A LAPLACE-FÉLE KIFEJTÉSI TÉTEL EGY ÚJ BIZONYÍTÁSA

GÁSPÁR GYULA

Az alábbiakban bemutatjuk a determinánselmélet *Laplace*-féle kifejtési tételének [1] egy új bizonyítását, amelyik a determináns axiomatikus bevezetésére általunk [2] adott alaptulajdonságok felhasználása révén nyerhető.

Először is ismertetjük a használandó jelöléseinket.

$\mathfrak{R} = a, b, \ldots$ végtelen integritástartomány, amelynek zérusát 0, egységelemét 1 jelöli.

$\mathfrak{R}_n = A, B, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ feletti n^2 rangú teljes mátrixgyűrű, amelynek egységmátrixát $E^{(n)}$, zérusmátrixát $O^{(n)}$ jelöli.

$P_\pi \in \mathfrak{R}_n$ a $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$ permutációhoz kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhető oly (p_{ik}) mátrix, amelyben $p_{\nu k_\nu} = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, a többi elem pedig zérus.

$E_{ik}(a) \in \mathfrak{R}_n$ oly mátrix, amelyet az $E^{(n)} = (\delta_{ik})$ egységmátrixból úgy nyerünk, hogy az $E^{(n)}$ δ_{ik} eleme helyébe az $a \in \mathfrak{R}$ elemet tesszük, többi elemét pedig változatlanul hagyjuk.

$A^{i_1 \ldots i_q}_{k_1 \ldots k_q}$ az A q-adrendű minormátrixa, amelyik az $i_1 < \cdots < i_q$, illetve $k_1 < \cdots < k_q$ indexű sorok, illetve oszlopok alapján van képezve. Ennek megfelelően $A^{i_{q+1} \ldots i_n}_{k_{q+1} \ldots k_n}$ jelöli a kiegészítő minormátrixot $(i_{q+1} < \cdots < i_n;\ k_{q+1} < \cdots < k_n)$.

Az A és B mátrixok *sorkombináció*ja minden olyan $C \in \mathfrak{R}_n$ mátrix, amelyben az i-ik sort vagy az A vagy a B mátrix i-ik sora alkotja $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Hasonlóan értelmezzük az A és B mátrix oszlopkombinációját.

A determináns az $\mathfrak{R}_n$-nek az $\mathfrak{R}$-be való oly nem állandó φ leképezéseként értelmezhető,[1] amelyik kielégíti az alábbi axiómákat:

(a) $\varphi(A + B) = \Sigma \varphi(C)$,

(b) $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$,

(c) $\varphi(aA) = a^n \varphi(A)$, $(a \in \mathfrak{R})$,

[1] l. id. munkánk 257. Itt zéruskarakterisztikájú test szerepel az $\mathfrak{R}$ végtelen integritástartomány helyett. A tétel azonban a bizonyítás megfelelő módosításával erre az esetre is kiterjeszthető.

ahol az (a)-ban az összegezés kiterjesztendő az A és B mátrixok összes sor- vagy oszlopkombinációira.

E tulajdonságokból következik[2]:

(1) $\varphi(A)=0$ minden oly $A \in \mathfrak{M}_n$ mátrixra, amelynek (legalább) egy zérusokból álló sora vagy oszlopa van.

(2) $\varphi(E_{ik}(a))=1$, ill. a aszerint, hogy $i \neq k$, ill. $i=k$.

(3) $\varphi(P_\pi)=1$, ill. -1 aszerint, hogy π páros, ill. páratlan permutáció.

A *Laplace*-féle kifejtési tétel tárgyalására áttérve, ez így fogalmazható meg az $i_1 < \cdots < i_q$ indexű sorokra nézve:

$$\varphi(A)=\sum \pm \varphi(A_{k_1 \ldots k_q}^{i_1 \ldots i_q})\varphi(A_{k_{q+1} \ldots k_n}^{i_{q+1} \ldots i_n}), \tag{4}$$

ahol $i_1 < \cdots < i_q$ (tehát $i_{q+1} < \cdots < i_n$ is) rögzített, az összegezés pedig kiterjesztendő az $1, 2, \ldots, n$ számok összes $k_1 < \cdots < k_q$ kombinációira, az összegben az egyes tagok előjele $+$, ill. $-$ aszerint, hogy az

$$\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_q & i_{q+1} \ldots i_n \\ k_1 \ldots k_q & k_{q+1} \ldots k_n \end{pmatrix}$$

permutáció páros vagy páratlan.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az $n=4$, $i_1=2, i_2=3$ esetre szorítkozunk, de az egyes bizonyításokat oly módon végezzük el, hogy azok az általános esetbe is betekintést engedjenek.

Először is vegyük tekintetbe, hogy az $A=(a_{ik})$ mátrix i-ik sorára nézve áll a következő kifejtés:

$$\varphi(A)=\sum_{\nu=1}^{4} a_{i\nu}\varphi(A_{i\nu}), \tag{5}$$

ahol az $A_{i\nu}$, $(\nu=1,2,3,4)$ mátrix az A mátrixból úgy keletkezik, hogy ennek $a_{i\nu}$ eleme helyébe az 1 elemet, az i-ik sor és ν-ik oszlop minden más eleme helyébe a zérust tesszük, a többi elemet pedig változatlanul hagyjuk.

Ugyanis legyen pl. $i=1$. Ekkor az

$$A_0=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

mátrixokra alkalmazva az (a)-t, kapjuk az (1) figyelembevételével:

$$\varphi(A_0+B)=\varphi(A)=\varphi(A_0)+\varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

[2] l. id. munkánk (d), ill. (2), (3), ill. (4).

Ámde itt

$$\varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

amint ez az (a)-nak az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

összegre való (oszloponkénti) alkalmazásával azonnal következik az (1) tekintetbevételével.

Ha most ezt az eljárást folytatjuk az A_0 első sorára nézve, akkor az (5)-öt kapjuk $i=1$ esetén, ha még figyelembe vesszük, hogy a (b) és (2) révén

$$\varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \varphi\left(\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\right) = a_{11}\varphi\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

stb. következik. Hasonló tétel áll az oszlopokra nézve is.

Most bizonyítjuk a következő képletet:

$$(6)\qquad \varphi\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \varphi\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \varphi\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+\varphi\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} + \varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + \varphi\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\varphi\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

E célból alkalmazzuk az (a)-t a következő összegre:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Ekkor a fellépő $2^4=16$ számú tag közül — oszlopkombinációkat véve — mindössze legfeljebb $\binom{4}{2}=6$ számú tag (éppen a (6) jobboldalán szereplő tagok) lesz zérustól különböző. Ti. azok a tagok, amelyek „négyzetesen kiegészítő elhelyezkedésben" tartalmazzák az A mátrix elemeit, ill. P_π mátrixokkal balról, illetve jobbról szorozva ilyen alakra hozhatók. Itt a „négyzetesen kiegészítő elhelyezkedés"-en azt értjük, hogy e mátrix alakja:

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix},$$

ahol az A_1, ill. A_2 négyzetes mátrixok tartalmazzák az A-ból kiválasztott elemeket. — E tagok akkor keletkeznek, ha az első és a második mátrixban A-ban levő elemmel kezdődő, összesen négy oszlopból alkotunk kombinációkat. Ugyanis a többi mátrixnál mindig van olyan oszlop, amelyre az (5)-öt alkalmazva, a φ értéke zérus, ha még figyelembe vesszük az (1)-et is. Pl.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

esetén a jelzett transzformáció után az

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{43} \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, s ennél a φ értéke utolsó oszlop szerinti kifejtése esetén zérus.

Határozzuk most meg pl. a

$$\varphi\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}=\varphi(A_6)$$

tag értékét.

E célból vegyük tekintetbe a

$$P_{3124}A_6P_{3142}=\begin{bmatrix} A_{24}^{23} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & A_{13}^{14} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{24}^{23} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & E^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E^{(2)} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & A_{13}^{14} \end{bmatrix}$$

összefüggést, s erre alkalmazzuk a (b)-t. Ekkor kapjuk a (2) révén:

$$\varphi(A_6)=-\varphi\begin{bmatrix} A_{24}^{23} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & E^{(2)} \end{bmatrix}\varphi\begin{bmatrix} E^{(2)} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & A_{13}^{14} \end{bmatrix}.$$

Egyúttal vegyük tekintetbe azt is, hogy a $\varphi(P_{3124})\varphi(P_{3142})$ szorzat egyenlő a $\varphi(P_{3142}^{-1})\varphi(P_{3124})$ szorzattal (a megfelelő permutációk páros, ill. páratlan voltának a figyelembevételével), végül ez egyenlő $\varphi(P_{1243})$-mal, ahol a P_{1243} mátrix az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutációhoz tartozik, miként a tétel idevonatkozó része kívánja. Ha most ezt az eljárást a (6)-ban szereplő minden tagnál véghezvisszük, akkor a *Laplace*-féle kifejtési tételt kapjuk $n=4$, $i_1=2$, $i_2=3$ esetén, ha még figyelembe vesszük, hogy

$$\varphi\begin{bmatrix} A_{24}^{23} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & E^{(2)} \end{bmatrix} = \varphi(A_{24}^{23}),\ \varphi\begin{bmatrix} E^{(2)} & O^{(2)} \\ O^{(2)} & A_{13}^{14} \end{bmatrix} = \varphi(A_{13}^{14}) \text{ stb.}$$

fennáll, amint erről a φ kifejtett alakjára[3] való áttérés révén azonnal meggyőződhetünk.

IRODALOM

[1] LAPLACE, P. S. Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. *Histoire de l'académie des sciences de Paris,* 1772.

[2] GÁSPÁR, J. Eine neue Definition der Determinanten. *Publ. Math. Debrecen,* 3 (1954), 257—260.

[3] l. id. munkánk befejező eredményét