriára nem támaszkodik, hanem éppen ellenkezőleg, ez utóbbit mint következményt magában foglalja. E felépítés *independens*, vagyis az euklideszi geometriát nem használja fel. És HILBERT munkájától eltérően a projektív geometriát is elkerüli, ennyiben teljesen *elemi* módszert követ.



13. ábra



14. ábra

Rövidség kedvéért az $E(t)$ távolságfüggvény mellett célszerű bevezetni még a

$$C(t) = \frac{E(t)+E(-t)}{2}, \; S(t) = \frac{E(t)-E(-t)}{2}, \; T(t) = \frac{S(t)}{C(t)} = \frac{E(t)-E(-t)}{E(t)+E(-t)} \tag{9}$$

távolságfüggvényeket. Amíg $E(t)$ az exponenciális függvény analogonja, a (9) alattiak a hiperbolás függvények analogonjai, hasonló formális tulajdonságokkal rendelkeznek. Így pl. az első kettő között fennáll a

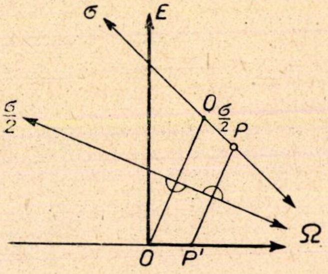
$$C(t)^2 - S(t)^2 = 1 \tag{10}$$

alapreláció. És változásukat tekintve is a hiperbolás függvényekre emlékeztetnek, mint ahogy $E(t)$ az exponenciális függvényre emlékeztet.

2. §.

Valóságos pont Weierstrass-féle homogén koordinátái

A sík valamely P pontját jellemezhetjük az alábbi két adattal. Az egyik a $P\Omega$ egyenes másik vége, amely legyen σ (15. ábra). A másik adatot előállítandó vegyük a P pontnak a $\frac{\sigma}{2}$ véget Ω-val összekötő egyenesre vonatkozó P' tükörképét. Ez $O\Omega$-ra esik, minthogy az $O_{\frac{\sigma}{2}}$ pontot Ω-val összekötő egyenes másik vége az összeg definíciója értelmében (1. §) $\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}=\sigma$, vagyis a $\sigma\Omega$ egyenes az $O\Omega$ tükörképe a $\frac{\sigma}{2}$ végű előbbi egyenesre vonatkozólag. Mármost az Ω felé irányított $O\Omega$ egyenesen előjellel vett $\overline{OP'}=t$ egyenesdarab a másik adat, amely az előbbi σ véggel együtt nyilván meghatározza a P pontot. Nevezzük e t, σ adatokat a P pont *vegyeskoordinátáinak*. Ezek segélyével meg lehet mutatni, hogy fennáll a következő



15. ábra

TÉTEL. *A hiperbolikus sík pontjai kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban vannak az Ω-tól különböző végekből képezett azon* (x_1, x_2, x_3) *értékrendszerekkel, amelyekre*

(1) $$x_3^2-x_2^2-x_1^2=1$$

és

(2) $$x_3>0.$$

E vonatkozás úgy létesíthető, hogy a vegyeskoordinátákban adott (t,σ) *ponthoz az*

(3) $$\begin{cases} x_1=S(t)+\frac{1}{2}\sigma^2E(-t) \\ x_2=\sigma E(-t) \\ x_3=C(t)+\frac{1}{2}\sigma^2E(-t) \end{cases}$$

értékrendszert rendeljük. A bizonyításban felhasználtatik az egyenlőtlenség fogalma (1. §.).

Nevezzük e (3) alatti x_1, x_2, x_3 végeket a t, σ vegyeskoordinátákkal bíró pont WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátáinak*.* (3)-ból a $t=0$, $\sigma=0$ esetre adódik, hogy *az O pont* WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátái*

(4) $$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=1.$$

Később, a koordináták transzformációjánál (4. §.) fontos szerepet játszik, hogy *bármely két* (x_1, x_2, x_3) *és* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ *pontra*

(5) $$x_3\bar{x}_3-x_2\bar{x}_2-x_1\bar{x}_1>0.$$

* Amint a további tárgyalásból kiderül (5. § (4)), ezek a folytonossági axiómák elfogadása esetén átmennek az ismert WEIERSTRASS-féle koordinátákba.

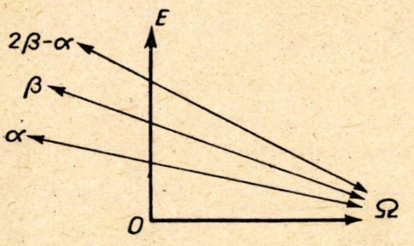
3. §.

Az egyenes egyenlete. Weierstrass-féle homogén vonalkoordináták

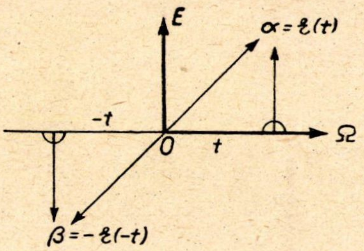
Az egyenes egyenletének előállítását D. HILBERT [13] alábbi két segédtételére lehet alapítani.

1° *segédtétel. Valamely* α *végű* $\alpha\Omega$ *egyenesnek a* β*-végű* $\beta\Omega$ *egyenesre vonatkozó tükörképe a* $2\beta-\alpha$ *véget* Ω*-val összekötő egyenes* (16. ábra).

2° *segédtétel. Az* O *ponton átmenő és* $O\Omega$*-tól különböző egyenes* α, β *végeinek szorzata* $\alpha\beta=-1$ (17. ábra).



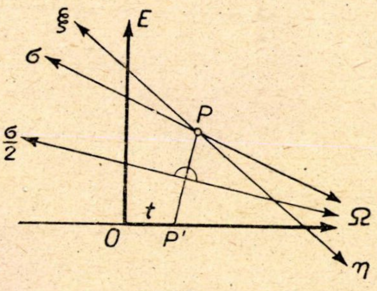
16. ábra



17. ábra

Ez utóbbi abból következik, hogy ha e végek közül a pozitív $\alpha=E(t)$, akkor a másik nyilván $\beta=-E(-t)$. Ezek szorzata valóban $-E(-t)\,E(t)=$ $=-E(0)=-1$.

Tekintsünk először egy az Ω-tól különböző ξ, η végekkel bíró egyenest (18. ábra). Legyen ez egyenes valamely tetszőleges pontja vegyeskoordinátákban $P(t, \sigma)$. Akkor a síkot a $\frac{\sigma}{2}$ véget Ω-val összekötő egyenesre vonatkozólag tükrözve, azután $O\Omega$ mentén $-t$ darabbal eltolva, P az O pontba kerül. Ennélfogva az eredeti $\xi\eta$ egyenes e tükrözés és eltolás útján egy, az O ponton átmenő egyenessé lesz. A ξ, η végek a tükrözésnél az 1° segédtétel értelmében rendre a $\sigma-\xi, \sigma-\eta$ végekbe mennek át, ezek pedig az eltolásnál a szorzat definíciója szerint (1. §. (2), (3), (4)) rendre az $E(-t)\,(\sigma-\xi)$, $E(-t)(\sigma-\eta)$ végekbe jutnak. Minthogy az egyenes most már átmegy az O ponton, e két vég szorzata a 2° segédtétel értelmében (1. §. (2))



18. ábra

(1) $$E(-2t)\,(\sigma-\xi)\,(\sigma-\eta)=-1.$$

Tüstént belátható, hogy viszont, ha valamely (t, σ) pontra (1) fennáll, akkor e pont rajta van a $\xi\eta$ egyenesen. Vagyis (1) *a ξ, η végeket összekötő egyenes egyenlete vegyeskoordinátákban.*

Az (1) egyenletet $E(t)$-vel végigszorozva és a megelőző § (3) alatti képletei alapján az x_1, x_2, x_3 koordinátákra átírva, nyerjük, hogy *a ξ, η végeket összekötő egyenes egyenlete* WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátákban*

$$(\xi\eta-1)x_1+(\xi+\eta)x_2-(\xi\eta+1)x_3=0. \tag{2}$$

Az η végű, $\eta\Omega$ egyenes egyenlete a t, σ vegyeskoordinátákban nyilván $\sigma-\eta=0$. Ezt $E(-t)$-vel végigszorozva és az x_1, x_2, x_3 koordinátákra átírva, adódik, hogy *az η véget Ω-val összekötő egyenes egyenlete* WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátákban*

$$\eta x_1+x_2-\eta x_3=0. \tag{3}$$

A (2) alatti egyenlet az

$$u=\frac{\xi\eta-1}{\xi-\eta}, \quad v=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}, \quad w=\frac{\xi\eta+1}{\xi-\eta} \tag{4}$$

jelölés mellett $(\xi-\eta)$-val való végigosztással az

$$ux_1+vx_2-wx_3=0 \tag{2*}$$

alakot ölti, amelyben

$$u^2+v^2-w^2=1. \tag{5}$$

Nevezzük a (4) alatti u, v, w végeket *a ξ vég felé irányított $\xi\eta$ egyenes* WEIERSTRASS-*féle homogén vonalkoordinátáinak,* (2*)-ot pedig ez egyenes egyenlete *normálalakjának.*

Per definitionem *az η véget Ω-val összekötő és Ω felé irányított egyenes* WEIERSTRASS-*féle homogén vonalkoordinátái*

$$u=\eta, \quad v=1, \quad w=\eta \tag{4*}$$

és (3) ez egyenes egyenletének *normálalakja.* Ellenkező irányításnál a vonalkoordináták (-1)-gyel szorzódjanak s a (-1)-gyel végigszorzott egyenlet neveztessék normálalaknak.

Könnyen meg lehet mutatni, hogy *minden* (2*) *alatti egyenlet, amelyben az u, v, w együtthatókra* (5) *fennáll, valamely irányított egyenes egyenletének normálalakja.*

4. §.

A Weierstrass-féle koordináták transzformációja

Vegyünk fel a végkalkulus értelmezésére szolgáló ΩOE derékszög mellett még valamely $\Omega' O' E'$ derékszöget (19. ábra). Tekintsük a síknak azt a mozgását vagy átfordítását, amely ez $\Omega' O' E'$ derékszöget az ΩOE-ba viszi.

Valamely irányított e egyenesnek az $\Omega' O' E'$ „koordinátarendszerre" vonatkozó WEIERSTRASS-*féle homogén vonalkoordinátái alatt annak az e' irányított egyenesnek az $\Omega O E$ derékszöghöz tartozó végkalkulusban definiált u', v', w' vonalkoordinátáit értjük, amelybe a mondott mozgás vagy átfordítás ez e egyenest irányításával átviszi.*

Hasonlóképp definiáljuk valamely P pontnak az $\Omega' O' E'$ koordinátarendszerre vonatkozó WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátáit.*

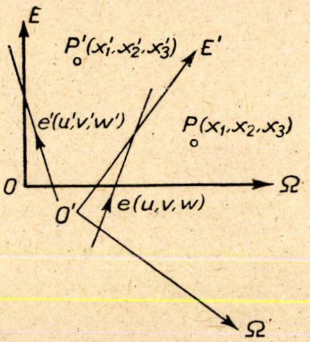
A régi és az új koordináták közötti összefüggés megállapítását először a vonalkoordinátákra intézem el. Mégpedig annak felhasználásával, hogy *a síknak mozgása vagy átfordítása az Ω-tól különböző minden ξ véget*

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$$

végbe visz át ($\gamma \neq 0$ *esetén a* $-\dfrac{\delta}{\gamma}$ *véget Ω-ba, ezt pedig az* $\dfrac{\alpha}{\gamma}$ *végbe), ahol az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ együtthatók csak az új $\Omega' O' E'$ rendszertől függnek és*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

aszerint, amint mozgásról vagy átfordításról van szó [14].



19. ábra

Az eredmény az, hogy *az új vonalkoordináták az eredetiekkel kifejezve*

$$(1)\qquad \begin{cases} u' = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ v' = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ w' = a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases}$$

ahol az a_{jk} együtthatók csak az új rendszertől függnek, közöttük az

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1 \\ -a_{13}^2 - a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases}$$

és

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} = 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0 \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} - a_{33}a_{31} = 0 \end{cases}$$

egyenletek állanak fenn, továbbá ez transzformáció determinánsa

$$(4)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = 1.$$

Ebből azután a 2. § (5) alatti egyenlőtlenségének felhasználásával következik, hogy *valamely pontnak új koordinátái az eredetiekkel kifejezve*

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1' = \pm(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ x_2' = \pm(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ x_3' = \pm(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{cases}$$

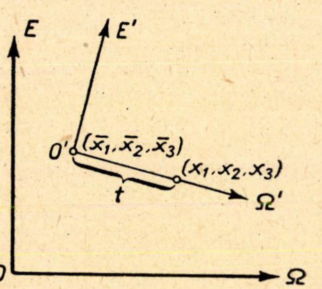
ahol az a_{jk} együtthatók ugyanazok, mint (1) *alatt és a* $+$ *vagy a* $-$ *jel érvényes aszerint, amint a két koordinátarendszer megegyező vagy ellenkező értelmű.*

5. §.

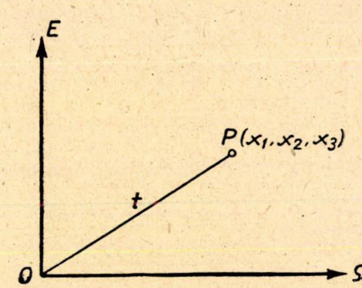
Két pont távolsága. Az $u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2$ kifejezés jelentése. Pontnak egyenestől való távolsága

Az új koordinátarendszer megfelelő választásával (20. ábra) a koordinátatranszformáció képleteiből (4. § (5)) az együtthatók közötti egyenletek alapján (4. § (2), (3)) következik, hogy az eredeti rendszerben *az* (x_1, x_2, x_3) és $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ *pontok t távolságára*

$$(1)\qquad C(t) = x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1 .$$



20. ábra



21. ábra

Ez (1) távolságképlet felderíti az x_3 koordináta egyszerű geometriai jelentését. Nevezetesen második pontnak az O pontot véve (21. ábra), amelynek koordinátái 0, 0, 1 (2. § (4)), az (1) képlet, azt mondja, hogy *a P pont harmadik koordinátája a* $t = \overline{OP}$ *egyenesdarabbal kifejezve*

$$(2)\qquad x_3 = C(t).$$

Hasonlóképp, a vonalkoordináták transzformációjának képleteiből (4. § (1), (2), (3)) az új koordinátarendszer alkalmas választásával rendre kiadódik, hogy

1° *egymást metsző irányított egyenesekre*

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = T(a),$$

ahol a az e_2 egyenes pozitív irányba eső vége e_1-en levő vetületének a két egyenes metszéspontjától számított távolsága előjellel (22. ábra).

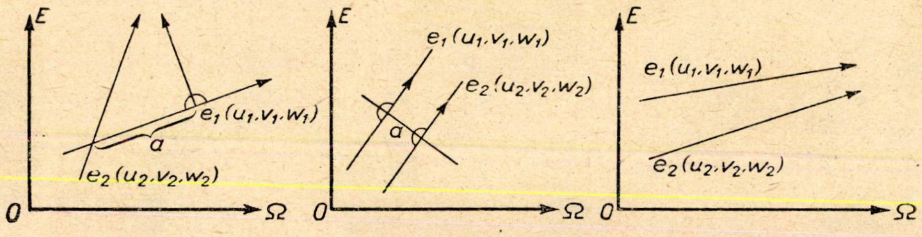
2° *közös merőlegessel bíró és egyenlőképp irányított egyenesekre*

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = C(a),$$

ahol a jelenti a közös merőlegesnek az egyenesek közé eső darabját (23. ábra).

3° *elpattanó és egyenlőképp irányított egyenesekre* (24. ábra)

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = 1.$$



22. *ábra* 23. *ábra* 24. *ábra*

E tételekből a $C(t)$ és $T(t)$ függvények változására tekintettel (1. §) következik, hogy *az egymástól különböző* (u_1, v_1, w_1) *és* (u_2, v_2, w_2) *egyenesek*

1) *akkor és csak akkor metszik egymást, ha*

$$|u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2| < 1,$$

jelesen akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, midőn

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = 0;$$

2) *akkor és csak akkor bírnak közös merőlegessel, ha*

$$|u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2| > 1;$$

3) *akkor és csak akkor elpattanók, ha*

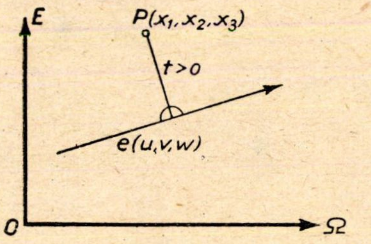
$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = \pm 1.$$

Végül a vonal- és pontkoordinátákra vonatkozó képletekből együttesen, ugyanolyan értelmű új koordinátarendszer alkalmas választásával adódik, hogy *az* (x_1, x_2, x_3) *pontnak az* (u, v, w) *irányított egyenestől való t távolságára*

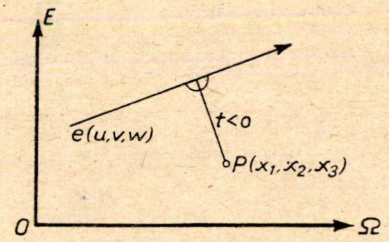
(3) $$u x_1 + v x_2 - w x_3 = S(t),$$

amennyiben t pozitívnak vagy negatívnak vétetik aszerint, amint a pont az egyenesnek a pozitív vagy negatív oldalán van (25. ábra).

E tétel felderíti az x_1 és x_2 koordináták egyszerű geometriai jelentését. Minthogy ugyanis az E vég a végkalkulusban $\xi = 1$ és az OE egyenes másik

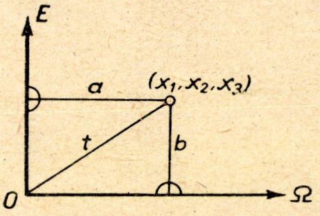


25a. ábra



25b. ábra

vége $\eta = -1$, azért ez egyenes vonalkoordinátái (3. §. (4)) $-1, 0, 0$, tehát az (x_1, x_2, x_3) pontnak (26. ábra) az OE egyenestől való előjeles $-a$ távolságára a fenti tétel szerint $-x_1 = S(-a)$, vagyis $x_1 = S(a)$. Mivel pedig az Ω felé irányított $O\Omega$ egyenes vonalkoordinátái (3. §. (4*)) $0, 1, 0$, az előbbi pontnak ettől való előjeles b távolságára a tétel értelmében $x_2 = S(b)$. Ez eredményt a (2) alattival egyesítve, kimondhatjuk, hogy *ha valamely pont az OE egyenestől a, az $O\Omega$-tól b, az O ponttól pedig t távolságra van és az a távolságot az OE jobboldalán, a b távolságot az $O\Omega$ fölött pozitívnak vesszük s a másik oldalon negatívnak, akkor e pont* WEIERSTRASS-*féle homogén koordinátái az ΩOE derékszöghöz tartozó végkalkulusban*



26. ábra

$$x_1 = S(a), \quad x_2 = S(b), \quad x_3 = C(t). \tag{4}$$

6. §.

A távolságtrigonometria alapképletei

Alkalmazásképp előállítom a derékszögű háromszög *távolságtrigonometriájának* két alapképletét, amelyekből a többi következik.

Helyezzük el a derékszögű háromszöget a 27. ábrán látható módon. A b oldalt tartalmazó egyenes végei $\xi = E(a)$ és $\eta = -E(a)$ s mivel a P pont harmadik koordinátája $x_3 = C(c)$ (5. §. (2)), az egyenes egyenlete szerint (3. §. (2))

$$[-E(2a)-1]\, x_1 + 0 \cdot x_2 - [-E(2a)+1]\, C(c) = 0,$$

honnan (1. §. (2), (9))

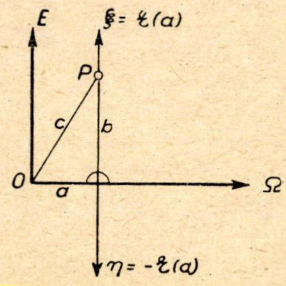
(1) $$x_1 = \frac{E(2a)-1}{E(2a)+1} C(c) = T(a) C(c).$$

De mivel $x_1, x_2 = S(b)$ (5. §. (4)) és $x_3 = C(c)$ WEIERSTRASS-féle homogén koordináták, azért (2. §. (1))

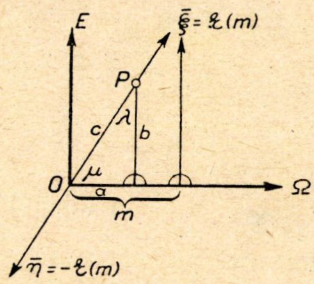
$$C(c)^2 - S(b)^2 - x_1^2 = 1,$$

tehát (1. §. (10))

$$x_1^2 = C(c)^2 - [1 + S(b)^2] = C(c)^2 - C(b)^2.$$



27. ábra



28. ábra

Ezt az előbbivel összevetve, adódik

$$C(c)^2 [1 - T(a)^2] = C(b)^2.$$

Mivel pedig

$$1 - T(a)^2 = \frac{C(a)^2 - S(a)^2}{C(a)^2} = \frac{1}{C(a)^2},$$

nyerjük, hogy *a derékszögű háromszög oldalai között fennáll a*

(I) $$C(c) = C(a)\, C(b)$$

egyenlet (27. ábra).

Ha most a c oldalt tartalmazó egyenes pozitív végéből $O\Omega$-ra merőlegest bocsátunk s a talppont O-tól való távolsága vagyis a b oldallal szemközti μ szöghöz tartozó *elpattanási távolság* az m egyenesdarab (28. ábra), akkor ez egyenes végei $\bar{\xi} = E(m)$ és (4. §. 2° segédtétel) $\bar{\eta} = -E(-m)$. S mivel a P pont második koordinátája $x_2 = S(b)$ (5. §. (4)), az egyenes egyenlete szerint

$$-2x_1 + [E(m) - E(-m)]\, S(b) - 0 \cdot x_3 = 0,$$

honnan

(2) $$x_1 = \frac{E(m) - E(-m)}{2} S(b) = S(m)\, S(b).$$

Minthogy (I) felhasználásával

$$T(a)^2 = 1 - \frac{1}{C(a)^2} = 1 - \frac{C(b)^2}{C(c)^2},$$

(1) és (2) összevetéséből

$$C(c)^2 - C(b)^2 = S(m)^2 S(b)^2.$$

Ez más alakban (1. §. (10))

$$S(c)^2 = S(b)^2 + S(m)^2 S(b)^2,$$

tehát *a derékszögű háromszög átfogója, az egyik befogó és a szemközti szöghöz tartozó elpattanási távolság között, fennáll az*

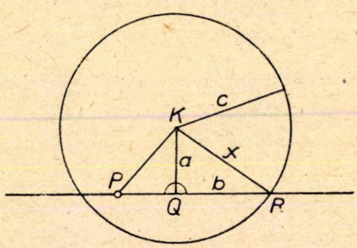
$$\text{(II)} \qquad \frac{S(b)}{S(c)} = \frac{1}{C(m)}$$

egyenlet (28. ábra).

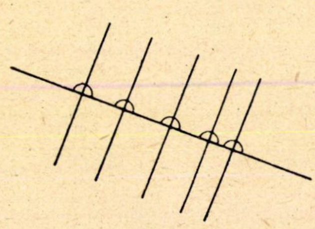
7. §.

A köraxióma bebizonyítása

F. SCHUR [15] jegyezte meg, hogy HILBERT hiperbolikus paralelaxiómájából (1. §. Tét.) következik a *köraxióma,* amely szerint *a kör valamely belső pontján átmenő egyenes metszi a kört.* Míg F. SCHUR bizonyítása a projektív geometriát használja fel, addig itt e tételt a derékszögű háromszög oldalai között fennálló egyenletből dedukálhatom.



29. ábra



30. ábra

Valóban (29. ábra), az egyenesnek a c sugarú kör K középpontjától való távolsága $a = \overline{KQ} \leqq \overline{KP} < c$ a feltevés szerint, tehát (1. §.)

$$\frac{C(c)}{C(a)} > 1.$$

Mivel pedig a $C(t)$ függvény minden 1-nél nagyobb véggel egyenlő lehet (1. §), van olyan b egyenesdarab, amelyre

$$C(b) = \frac{C(c)}{C(a)}.$$

Ez egyenesdarabot Q-ból az egyenesre felrakva, legyen $b = QR$. Akkor a KQR derékszögű háromszög x átfogójára (6. §. (I))

$$C(x) = C(a)\, C(b),$$

tehát az előbbire tekintettel

$$C(x) = C(c).$$

Ebből pedig következik (1. §.), hogy $x = c$, vagyis az egyenes R pontja a körön van.

*

Eddig csak valóságos pont WEIERSTRASS-féle homogén koordinátáiról volt szó. Ha még bevezetjük a végtelen távoli pontoknak, valamint az *ideális pontoknak,* amely utóbbiakat egy-egy közös merőlegessel bíró egyenessereg definiál (30. ábra), a homogén koordinátáit, amint ez a dolgozat második részében megtörténik, akkor ez analitikus előállításból végül leolvasható a hiperbolikus síkgeometriának az ismert KLEIN—HILBERT-féle körmodellel való azonossága, függetlenül a folytonosságtól. Vagyis a dolgozat végén alkalmazásképp megmutatom, miszerint *a fenti axiómákkal jellemzett hiperbolikus síkon euklideszi síkgeometriát értelmezhetünk úgy, hogy a hiperbolikus síkgeometria azonos ebben az euklideszi geometriában konstruált* KLEIN—HILBERT-*féle körmodelljével.* E mesterséges euklideszi síkgeometriáról itt csak annyit, hogy ennek pontjai, az euklideszi sík végtelen távoli pontjait is beleértve, a hiperbolikus síkon vett egyenesseregek, más szóval a hiperbolikus sík valóságos, végtelen távoli és ideális pontjai együttvéve.

A hiperbolikus síkgeometriának a POINCARÉ-féle félsíkkal való azonosságát a folytonosságtól függetlenül KERÉKJÁRTÓ BÉLA [16] bizonyította be. Ez sokkal bonyodalmasabb, mert ekkor a hiperbolikus síkot duplán kell számítanunk, hogy rajta értelmezhessük azt az euklideszi síkgeometriát, amelynek a hiperbolikus sík POINCARÉ-féle félsíkja. Viszont a POINCARÉ-féle félsík és a hiperbolikus síkgeometria puszta ekvivalenciája, ami azonban teljesen elegendő ahhoz, hogy a hiperbolikus síkot a POINCARÉ-féle félsíkon joggal tanulmányozhassuk, már nyilván következik a hiperbolikus síkgeometriának a KLEIN—HILBERT-féle körmodellel való éppen említett azonosságából, a körlapnak a félsíkra való leképezése útján. E puszta ekvivalencia kimutatására más, közvetlen módszert követtem egyik idézett dolgozatomban [17], ugyancsak a HILBERT-féle végkalkulus felhasználásával.

IRODALOM

[1] D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **57** (1903), 137—150, vagy *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), Anhang III. 159—177, vagy pedig BOLYAI JÁNOS, *Appendix*, KÁRTESZI FERENC bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel (Budapest, 1952), 219—232, ahol is függelékképp az idézett dolgozat magyar fordítása található.

[2] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), 160—162.

[3] SZERZŐTŐL, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Hung.*, 4 (1953), 243—250, speciálisan 243, 2 jegyzet

[4] SZERZŐTŐL, A Poincaré-féle félsík és a hiperbolikus síkgeometria kapcsolatáról, *A MTA III. Osztályának Közleményei*, 6 (1956), 163—184, speciálisan 165.

[5] D. HILBERT, loc. cit. [1], 139—140, resp. 162, resp. 221.

[6] D. HILBERT, loc. cit. [1], 140, resp. 163, resp. 222.

[7] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 1, Satz 2., ill. 1. §. 2. tétel.

[8] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 1, Satz 3., ill. 1. §. 3. tétel.

[9] Vö. D. HILBERT, loc. cit. [1], 147, resp. 173, resp. 228.

[10] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 2, 145—146, resp. 170—171. resp. 2. §. 227.

[11] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 3, 147—148, resp. 173, resp. 3. §. 228—229.

[12] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 3, 148, resp. 174, resp. 3. §. 229.

[13] D. HILBERT, loc. cit. [1], § 2, 147, resp. 172, resp. 2. §. 228, továbbá § 3, 148, resp. 174, resp. 3. §. 229.

[14] Vö. H. LIEBMANN, Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **59** (1904), 110—128, speciálisan 118. A bizonyítást illetően lásd SZERZŐTŐL loc. cit. [3], 246—247.

[15] F. SCHUR, Zur Bolyai—Lobatschefskijschen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **59** (1904) 314—320, speciálisan 319—320.

[16] KERÉKJÁRTÓ BÉLA, A hiperbolikus síkgeometria felépítése, *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, **59** (1940), 19—59, vagy UGYANATTÓL, Nouvelle méthode d'édifier la géométrie plane de Bolyai et de Lobatchefski, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **13** (1940), 11—48.

[17] SZERZŐTŐL, loc. cit. [4].