AZ ITERATÍV KÖZELÍTŐMÓDSZEREKRŐL. I. RÉSZ

ZAJTA AURÉL

A számológépes technika rohamos elterjedése folytán az utolsó 10 év alatt mind nagyobb tért hódítanak az iteratív közelítőmódszerek, melyeknek klasszikus példája az általánosan ismert Newton—Raphson-eljárás, továbbá ennek EULERtől származó általánosítása. E közelítőmódszerek elterjedése szükségessé tette elméleti megalapozásukat, azon viszonyok megállapítását, amelyek esetén a módszerek eredményesek, a különböző módszerek kritikai összehasonlítását tekintettel a praktikus használhatóságra, és végül az egyes módszerek formai tanulmányozását.

Az elméleti munka során az első lépést E. BODEWIG és vele egyidőben, de tőle függetlenül D. R. HARTREE tette: csak a BODEWIG munkájában [1] először definiált konvergenciafok, ill. a HARTREE-tól származó konvergencia-rendűség fogalmával lehetett a különféle közelítőeljárásokat egzakt módon összehasonlítani. Ezt követték az orosz GORNSTEINnek [2], majd a magyar KISS IGNÁCnak [3] szisztematikus tanulmányai, majd R. LUDWIG dolgozata [4], mely utóbbi eléggé részletes és összefoglaló, de a tárgyalt képleteket rendszertelenül és elszórtan hozza. Ugyanezen témakörrel foglalkozik a szerzőnek az Acta Technica-ban német nyelven megjelent, két részből álló dolgozata is: *Vizsgálatok a Newton—Raphson-gyökközelítőeljárás általánosításairól.* Jelen dolgozat nem egyszerű fordítása az Acta Technica-ban megjelentnek, de lényegében ugyanazokat az eredményeket tartalmazza. Megváltozott az anyag tárgyalási sorrendje, elmaradtak egyes kézenfekvő mellékszámítások, viszont tüzetesebben megmagyaráztunk olyan részeket, melyeknek fogalmazása az eredetiben homályosnak tünhetett. S végül éppen e nagyfokú átdolgozás miatt a dolgozat címe sem maradhatott a régi.

1. Direkt és iteratív közelítőképletek

Feladatunk az

$$f(x)=0 \tag{1}$$

egyenlet közelítő megoldása. Jelölje ξ az (1) egyenlet egyik gyökét. Amennyiben $f(x)$ racionális egész függvény:

(2) $$f(x) \equiv x^{\nu} - c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} - \cdots + (-1)^{\nu-1} c_{\nu-1} \cdot x + (-1)^{\nu} \cdot c_{\nu},$$

számos képlet megadható, amely a ξ-t jó közelítéssel szolgáltatja:

(3) $$\xi \approx W(c_1, c_2, \ldots c_{\nu}).$$

A (3) típusú képleteket direkt vagy ismétlés nélküli közelítőképleteknek nevezzük. A Bernoulli- és a Gräffe-féle közelítőmódszerek végső elemzésben ilyen közelítőképletek alkalmazásán alapszanak.

A (3) típusú képletektől megkövetelhetünk egy bizonyos „kovariancia"-tulajdonságot: ha a (2) függvény együtthatói (c_k) helyett a

$$\lambda^{\nu} \cdot f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

függvény eggyütthatóival ($\lambda^k \cdot c_k$) végezzük a számításokat, az eredeti érték helyett annak λ-szorosát kell kapnunk:

(4) $$W(\lambda c_1, \lambda^2 c_2, \ldots \lambda^{\nu} c_{\nu}) = \lambda \cdot W(c_1, c_2, \ldots c_{\nu}).$$

A következőkben megadunk egy módszert, amelynek segítségével tetszőleges direkt közelítőképletet iteratív közelítőképletté alakíthatunk. Jelöljön a egy olyan egyébként tetszőleges konstansot, melyre $f(a) \neq 0$. A jelölések tekintetében egyszer s mindenkorra állapodjunk meg abban, hogy minden függvény argumentuma nélkül írt betűjelén az $x = a$ helyen vett értéke értendő. Tehát pl.:

$$f = f(a), \qquad f^{(n)} = f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right)_{x=a}.$$

Ezek után képezzük az

(5) $$\frac{x^{\nu}}{f(a)} \cdot f\left(a - \frac{1}{x}\right) = x^{\nu} - \frac{f'}{f} \cdot x^{\nu-1} + \frac{1}{2!}\frac{f''}{f} \cdot x^{\nu-2} - \cdots + \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{f^{(\nu)}}{f}$$

polinomot, melynek egyik zérushelye nyilván

(6) $$\eta = \frac{1}{a - \xi}.$$

A (3) képletet most az η közelítésére használjuk fel

$$\eta \approx W\left(\frac{f'}{f}, \frac{1}{2!}\frac{f''}{f}, \ldots, \frac{1}{\nu!}\frac{f^{(\nu)}}{f}\right),$$

s innét a ξ-t a (6) alapján nyerhetjük:

$$\xi = a - \frac{1}{\eta} \approx a - \frac{1}{W\left(\frac{f'}{f}, \frac{1}{2!}\frac{f''}{f}, \ldots \frac{1}{\nu!}\frac{f^{(\nu)}}{f}\right)},$$

vagy a (4) figyelembevételével

$$\xi \approx a - \frac{f}{W\left(f', \frac{1}{2!}ff'', \cdots \frac{1}{\nu!}f^{\nu-1}f^{(\nu)}\right)} = a - \frac{f(a)}{W(a)}. \tag{7}$$

A nyert (7) képlet iteratív jellege azonnal kitűnik a következő írásmódból:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{W(x_n)}.$$

Az iteratív képleteknek számos előnyük van a direktekkel szemben, amelyek közül itt csak egyre mutatunk rá. Amíg a (3)-ban az $f(x)$ polinom együtthatói szerepeltek, a (7)-nél az $f(x)$-nek és deriváltjainak bizonyos $x=a$ helyen vett értékei fordulnak elő, tehát míg a (3) csak racionális egész függvények zérushelyeinek közelítésére volt alkalmas, a (7)-t felhasználhatjuk nem algebrai egyenletek megoldására is, feltéve természetesen, hogy az eljárás konvergens.

2. A Bernoulli- és Gräffe-féle képletek átalakítása iteratív közelítőképletekké

Mint ismeretes, ezek a közelítőképletek az

$$s_n = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k^n$$

gyökhatványösszegeket használják fel, melyek kifejezhetők a c_k együtthatók függvényeiként:

$$\begin{cases} s_1 = c_1, \\ s_2 = c_1^2 - 2c_2, \\ s_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3, \quad \text{stb.,} \end{cases} \tag{8}$$

másrészt tagjai egy rekurziós sorozatnak, ahol a képzési szabály:

$$s_n = c_1 s_{n-1} - c_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} c_{n-1} s_1 + (-1)^{n-1} \cdot n c_n, \qquad (n \leqq \nu) \tag{9a}$$

ill.

$$s_n = c_1 s_{n-1} - c_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^{\nu-2} c_{\nu-1} s_{n-\nu+1} + (-1)^{\nu-1} c_\nu s_{n-\nu}, \qquad (n > \nu). \tag{9b}$$

A (8) alatti formulák még NEWTONtól származnak és Newton-féle formulák néven ismeretesek. Determinánsalakjuk a (9)-es képletekből egyszerű módon képezhető. Amennyiben végrehajtjuk bennük a

$$c_k \to \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}}{f} \tag{10}$$

helyettesítést, az $\frac{1}{f^n}$ kiemelése után az f-nek és deriváltjainak egész polinomjait nyerjük:

$$s_n \to \frac{1}{f^n} \cdot N_n(f), \tag{11}$$

melyeket Newton-féle polinomoknak nevezünk el és melyeket a rövidség kedvéért $N_n(f)$-fel vagy N_n-nel jelölünk.

A Newton-polinomok a (9) alapján a következő rekurziós képletet elégítik ki:

$$N_n = f' \cdot N_{n-1} - \frac{1}{2!} f f'' \cdot N_{n-2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} f^{n-2} f^{(n-1)} \cdot N_1 + \tag{12}$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1} f^{(n)}$$

(Az $n \leqq \nu$ megszorítás itt felesleges, mivel ν-ed fokú polinomok esetében a deriváltak amúgy is zérussá válnak, ha $n > \nu$). Explicit alakjuk néhány alacsonyabb indexre (vö. (8)):

$$N_1 = f',$$

$$N_2 = f'^2 - f f'',$$

$$N_3 = f'^3 - \frac{3}{2} f f' f'' + \frac{1}{2} f^2 f'''.$$

Mindezek után nézzük magukat a közelítőképleteket. A Bernoulli-módszer alapja a

$$\xi \approx \frac{s_{n+1}}{s_n}, \tag{13}$$

a Gräffe-módszeré pedig a

$$\xi \approx \sqrt[n]{s_n} \tag{14}$$

képlet alkalmazása, lehetőleg nagy n értékekre, ami a Gräffe-módszerrel könnyen elérhető $n = 2^k$ esetben. Az 1. fejezetben vázolt módszerrel a (13) képlet a

$$\xi \approx a - \frac{N_n}{N_{n+1}} \cdot f = \beta_{n+1}(a), \tag{15}$$

a (14) képlet pedig a

$$\xi \approx a - \frac{f}{\sqrt[n]{N_n}} = \gamma_{n+1}(a) \tag{16}$$

közelítőképletté alakul át. A (15)-öt „iteratív Bernoulli-képlet“-nek, a (16)-ot pedig „iteratív Gräffe-képlet“-nek nevezzük el.

Ismeretes a Bernoulli-módszernek egy olyan módositása is, melynél az s_n gyökhatványösszegek helyett más — alkalmasan választott — $s'_1, s'_2, \ldots s'_\nu$

kiindulási értékekkel képezzük a rekurziós sorozat további tagjait a (9b) képlet szerint. Ilyen alkalmas választásként kínálkozik például az a módszer, melynél az első ν darab s'_n értéket a (9a) helyett a következő rekurziós képlettel határozzuk meg:

$$(17) \qquad s'_n = c_1 s'_{n-1} - c_2 s'_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} c_{n-1} s'_1 + (-1)^{n-1} \cdot c_n .$$

A (17) képlet a c_k együtthatóknak újabb kifejezéseit definiálja, melyek közül néhány alacsonyabb indexűt ide írunk:

$$(18) \qquad \begin{aligned} s'_1 &= c_1, \\ s'_2 &= c_1^2 - c_2, \\ s'_3 &= c_1^3 - 2c_1c_2 + c_3, \text{ stb.} \end{aligned}$$

A (10) helyettesítéssel ezek is az f és deriváltjainak polinomjaivá alakulnak:

$$s'_n \to \frac{1}{f^n} \cdot K_n(f).$$

Az ily módon definiált és $K_n(f)$-fel, vagy röviden K_n-nel jelölt polinomok explicit alakja a kezdeti indexekre:

$$\begin{aligned} K_1 &= f', \\ K_2 &= f'^2 - \frac{1}{2} ff'', \\ K_3 &= f'^3 - ff'f'' + \frac{1}{6} f^2 f'''. \end{aligned}$$

A K_n polinomok másik definícióját a (17) rekurziós képletből közvetlenül is megkaphatjuk:

$$(20) \qquad K_n = f' \cdot K_{n-1} - \frac{1}{2!} ff'' \cdot K_{n-2} + \frac{1}{3!} f^2 f''' \cdot K_{n-3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} f^{n-1} f^{(n)}}{n}.$$

A (17) definícióval nyert s'_n értékek a következő Bernoulli-közelítést szolgáltatják:

$$(21) \qquad \xi \approx \frac{s'_{n+1}}{s'_n},$$

melynek iteratív átírása, a (19)-re való tekintettel:

$$\xi \approx a - \frac{K_n}{K_{n+1}} \cdot f.$$

Az n indexet egységnyivel csökkentve, a nyert képletet $\varkappa_{n+1}$-gyel fogjuk jelölni:

$$(22) \qquad \varkappa_{n+1}(a) = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f,$$

és a későbbiek során megmutatjuk, hogy azonos egyrészt a Gornstein módszerével [2] *nyerhető képletekkel, másrészt a Kiss-féle módszerrel kiszámított és Kiss által közölt képletekkel* [3]. Ezzel szemben sem a (15), sem a (16) képletsorozat az irodalomban — a szerző tudomása szerint — még nem bukkant fel, így tehát ezek újaknak tekinthetők.

Mindezen képletsorozatok tulajdonságainak megállapításához szükségünk van a bennük szereplő polinomok (N_n és K_n) tanulmányozására; a soron következő fejezetek ezzel a feladattal foglalkoznak.

3. Az $N_n(f)$ és $K_n(f)$ polinomok tulajdonságai

A (10) és (11) következtében racionális egész $f(x)$-ek esetében az

$$\frac{1}{f^n} \cdot N_n(f)$$

törtek úgy tekinthetők, mint az

$$f\left(a-\frac{1}{x}\right)=0$$

egyenlet gyökeiből képezett n-ik hatványösszegek:

$$\frac{1}{f^n} \cdot N_n(f)=\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{(a-\xi_k)^n}.$$

A jobboldal azonban nem egyéb, mint

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)};$$

és így

$$N_n(f)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f^n \cdot \left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)}. \tag{23}$$

Tekintsük a (12)-t az $N_n(f)$ polinomok definíciójának abban az esetben, ha $f(x)$ nem racionális egész függvény. Nem nehéz belátni, hogy (23) pusztán (12)-ből is közvetlenül levezethető, tehát akkor is érvényes marad, ha $f(x)$ nem racionális egész függvény. *Fordítva* is (23)-ból mint értelmezésből kiindulva, azonnal előttünk áll a (12) rekurziós formula, ha az

$$\frac{f'}{f} \cdot f=f'$$

identitás mindkét oldalát, a baloldalt a Leibniz-szabály alkalmazásával, $(n-1)$-szer differenciáljuk.

Minthogy (23) így is írható:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{f^n}\cdot\frac{N_n(f)}{n}=\frac{1}{n!}\cdot(\log f)^{(n)}, \tag{23'}$$

analitikus függvények esetében érvényes az alábbi sorfejtés:

$$\log\frac{f(a)}{f(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot N_n(f)\cdot\alpha^n; \tag{24}$$

ahol

$$\alpha=\frac{a-x}{f(a)}. \tag{25}$$

A Newton-polinomok a (12)-n kívül még egy más típusú rekurziós formulát is kielégítenek:

$$N_n(f)=f'\cdot N_{n-1}(f)-\frac{f}{n-1}\cdot N'_{n-1}(f), \tag{26}$$

mely úgy vezethető le, hogy a (23) képletet egy egységgel kisebb indexre írjuk fel, differenciáljuk, majd összevetjük a (23)-mal.

Mivel (24) szerint az $N_n(f)$ polinomok a $\log\frac{f(a)}{f(x)}$ függvény $x=a$ körüli hatványsorának együtthatóival szoros összefüggésben állnak, várható, hogy az — általában a (20) rekurzív formulával értelmezett — $K_n(f)$ polinomok is valami hasonló összefüggésben állanak az $f(x)$ függvénnyel. Megalkotjuk az

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}K_n(f)\cdot\alpha^n$$

sort és kísérletet teszünk összegének megállapítására, feltételezve ismét, hogy $f(x)$ analitikus. Szorozzuk meg próbaképpen az $f(x)$ Taylor-sorával:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}\cdot(x-a)^n=f(a)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{n-1}\cdot f^{(n)}\cdot\alpha^n.$$

A (20) következtében valamennyi α-hatványegyüttható eltűnik, az $\alpha^0=1$ együtthatójának kivételével, s innét nyilvánvaló, hogy

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}K_n(f)\cdot\alpha^n=\frac{f(a)}{f(x)}. \tag{27}$$

A (27) sorfejtésből azonnal leolvasható, hogy

$$K_n(f)=\frac{(-1)^n}{n!}f^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}, \tag{28}$$

mely megfelel a (23)-nak. Felhasználva a Leibniz-szabályt az

$$\frac{1}{f} \cdot f = 1$$

identitás n-szeres differenciálására, a (28)-ból, mint definícióból kiindulva, visszanyerhetjük a (20) rekurziós formulát. A (26)-hoz hasonlóan azonban itt is levezethetünk egy más típusú rekurziós összefüggést:

$$K_n(f) = f' \cdot K_{n-1}(f) - \frac{f}{n} \cdot K'_{n-1}(f), \tag{29}$$

amely, mint látható, a (26)-tól csak csekély mértékben különbözik. Végül a (23) és (28) összehasonlításából származik az alábbi érdekes és a későbbiekben fontos formula:

$$N_n(f) = (f')^n \cdot K_{n-1}\left(\frac{f}{f'}\right). \tag{30}$$

Az N_n és K_n polinomok között már eddig is megmutatkozó analógia arra enged következtetni, hogy létezik egy sokkal általánosabb polinomsorozat, melynek az N_n és K_n polinomok speciális eseteit képezik. Mindezzel a 4. fejezetben foglalkozunk.

4. A $C_{nm}(f)$ polinomok

A $C_{nm}(f)$ polinomokat a következőképp definiáljuk:

$$C_{nm}(f) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n)} \cdot f^{n+m}, \tag{31}$$

ahol n tetszőleges nem negatív egész, m tetszőleges valós szám. E definícióból következik, hogy amennyiben $f(x)$ analitikus, érvényes a következő sorfejtés:

$$\left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nm} \cdot \alpha^n, \qquad \left(\alpha = \frac{a-x}{f(a)}\right). \tag{32}$$

A (28)-ból és (31)-ből közvetlenül adódik, hogy

$$C_{n1}(f) = K_n, \tag{33}$$

másrészt a (24)-ből és (32)-ből következik, ha tekintetbe vesszük az ismert

$$\lim_{m \to 0} \frac{\left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^m - 1}{m} = \log \frac{f(a)}{f(x)}$$

összefüggést, hogy

$$\lim_{m \to 0} \frac{C_{nm}(f)}{m} = \frac{1}{n} \cdot N_n(f). \tag{34}$$

A C_{nm} polinomok két rekurziós összefüggése:

$$C_{nm} = \frac{n-1+m}{n} f' \cdot C_{(n-1)m} - \frac{f}{n} \cdot C'_{(n-1)m}, \tag{35}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (n-k+km) \cdot C_{(n-k)m} \cdot \frac{f^{(k)}}{k!} f^{k-1} = 0. \tag{36}$$

Az első a (31)-ből adódik a (26) levezetésével azonos módon, a másodikat pedig úgy kapjuk, hogy az

$$\left(\frac{1}{f^m}\right)' \cdot f + m \cdot \frac{1}{f^m} \cdot f' = 0$$

azonosság mindkét tagját a Leibniz-szabállyal $(n-1)$-szer differenciáljuk és az egyszerűsítések és összevonások után alkalmazzuk a (31) definíciót.

Helyettesítsünk a (32)-ben mindenütt f helyébe f^ν-t és az így kapott

$$\left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^{m\nu}$$

függvényre alkalmazzuk ismét a (32) sorfejtést; a két sor összehasonlításából nyerjük az alábbi összefüggést:

$$C_{nm}(f^\nu) = f^{(\nu-1)n} \cdot C_{n(m\nu)}(f). \tag{37}$$

Ennek fontos alesetét képezi a (33) figyelembevételével nyerhető szabály:

$$K_n(f^m) = f^{(m-1)n} \cdot C_{nm}(f). \tag{38}$$

A C_{nm}-polinomok numerikus kiszámítására bármelyik összefüggésük felhasználható. Értékük néhány alacsonyabb index esetében:

$$\left\{\begin{aligned}
C_{0m} &= 1,\\
C_{1m} &= mf',\\
C_{2m} &= \frac{1}{2} m(m+1) f'^2 - \frac{1}{2} mff'',\\
C_{3m} &= \frac{1}{6} m(m+1)(m+2) f'^3 - \frac{1}{2} m(m+1) ff'f'' + \frac{1}{6} mf^2 f''',\\
C_{4m} &= \frac{1}{24} m(m+1)(m+2)(m+3) f'^4 - \frac{1}{4} m(m+1)(m+2) ff'^2 f'' +\\
&\quad + \frac{1}{6} m(m+1) f^2 f' f''' + \frac{1}{8} m(m+1) f^2 f''^2 - \frac{1}{24} mf^3 f''''.
\end{aligned}\right. \tag{39}$$

Tetszőleges n indexre kiszámított általános alakjukat a következő fejezetben fogjuk levezetni.

5. A $C_{nm}(f)$ polinomok explicit alakja

Mielőtt a levezetéshez hozzákezdenénk, két megjegyzést kell tennünk:

1. A Newton-polinomokhoz hasonlóan a K_n- és a C_{nm}-polinomok is megadhatók determináns alakban, s ezek könnyen előállíthatók a (12), (20), ill. (36) rekurziós képletekből. A C_{nm} és a rokon polinomok determinánselméletével azonban külön dolgozat keretében kívánunk foglalkozni, egyrészt, mert ez az elmélet önmagában is zárt és terjedelmes, másrészt, mert nem illeszkedik szorosan a közelítőformulák elméletéhez.

2. A levezetendő explicit alakot egyszerűség kedvéért azzal a feltételezéssel vezetjük le, hogy $f(x)$ analitikus.

Az

$$\frac{f(x)}{f(a)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{f^{(k)}}{k!}\,f^{k-1}\cdot a^k$$

végtelen sort emeljük m-ik hatványra a polinomiális tétel szerint:

$$\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}ki_k}\cdot\frac{m!}{\left(m-\sum\limits_{1}^{n}i_k\right)!\,\prod\limits_{k=1}^{n}i_k!}\cdot f^{\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)i_k}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k)}}{k!}\right)^{i_k}\right]\cdot a^n.$$

A szögletes zárójelen belül az összegezést az összes olyan nem negatív i_k egész számokra kell elvégezni, melyek a

$$(40)\qquad \sum_{k=1}^{n}ki_k=n$$

feltételt kielégítik. Ha alkalmazzuk az

$$(41)\qquad i_0=\sum_{k=2}^{n}(k-1)i_k$$

rövidítést, akkor ebből és a (40)-ből

$$(42)\qquad \sum_{k=0}^{n}i_k=n$$

következik. A (40) és (41) figyelembevételével számításunk így alakul tovább:

$$\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum(-1)^n\cdot\frac{m!}{(m-n+i_0)!\,\prod\limits_{k=1}^{n}i_k!\,\prod\limits_{k=1}^{n}(k!)^{i_k}}\cdot\prod_{k=0}^{n}(f^{(k)})^{i_k}\right]\cdot a^n.$$

Ha most m helyébe $(-m)$-et helyettesítünk és az így nyert sort összevetjük a (32)-vel, eredményünk:

$$C_{nm}(f)=\sum(-1)^{n}\cdot\frac{(-m)!}{(-m-n+i_0)!\prod_{k=1}^{n}i_k!\prod_{k=1}^{n}(k!)^{i_k}}\cdot\prod_{k=0}^{n}(f^{(k)})^{i_k}, \tag{43}$$

ahol az összegezést az összes nem negatív i_k egész számokra kell kiterjeszteni, a (40) és (42) megszorítások tekintetbe vételével.

A (43) alatti előállításban szereplő

$$\frac{(-m)!}{(-m-n+i_0)!} \tag{44}$$

tényező a $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alakot veszi fel, ha $(-m)$ negatív egész, mivel a faktoriális függvénynek negatív egész számú helyeken elsőrendű pólusa van. Ilyen esetekben a faktoriálisokkal való (44) jelölés célszerűtlen, mivel a (44) semmi egyebet nem akar kifejezni, mint rövidített írásmódját a

$$\prod_{k=0}^{n-i_0-1}(-m-k)$$

szorzatnak. Ez a szorzat azonban másképp is kifejezhető faktoriálisokkal:

$$\prod_{k=0}^{n-i_0-1}(-m-k)=(-1)^{n-i_0}\cdot\prod_{k=0}^{n-i_0-1}(m+k)=(-1)^{n-i_0}\cdot\frac{(m+n-i_0-1)!}{(m-1)!},$$

s ennek megfelelően a C_{nm}-polinomok második explicit alakja:

$$C_{nm}(f)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\sum(-1)^{i_0}\cdot\frac{(n+m-i_0-1)!}{\prod_{k=1}^{n}i_k!\prod_{k=1}^{n}(k!)^{i_k}}\cdot\prod_{k=0}^{n}(f^{k})^{i_k} \tag{45}$$

A (45)-ből most már könnyen kapjuk a (33), ill. (34) alapján a K_n és az N_n polinomok explicit alakját is:

$$K_n(f)=\sum(-1)^{i_0}\cdot\frac{(n-i_0)!}{\prod_{k=1}^{n}i_k!\prod_{k=1}^{n}(k!)^{i_k}}\cdot\prod_{k=0}^{n}(f^{(k)})^{i_k},$$

$$N_n(f)=n\cdot\sum(-1)^{i_0}\cdot\frac{(n-i_0-1)!}{\prod_{k=1}^{n}i_k!\prod_{k=1}^{n}(k!)^{i_k}}\cdot\prod_{k=0}^{n}(f^{(k)})^{i_k}.$$

6. A közelítőformulák hibái

Jelen fejezet célja az iteratív Bernoulli- (15) és Gräffe- (16) képletek, továbbá a Kiss—Gornstein-közelítések (22) hibaképleteinek felállítása. Mindezekre a konvergenciafok megállapítása végett van szükségünk. Ha ugyanis adott

$$x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

közelítőformulával definiált ... $x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots$ értéksorozat meghatározott véges ξ felé konvergál, a Bodewig-féle definíció [1] értelmében akkor nevezzük a $\Phi(x)$ közelítőformulát k-ad fokban konvergensnek, ha a

$$d_{n+1} = x_{n+1} - \xi$$

különbség

$$d_n = x_n - \xi$$

hatványai szerint sorba fejtve, a sor a k-ad fokú taggal kezdődik:

(46)
$$d_{n+1} = \Phi(x_n) - \xi = c_0 \cdot d_n^k + c_1 \cdot d_n^{k+1} + \cdots$$

A (46)-ot a $\Phi(x)$ hibaképletének nevezzük. A következőkben x_n helyett a-t írunk, s ennek megfelelően d_n helyett d-t. Tehát

$$d = a - \xi,$$

és

(46′)
$$\Phi(a) - \xi = \Phi - \xi = c_0 \cdot d^k + c_1 \cdot d^{k+1} + \cdots$$

A d hatványai szerinti sorfejtések céljából szükségünk van a (15), (16), (22) képletekben szereplő polinomok d hatványai szerinti kifejtésére, tehát előbb ezeket kell levezetnünk.

Általános esetben a ξ tetszőleges multiplicitású zérushelye az $f(x)$-nek; mivel azonban a többszörös gyökök esetével külön foglalkozunk a 7. fejezetben, most feltesszük, hogy ξ csak egyszeres gyök, azaz

(47)
$$f(x) = (x - \xi) \cdot g(x),$$

ahol

$$g(\xi) \neq 0.$$

Ha a (47) logaritmusát n-szer differenciáljuk, a (23′) tekintetbevételével eredményünk az egyszerűsítések elvégzése után:

(48)
$$N_n(f) = \bar{N}_n(g) \cdot d^n + g^n, \qquad (n > 0);$$

ha pedig a (47)-ből következő

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x - \xi} \cdot \frac{1}{g(x)}$$

egyenlőséget differenciáljuk n-szer a Leibniz-szabály szerint:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{(-1)^k \cdot k!}{(a-\xi)^{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{g}\right)^{(n-k)},$$

és a nyert összefüggésnél a (28) alapján helyettesítünk és egyszerűsítünk, eredményünk:

$$K_n(f) = \sum_{k=0}^{n} K_{n-k}(g)\cdot g^k \cdot d^{n-k}, \tag{49}$$

ahonnét egyszerűen következik a későbbiekben felhasználandó

$$K_n(f) - g\cdot K_{n-1}(f) = K_n(g)\cdot d^n \tag{50}$$

összefüggés.

A három ismertetett képletsorozat hibaképletei ezek után már kevés számítással adódnak:

$$\beta_{n+1} - \xi = a - \xi - \frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)}\cdot f = \frac{d}{N_{n+1}(f)}[N_{n+1}(f) - g\cdot N_n(f)] =$$

$$= \frac{N_{n+1}(g)\cdot d - g\cdot N_n(g)}{N_{n+1}(f)}\cdot d^{n+1}, \qquad (n > 0), \tag{51}$$

$$\gamma_{n+1} - \xi = a - \xi - \frac{f}{\sqrt[n]{N_n(f)}} = d - gd\cdot[g^n + N_n(g)\cdot d^n]^{-\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{N_n(g)\cdot d^{n+1}}{g^n} - \binom{-\frac{1}{n}}{2}\cdot\frac{N_n(g)^2\cdot d^{2n+1}}{g^{2n}} - \dots, \tag{52}$$

$$\varkappa_{n+1} - \xi = a - \xi - \frac{K_{n-1}(f)}{K_n(f)}\cdot f = \frac{d}{K_n(f)}\cdot[K_n(f) - g\cdot K_{n-1}(f)] =$$

$$= \frac{K_n(g)}{K_n(f)}\cdot d^{n+1}. \tag{53}$$

Az (51) és (52) levezetésénél a (48), az (53) levezetésénél az (50) felbontást használtuk fel. Minthogy a (48) csak $n > 0$ esetben érvényes, az (51) is ekkor érvényes. A Bernoulli-közelítésnek 1-es indexű esetétől eltekintve megállapíthatjuk tehát, hogy az ismertetett közelítőképletek konvergenciafoka megegyezik indexükkel. (Az indexek megválasztása éppen akképp történt, hogy az indexek egyszersmind a konvergenciafokot is kifejezzék.)

Az 1-es indexű Bernoulli-képlet

$$\beta_1(a) = a - \frac{f}{f'}$$

konvergenciafoka 2; ez a képlet azonos a Newton—Raphson-formulával, és közös tagja mindhárom képletsorozatnak:

$$\beta_1(a) = \gamma_2(a) = \varkappa_2(a).$$

7. A többszörös gyökök esete

Az előbbi fejezetben azzal a feltételezéssel vezettük le a hibaképleteket hogy a közelítendő gyök egyszeres. Többszörös gyökök esetén, vagyis amikor az

(54) $$f(x)=(x-\xi)^p\cdot g(x), \qquad (p>1)$$

ill.

$$f=d^p\cdot g$$

felbontások érvényesek, a (48) helyébe az

(55) $$N_n(f)=[N_n(g)\cdot d^n+pg^n]\cdot d^{n(p-1)} \qquad (n>0)$$

összefüggés, az (50) helyébe pedig a

(56) $$K_n(f)-K_{n-1}(f)\cdot gd^{p-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k-2}{k}\cdot K_{n-k}(g)\cdot g^k\cdot d^{np-k}$$

összefüggés lép. Ha ezekből kiindulva vezetjük le a hibaképleteket, azokból azonnal leolvashatjuk, hogy a három képletsorozat közül egyedül az iteratív Bernoulli-eljárás szolgáltat az indexszel megegyező konvergenciafokú közelítést:

$$\beta_{n+1}-\xi=a-\xi-\frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)}\cdot f=\frac{d}{N_{n+1}(f)}\cdot[N_{n+1}(f)-g\cdot d^{p-1}\cdot N_n(f)]=$$

$$=\frac{d\cdot d^{(n+1)(p-1)}}{N_{n+1}(f)}\cdot[N_{n+1}(g)\cdot d^{n+1}-g\cdot d^n\cdot N_n(g)],$$

azaz

(57) $$\beta_{n+1}-\xi=\frac{N_{n+1}(g)\cdot d-g\cdot N_n(g)}{N_{n+1}(g)\cdot d^{n+1}+p\cdot g^{n+1}}\cdot d^{n+1}, \qquad (n>0),$$

míg az iteratív Gräffe-, továbbá a Kiss—Gornstein-képletek csupán elsőfokú konvergenciára vezetnek.

A Bernoulli-képletnek ez a különleges sajátsága világossá válik, ha észrevesszük, hogy a Bernoulli-képlet a Kiss—Gornstein-féléből (22) úgy származtatható, hogy benne az f helyébe mindenütt $\frac{f}{f'}$-t helyettesítünk. A (30) felhasználásával ugyanis

$$a-\frac{K_{n-1}\left(\frac{f}{f'}\right)}{K_n\left(\frac{f}{f'}\right)}\frac{f}{f'}=a-\frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)}\cdot f=\beta_{n+1}(a),$$

és $\frac{f(x)}{f'(x)}$ éppen az a függvény, mely az $f(x)$ valamennyi gyökét csupán első hatványon tartalmazza.

Bár az iteratív Gräffe- és a Kiss—Gornstein-eljárások többszörös gyökök esetében csak egyszeres konvergenciafokot eredményeznek, a képleteknek megfelelő átalakításával elérhetjük, hogy a konvergenciafokok az indexekkel kifejezett érték maradjon. Ez az átalakítás abban áll, hogy a képletekben az f helyébe mindenütt a

$$\sqrt[p]{f}=f^{m} \quad \left(m=\frac{1}{p}\right)$$

függvényt helyettesítjük, hiszen ha ξ az $f(x)$-nek p-szeres zérushelye, a $\sqrt[p]{f(x)}$-nek már csak egyszeres zérushelyét képezi. Az

$$f\to f^{m} \tag{58}$$

helyettesítés a Kiss—Gornstein-képleteknél a következő átalakításhoz vezet (vö. (38)):

$$\varkappa_{n+1,p}=a-\frac{K_{n-1}(f^{m})}{K_n(f^{m})}\cdot f^{m}=a-\frac{C_{(n-1)m}(f)}{C_{nm}(f)}\cdot f. \tag{59}$$

Ennek speciális esetei néhány alacsonyabb indexre, a (39) felhasználásával:

$$\varkappa_{2,p}=a-\frac{pf}{f'},$$

$$\varkappa_{3,p}=a-\frac{2pff'}{(p+1)f'^2-pff''},$$

$$\varkappa_{4,p}=a-\frac{3p(p+1)f'^2-3p^2ff''}{(2p+1)(p+1)f'^3-3p(p+1)ff'f''+p^2f^2f'''}\cdot f.$$

Az iteratív Gräffe-képletek megfelelő átalakításához szükségünk van a következő összefüggésre:

$$N_n(f^{m})=m\cdot f^{(m-1)n}\cdot N_n(f). \tag{60}$$

Ezt a (34) és (37) együttes alkalmazásával vezethetjük le a legegyszerűbben. A (60)-at felhasználva most már:

$$\gamma_{n+1,p}=a-\frac{f^{m}}{\sqrt[n]{N_n(f^{m})}}=a-\frac{f}{\sqrt[n]{mN_n(f)}}=a-\frac{\sqrt[n]{p}f}{\sqrt[n]{N_n(f)}}. \tag{61}$$

Ugyancsak a (60) felhasználásával mutathatjuk ki, hogy az iteratív Bernoulli-képlet invariáns az (58) helyettesítéssel szemben:

$$\beta_{n,p}=a-\frac{N_{n-1}(f^{m})}{N_n(f^{m})}\cdot f^{m}=a-\frac{N_{n-1}(f)}{N_n(f)}\cdot f=\beta_n.$$

A p-szeres gyökökre módosított (61) közelítés hibaképletét az (55) felbontással nyerhetjük:

$$
(62)\qquad \begin{aligned}
\gamma_{n+1,p}-\xi &= a-\xi-\frac{\sqrt[n]{p}\cdot f}{\sqrt[n]{N_n(f)}} = d-\sqrt[n]{p}\cdot g d\cdot[pg^n+N_n(g)\cdot d^n]^{-\frac{1}{n}} = \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{N_n(g)\cdot d^{n+1}}{p\cdot g^n}-\binom{-\frac{1}{n}}{2}\cdot\frac{N_n(g)^2\cdot d^{2n+1}}{p^2\cdot g^{2n}}-\cdots
\end{aligned}
$$

Az (59) hibaképletének levezetése céljából szükségünk van a $C_{nm}(f)$ polinomok d hatványok szerinti sorfejtésére:

$$
(63)\qquad C_{nm}(f)=\sum_{k=0}^{n} C_{km}(g)\cdot g^{n-k}\cdot d^{np-n+k}.
$$

Ezt az összefüggést az (54) feltételezésből hasonló módon nyerjük, mint a (47)-ből kiindulva a (49)-et. A (63)-nak egyszerű következménye a

$$
C_{nm}(f)-C_{(n-1)m}(f)\cdot g\cdot d^{(p-1)}=C_{nm}(g)\cdot d^{np}
$$

reláció. Ezzel és a (63)-mal az (59) módosítás hibája:

$$
(64)\qquad \begin{aligned}
\varkappa_{n+1,p}-\xi &= a-\xi-\frac{C_{(n-1)m}(f)}{C_{nm}(f)}\cdot f=\frac{d}{C_{nm}(f)}\cdot[C_{nm}(f)-C_{(n-1)m}(f)gd^{p-1}]= \\
&= \frac{C_{nm}(g)}{C_{nm}(f)}\cdot d^{np+1}=\frac{C_{nm}(g)}{\sum\limits_{k=0}^{n} C_{km}(g)\cdot g^{n-k}\cdot d^k}\cdot d^{n+1}.
\end{aligned}
$$

A (62) és (64) hibaképletekből látható, hogy a módosítások valóban a kívánt konvergenciafokkal rendelkeznek.

Összefoglalásképpen megállapíthatjuk, hogy a három tanulmányozott képletsorozat közül egyedül a Bernoulli-közelítés invariáns a gyök többszörösségével szemben, míg a Kiss—Gornstein-, továbbá a Gräffe-közelítések módosítandók aszerint, hogy a közelítendő gyök hányszoros. Míg az eredeti eljárások egyszeres, a módosított eljárások pedig p-szeres gyökök esetében adják az indexekkel kifejezett konvergenciafokot, addig az eredeti eljárások $p(\neq 1)$-szeres gyökök esetében, a módosított eljárások pedig (és ez ugyancsak a már ismert módon könnyen igazolható) $r(\neq p)$-szeres gyökök esetében csupán egyszeres konvergenciafokkal rendelkeznek. Mindez alól kivételt képez a Bernoulli-féle képletsorozat, viszont ennek hátránya, hogy ugyanannyi számolás esetén csak 1-gyel alacsonyabb értékű konvergenciafokot biztosít, mint a két másik módszer.

8. Az F_n és f_n függvények. Kiss módszere

A Bernoulli-képlet (15) a Gräffe-féléből is levezethető azáltal, hogy a (16)-ban szereplő

(65) $$F_n = \frac{f}{\sqrt[n]{N_n(f)}}$$

függvényre alkalmazzuk a Newton-eljárást:

$$F_n' = N_n(f)^{-\frac{n+1}{n}} \cdot \left(f' \cdot N_n - \frac{f}{n} \cdot N_n'\right),$$

vagy a (26)-tal:

(66) $$F_n' = N_n(f)^{-\frac{n+1}{n}} \cdot N_{n+1}(f),$$

és így

$$a - \frac{F_n}{F_n'} = a - \frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)} \cdot f = \beta_{n+1}.$$

Mindezt azzal a meggondolással tehettük, hogy ahol az $f(x)$-nek zérushelye van, ugyanott általában az $F_n(x)$ függvénynek is zérushelye van, tehát az eredeti

$$F_0(x) = f(x)$$

függvény helyett bármely más $F_n(x)$ $(n > 0)$ függvényből is kiindulhatunk, azt helyettesítve be az egyszerű Newton—Raphson-formulába. Egyúttal a (65) és (66) egybevetésével az is világos, hogy az F_n függvények kielégítik az

(67) $$F_{n+1} = \frac{F_n}{\sqrt[n+1]{F_n'}}$$

rekurzív formulát.

A Kiss—Gornstein-féle (22) képletek levezetésére is hasonló módszert keresve, azt megtaláljuk az

(68) $$f_n = \frac{f}{\sqrt[n]{K_{n-1}(f)}}$$

függvények alkalmazásával. Ha ugyanis az így definiált f_n függvényre alkalmazzuk a Newton-eljárást, akkor épp a Kiss—Gornstein-formulához jutunk:

$$f_n' = K_{n-1}^{-\frac{n+1}{n}} \cdot \left(f' \cdot K_{n-1} - \frac{f}{n} \cdot K_{n-1}'\right),$$

vagyis a (29)-cel:

(69) $$f_n' = K_{n-1}^{-\frac{n+1}{n}} \cdot K_n,$$

és így

(70) $$a - \frac{f_n}{f_n'} = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f = \varkappa_{n+1}.$$

A (68) és (69) összehasonlításával az is kiadódik, hogy az f_n függvények is kielégítik a (67) rekurziós formulát:

$$f_{n+1} = \frac{f_n}{\sqrt[n+1]{f'_n}},$$

csakhogy míg $F_0 = f$, addig $f_1 = f$, tehát a két függvénysorozat a kezdőindexekben különbözik egymástól.

A Kiss-féle módszer a (70) levezetéséhez kapcsolódik. KISS I. szukcesszív módon jut az egyre magasabb konvergenciafokú képletekhez. Ennek a módszernek egy láncszemét a következőképp lehet vázolni.

Eljutottunk az n-ik konvergenciafokú képlethez:

$$\varkappa_n = a - \frac{K_{n-2}}{K_{n-1}} \cdot f.$$

A jobboldal nevezőjében szereplő polinomot felhasználva, most a (68) helyett a

$$\varphi_n = \frac{f}{\sqrt[n]{K_{n-1}(f)}}$$

definícióval konstruálunk új függvényt és erre alkalmazzuk a Newton-eljárást:

$$a - \frac{\varphi_n}{\varphi'_n} = a - \frac{K_{n-1}}{L_n} \cdot f, \tag{71}$$

ahol

$$L_n = f' \cdot K_{n-1} - \frac{1}{2} f \cdot K'_{n-1}.$$

Az ily módon nyert „hibás" képlet (71) konvergenciafoka általában csak 2, hiszen a „helyes" (70) képlettől különbözik, minthogy nevezőjében az L_n polinomot tartalmazza a helyes K_n polinom helyett. Az L_n és a K_n-polinomok azonban csak az f-től független együtthatókban különböznek egymástól; a helyes együttható-értékek a határozatlan együtthatók módszerével nyerhetők abból a követelésből kiindulva, hogy a (71) helyére lépő „helyes" képlet konvergenciafoka $(n+1)$ legyen.

9. A Gornstein-féle módszer*

M. S. GORNSTEINnek 1951-ben megjelent dolgozatában [2] ismertetett módszere egy előírt módon szerkesztett

$$\varphi_\nu(x; a)$$

függvényből indul ki, mely az $f(x) = 0$ egyenlet egyik ξ valós gyökének elég kis környezetében van értelmezve, mind az x, mind az a változóját illetően.

* Gornstein eredeti jelöléseitől bizonyos mértékben eltérnek az itt alkalmazott jelölések.

A $\varphi_\nu(x;a)$ függvény szerkezete a következő:

$$\varphi_\nu(x;a)=x-f(x)\cdot\sum_{k=0}^{\nu}h_k(a)\cdot x^k, \tag{72}$$

ahol a csupán a-tól függő h_k együtthatókat úgy kell meghatározni, hogy a

$$\varphi_\nu^{(k)}(a;a)=0 \qquad (k=1,2,\ldots\nu+1) \tag{73}$$

egyenletek teljesüljenek (differenciálás az x szerint történik). A (73) egyenletrendszer fennállásából azonnal következik, ha a $\varphi_\nu(x;a)$ függvényt $(x-a)$ hatványai szerint sorbafejtjük, hogy

$$\varphi_\nu(x;a)=\varphi_\nu(a;a)+r_\nu(x;a), \tag{74}$$

ahol

$$r_\nu(x;a)=\frac{1}{(\nu+2)!}\varphi_\nu^{(\nu+2)}\big(a+\vartheta\cdot(x-a);a\big)\cdot(x-a)^{\nu+2},\quad (0\leq\vartheta\leq1). \tag{75}$$

A (74) sorfejtés és a maradéktag (75) alakja a hibabecslés céljaira szolgálnak.

A (73) egyenletrendszer a $h_k(a)$ együtthatókra lineáris egyenletrendszert szolgáltat; ennek megoldásával a $h_k(a)$ együtthatókat, mint a Gornstein-féle Γ-determinánsok hányadosait nyerjük:

$$h_k(a)=\frac{\Gamma_{\nu,k}(a)}{\Gamma_\nu(a)}. \tag{76}$$

A Γ-determinánsok az f függvényen és ennek deriváltjain keresztül is függenek az a-tól. A következőkben célul tűzzük ki egyrészt ezen determinánsoknak ismert polinomok segítségével történő előállítását, másrészt annak megmutatását, hogy a Gornstein-módszerrel nyert $\varphi_\nu(x;a)$ iteratív függvénynek az

$$x_{n+1}=\varphi_\nu(x_n;x_n)$$

egyenlet szerinti alkalmazása azonos a (22) képlet alkalmazásával.

Kiindulunk a (27) sorfejtésből:

$$\frac{f(a)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}K_k\cdot\alpha^k, \qquad (K_0=1)$$

ahonnét

$$\left(\alpha-\frac{K_{n-1}}{K_n}\right)\cdot\frac{f(a)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}K_k\cdot\left(\alpha-\frac{K_{n-1}}{K_n}\right)\cdot\alpha^k=$$

$$=-\frac{1}{K_n}\cdot\left[K_{n-1}+\sum_{k=1}^{\infty}K_{n-1}K_k-K_nK_{k-1})\alpha^k\right].$$

Alkalmazva a

$$G_{nk}=\frac{1}{f^k}(K_{n-1}K_k-K_nK_{k-1}) \qquad (k>0) \tag{77}$$

és

$$G_{n0} = K_{n-1} \qquad (n > 0)$$

rövidítést, a fenti sorfejtés a következő egyszerű alakot ölti:

$$\left(\alpha - \frac{K_{n-1}}{K_n}\right) \frac{f(a)}{f(x)} = -\frac{1}{K_n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} G_{nk} \cdot (a-x)^k. \tag{78}$$

A (77)-ből következik, hogy

$$G_{nn} \equiv 0,$$

tehát a (78)-ból az $(a-x)^n$-t tartalmazó tag hiányzik. Célszerű a sort itt kettébontani, és az első n tag összeadásából nyert sort külön betűvel (Q_n) jelölni:

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} G_{nk} \cdot (a-x)^k. \tag{79}$$

Ezzel az új jelöléssel:

$$\left(\alpha - \frac{K_{n-1}}{K_n}\right) \cdot \frac{f(a)}{f(x)} = -\frac{Q_n}{K_n} - \frac{1}{K_n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} G_{nk} \cdot (a-x)^k,$$

vagy átrendezve $\left(\alpha = \frac{a-x}{f(a)}\right)$:

$$x - \frac{Q_n}{K_n} \cdot f(x) = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f(a) + \frac{f(x)}{K_n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} G_{nk} \cdot (a-x)^k. \tag{80}$$

Vessük össze a (80)-t a (72), (74) és (75) összefüggésekkel, azonnal kiadódnak az alábbi identifikációk:

$$\nu = n - 1,$$

$$\varphi_\nu (x; a) = x - \frac{Q_n}{K_n} \cdot f(x), \tag{81}$$

$$\varphi_\nu (a; a) = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f(a), \tag{82}$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} h_k(a) \cdot x^k = \frac{Q_{\nu+1}}{K_{\nu+1}},$$

ez utóbbiból és a (76)-ból pedig:

$$\Gamma_\nu(a) = \lambda_\nu \cdot K_{\nu+1} [f(a)], \tag{83}$$

és

$$\sum_{k=0}^{\nu} \Gamma_{\nu, k}(a) \cdot x^k = \lambda_\nu \cdot Q_{\nu+1},$$

majd ebből a (79) figyelembevételével

$$(84) \qquad \Gamma_{\nu,k}(a) = (-1)^k \cdot \lambda_\nu \cdot \sum_{h=0}^{\nu-k} \binom{h+k}{k} \cdot G_{(\nu+1)(h+k)} \cdot a^h.$$

Itt λ_ν egy — egyébként érdektelen — numerikus faktort jelent. A (83) és (84) összefüggésekkel a Γ-determinánsokat sikerült visszavezetni a K_n-polinomokra, a (81)-ből és (82)-ből viszont azonnal felismerhető, hogy Gornstein módszere $x = a$ választásával azonos lesz a Kiss-félével.

A G_{nk}-polinomok könnyebb kiszámítása céljából végül közöljük rekurziós képletüket is:

$$(85) \qquad G_{nk} = \frac{1}{f} \cdot \sum_{h=1}^{k} (-1)^{h-1} \cdot \frac{f^{(h)}}{h!} G_{n(k-h)}, \; (k > 1),$$

melyhez kiindulásként hozzáveendő a (77)-ből nyerhető

$$G_{n1} = \frac{1}{f}(f' . K_{n-1} - K_n)$$

összefüggés. A (85) könnyen következik a (77)-ből, ha tekintetbe vesszük a K_n-polinomok rekurziós képletét (20).

10. A konvergencia-sugár becslésén alapuló módszer

A közelítőformulák levezetésére eddig ismertetett módszereken kívül figyelmet érdemel még az a módszer, mely a konvergencia-sugár becslésén alapszik. Feltételezve ugyanis, hogy az

$$(86) \qquad S = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

végtelen sor két egymást követő együtthatójának hányadosa véges határérték felé tart:

$$(87) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = q \; (\neq 0),$$

az x megfelelő előjelválasztásával elérhető, hogy a (86) sor bizonyos véges n indextől kezdve csupa egyenlő előjelű tagból álljon, s így alkalmazhatjuk rá az ismert konvergenciakritériumokat. A (86) sor konvergál vagy divergál, aszerint, hogy

$$(88) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1} \cdot x^{n+1}}{c_n \cdot x^n} < 1, \text{ vagy } > 1,$$

illetőleg

$$(89) \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n x^n} < 1, \text{ vagy } > 1.$$

A konvergenciasugár (ϱ) értéke pontosan leolvasható a (88), illetve (89) összefüggésekből:

(90) $$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

vagy

(91) $$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} \right|.$$

Feltételezve, hogy $f(x)$ analitikus, továbbá, hogy az

$$f(x) = 0$$

egyenletnek az $x = a$ hely környezetébe eső legközelebbi gyöke ξ, a (24) és (27) sorok konvergenciasugara szükségképpen

$$\varrho = \left| \frac{a-\xi}{f(a)} \right|.$$

Ennek megfelelően, hacsak (vö. (87)) a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{K_{n-1}}, \text{ illetőleg a } \lim_{n\to\infty} \frac{N_{n+1}}{N_n}$$

határérték létezik és véges, a (90)-ből és (91)-ből következik, hogy

(92) $$\frac{a-\xi}{f(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{K_{n-1}}{K_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{N_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{N_n}}.$$

Véges n értéknél megállva, a nyert összefüggések alkalmasak a konvergenciasugár, s így a gyök helyzetének jó közelítéssel való becslésére, és a három tárgyalt képletsorozatot eredményezik. A (92)-nél az előjelválasztás helyessége a hibaképletekből (vö. 6. fejezet) tűnik ki.

IRODALOM

[1] E. Bodewig: Konvergenztypen und das Verhalten von Approximationen in der Nähe einer mehrfachen Wurzel einer Gleichung. ZAMM **29** (1949), 45.

[2] M. S. Gornstein: Az egyenletek numerikus megoldásáról (oroszul). Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. 78. 193. (1951).

[3] I. Kiss: Die theoretischen Grundlagen der Radizierung mit der Rechenmaschine. Acta Technica Hung. Tomus VIII. Fasc. 3—4, Bp. 1954.

[4] R. Ludwig: Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme. ZAMM **34** (1954), 210 és 404.

Tartalmi összefoglaló

A szerző jelen dolgozatában azokat a vizsgálatokat folytatja, melyeket az irodalomban feltüntetett cikkekben az iteratív közelítőeljárások elméletének kidolgozása során elkezdtek. Az eddig ismert Kiss—Gornstein-féle

$$\varkappa_{n+1}(a) = a - \frac{K_{n-1}(f)}{K_n(f)} \cdot f$$

képletsorozaton kívül még két újabb képletsorozat, éspedig az iteratív Bernoulli-

$$\beta_{n+1}(a) = a - \frac{N_n(f)}{N_{n+1}(f)} \cdot f$$

és az iteratív Gräffe-

$$\gamma_{n+1}(a) = a - \frac{f}{\sqrt[n]{N_n(f)}}$$

eljárás ismertetésére is sor kerül, mely utóbbiak az algebrai egyenletek numerikus megoldására szolgáló, ismert Bernoulli-, ill. Gräffe-módszerek képleteinek iteratív használatra alkalmas átírásából származnak.

A három képletsorozatot párhuzamosan tárgyaljuk. A dolgozatban választ kapunk a következő problémákra:

1. A képletekben szereplő polinomok alaki viszonyai, tekintettel a könnyebb kiszámíthatóságra,

2. A képletek „konvergencia-foka" egyszeres és többszörös gyökök esetén; a képletek szükséges átalakítása többszörös gyök esetén ahhoz, hogy a konvergencia-fok ne változzék,

3. A három képletsorozat egymásból való leszármaztatása.

A felsoroltakon kívül az egyes képletsorozatok különféle lehetséges származtatásai egészítik ki a dolgozat anyagát, s ennek során rátérünk a Kiss-féle és a Gornstein-féle módszerek ismertetésére is, és megmutatjuk, hogy a két módszer ugyanazon képletsorozathoz vezet.