A MODULÁRIS CSOPORT GEOMETRIAI INTERPRETÁCIÓJÁRÓL

SZÁSZ PÁL

Bemutatta Hajós György r. tag az 1954. október 22-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Tekintsük az $\omega = x + iy$ komplex számok síkjának felső felét (amelyen $y > 0$) s nevezzük szokásos módon *körívháromszögnek* az olyan háromszöget ezen a félsíkon, amelynek oldalai a valós tengelyre merőleges körívek (vagyis amelyek mindegyikének középpontja a valós tengelyen van), ezek közé számítva a valós tengelyre merőleges egyenesdarabokat és félegyeneseket is. R. DEDEKIND [1] az elliptikus modulusfüggvények elméletét arra a tételre alapította, hogy azok a körívháromszögek, amelyek a

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \infty \tag{1}$$

szögpontokkal bíró körívháromszögből a racionális egész együtthatós

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma = 1 \tag{2}$$

lineáris transzformációkkal származnak, a felső félsíkot hézagmentesen és közös határpontoktól eltekintve egyrétűen kitöltik. E körívháromszögek mindegyikében két szög 60°, egy pedig 0-szög, az utóbbiak csúcspontjai a valós tengely racionális pontjainak összességét alkotják (a ∞ beleértésével), amint R. DEDEKIND az idézett helyen kiemeli. A (2) alatti lineáris transzformációk racionális egész együtthatók mellett is (amely esetről a fenti tételben szó van) csoportot alkotnak, amelyet *moduláris csoportnak* szokás nevezni. R. DEDEKIND tétele e csoportnak nevezetes és alapvető geometriai interpretációját fejezi ki. A szóbanforgó körívháromszögek hálózata a felső félsíknak ú. n. *moduláris felosztása* vagy más néven a *moduláris alakzat.* Ez utóbbi F. KLEIN [2] szerint úgy szerkeszthető, hogy a $0\,1\,\infty$ körívháromszögnek az oldalakra vonatkozó szukcesszív tükrözése (inverziója) által nyert hálózatban, mindegyik háromszöget a három magasságával (az egyes szögpontokból a szembenfekvő oldalakra bocsátott merőleges körívekkel) hat részre bontunk s az így nyert körívháromszögek közül kettőt-kettőt, amelyeknek közös oldalán derékszög és 0-szög van, egy háromszöggé egyesítünk. R. DEDEKIND tételét minden részletében először A. HURWITZ [3] bizonyította be. Ugyanő [4] később még egyszerűsítette bizonyítását. Más bizonyítással szolgálnak pl. F. KLEIN [5] és R. FRICKE a modulusfüggvényekről írt ismert monográfiájukban. H. POINCARÉ [6] azon vizsgálataiból, amelyek a felső félsíknak *reguláris felosztásaira* vonatkoznak [7] s a határkörrel bíró automorf függvények elméletének alapját képezik, ismét más bebizonyítás adódik [8]. Az újabb irodalomból S. SAKS [9] és A. ZYGMUND függvénytanát említjük, mint amelyben szintén megtalálható a tétel egyik bebizonyítása.

Az alábbiakban R. DEDEKIND e tételének elemi geometriai bebizonyítását mutatjuk be, egy számelméleti tétel felhasználásával. Először is a moduláris alakzatnak más szerkesztését adjuk (1. §), majd ennek alapján újra bebizonyítjuk, hogy a moduláris csoport a (2) alatt felírt valós együtthatós transzformációk közül éppen azoknak a csoportja, amelyek az (1) alatti szögpontok alkotta körívháromszöget a moduláris alakzat egyes háromszögeibe (az alakzatot önmagába) viszik át (2. §). Végül ismét megmutatjuk, hogy a moduláris alakzat az egész felső félsíkot kitölti (3. §).

A jelzett számelméleti tétel (amelyet az elemi geometrián túlmenően felhasználunk) abban áll, hogy minden racionális egész együtthatós (2) alatti lineáris törtfüggvény (amelyben $\alpha\delta-\beta\gamma=1$) az

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=a_n-\cfrac{1}{a_{n-1}-\cfrac{\ddots}{\quad -\cfrac{1}{a_1-\cfrac{1}{a_0+\omega}}}}$$

lánctört alakban írható, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok [10]. Nyilvánvaló, hogy minden ilyen lánctört a (2) alatti racionális egész együtthatós alakra hozható, tekintve, hogy racionális egész szám hozzáadása, valamint a negatív reciprok érték képezése a lineáris törtfüggvénynek egész együtthatós és 1 determinánsú voltát nem változtatja meg. Tehát összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy a moduláris csoportot azok a

$$(2^*)\qquad \omega'=a_n-\cfrac{1}{a_{n-1}-\cfrac{\ddots}{\quad -\cfrac{1}{a_1-\cfrac{1}{a_0+\omega}}}}$$

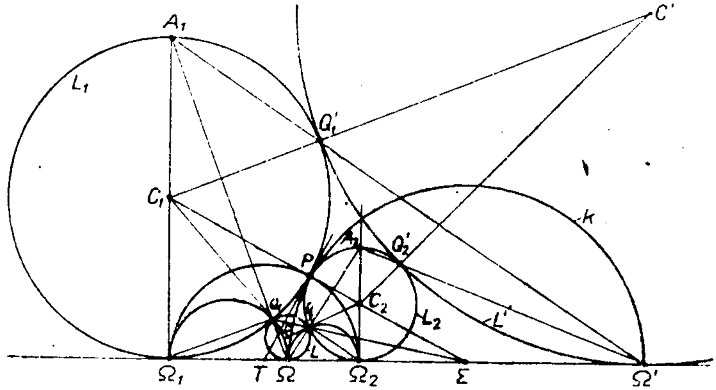
transzformációk alkotják, amelyekben $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok. Ezt fogjuk a 2. §-ban felhasználni.

Megjegyezzük még, hogy a komplex szám fogalma csupán kifejezésmódunk rövidségét szolgálja s a tárgyalásból triviálisan ki volna küszöbölhető, ω alatt valós változót értve.

1. §. A moduláris alakzat szerkesztése.

Tekintsünk a felső félsíkon a valós tengelyt érintő két kört, amelyek egymással kívülről érintkeznek. A moduláris alakzat szerkesztése annak a két körnek szerkesztésére vezethető vissza, amelyek a valós tengelyt és e két kört érintik. Ezeket következőképp szerkeszthetjük.

Legyenek az adott körök L_1 és L_2,[1]) középpontjaik C_1 és C_2, érintkezési pontjuk P s érintsék a valós tengelyt Ω_1 és Ω_2-ben (1. ábra). A C_1C_2 centrálisnak a valós tengellyel való Σ metszéspontja mint középpont körül rajzoljuk a k kört a P ponton át s jelöljük ennek a valós tengelyre eső pontjait Ω és Ω'-vel. Kössük össze Ω-t az L_1 körnek Ω_1-gyel átellenes A_1, valamint L_2-nek Ω_2-vel átellenes A_2 pontjával s legyen $A_1\Omega$, ill. $A_2\Omega$-nak az L_1, ill. L_2 körrel való másik metszéspontja Q_1, ill. Q_2. Akkor a C_1Q_1 és C_2Q_2 egyenesek C metszéspontját meghatározván, a C mint középpont körül Ω-n át



1. ábra

rajzolt L kör a valós tengelyt Ω-ban, az L_1 és L_2 köröket pedig Q_1, ill. Q_2-ben érinti. Ezt következőképpen bizonyítjuk be.

Az L_1 és L_2 körök P-beli közös érintőjének a valós tengellyel való metszéspontját T-vel jelölve $\overline{T\Omega_1} = \overline{TP} = \overline{T\Omega_2}$, tehát az Ω_1, P és Ω_2 pontok T középpontú félkörön vannak, s mivel $PT \perp C_1C_2$, e félkör a C_1C_2 centrálist P-ben érinti. Ennélfogva

$$\overline{P\Sigma}^2 = \overline{\Omega_1\Sigma} \cdot \overline{\Omega_2\Sigma}$$

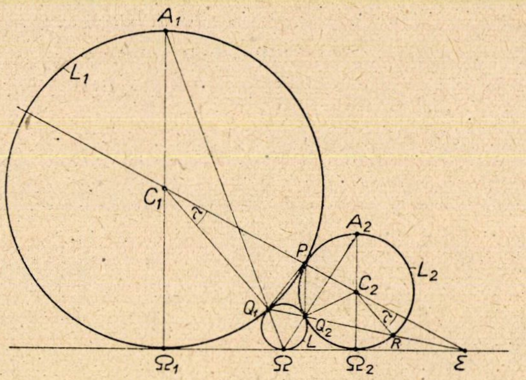
vagyis Ω_1 és Ω_2 egymás tükörképei a k körre vonatkozólag. Minthogy THALES tétele értelmében $\Omega_1Q_1 \perp \Omega A_1$, valamint $\Omega_2Q_2 \perp \Omega A_2$, azért az $\overline{\Omega\Omega_1}$ átmérőjű kör átmegy a Q_1, az $\overline{\Omega\Omega_2}$ átmérőjű pedig a Q_2 ponton. De e körök egymás tükörképei k-ra nézve, minthogy az előbbiek szerint Ω_1 és Ω_2 ilyenek. S mivel ugyanezen oknál fogva L_1 és L_2 is egymás tükörképei k-ra vonatkozólag, azért a Q_1 és Q_2 pontok szintén ilyenek. Tehát a Q_1, Q_2, Σ pontok egy egyenesen vannak és

$$\overline{Q_1\Sigma} \cdot \overline{Q_2\Sigma} = \overline{P\Sigma}^2 = \overline{\Omega\Sigma}^2$$

[1]) A felső félsíkot POINCARÉ-féle félsíknak tekintve, amely a hiperbolikus síknak egy megvalósítása (H. POINCARÉ [6], i. h. § 2, 6—8., resp. 112—114), a valós tengelyt érintő körök a vele párhuzamos egyenesekkel együtt a hiperbolikus sík *paraciklusai (horiciklusai)* vagyis BOLYAI JÁNOS [11] L-vonalai. Ez magyarázza fenti jelölésünket.

s így a Q_1, Q_2, Ω pontokon átmenő kör Ω-ban érinti a valós tengelyt. Ebből pedig következik, hogy e kör derékszögben metszi az $\Omega_1 Q_1 \Omega$ és $\Omega_2 Q_2 \Omega$ köröket s ennélfogva Q_1-ben érinti az előbbire merőleges L_1, Q_2-ben viszont az utóbbira merőleges L_2 kört. Tehát a $C_1 Q_1$ és $C_2 Q_2$ egyenesek C metszéspontja éppen e kör középpontja, vagyis e kör összeesik a C középpontú és az Ω ponton átmenő fenti körrel. Ezzel kimutattuk, hogy az utóbbi kör a valós tengelyt Ω-ban, az L_1 és L_2 köröket pedig Q_1, ill. Q_2-ben érinti.

Hasonlóan adódik a másik keresett L' kör, amely a valós tengelyt Ω'-ben, az L_1, ill. L_2 kört pedig Q'_1, resp. Q'_2-ben érinti.



2. *ábra*

Az így szerkesztett két körön kívül más kör nincs, amely a kívánt tulajdonságú volna. Tegyük fel ui., hogy valamely L kör a valós tengelyt Ω-ban érinti s L_1 és L_2-vel Q_1, ill. Q_2-ben kívülről érintkezik (2. ábra). Akkor a $Q_1 Q_2$ egyenes tudvalevőleg átmegy L_1 és L_2 külső hasonlósági pontján, amely nem egyéb, mint a $C_1 C_2$ centrális és a valós tengely előbbi Σ metszéspontja. Jelöljük $Q_1 Q_2$-nek az L_2 körrel való második metszéspontját R-rel. Minthogy Σ a két kör külső hasonlósági pontja, azért $\tau = Q_1 C_1 \Sigma\sphericalangle = R C_2 \Sigma\sphericalangle$, tehát a kerületi szögek tétele alapján

$$Q_1 P \Sigma\sphericalangle = \pi - \frac{\pi - \tau}{2} = \frac{\pi + \tau}{2} = \Sigma Q_2 P\sphericalangle,$$

következőleg $PQ_1\Sigma_\triangle \sim Q_2 P \Sigma_\triangle$ s így

$$\overline{Q_1\Sigma} : \overline{P\Sigma} = \overline{P\Sigma} : \overline{Q_2\Sigma}$$

vagyis

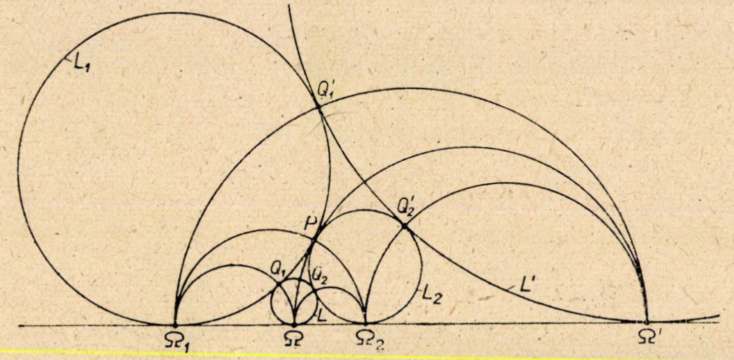
$$\overline{P\Sigma}^2 = \overline{Q_1\Sigma} \cdot \overline{Q_2\Sigma}.$$

De mivel a feltevés szerint L a valós tengelyt Ω-ban érinti, azért egyben

$$\overline{\Omega\Sigma}^2 = \overline{Q_1\Sigma} \cdot \overline{Q_2\Sigma}.$$

Ennélfogva $\overline{\Omega\Sigma} = \overline{P\Sigma}$ vagyis Ω az előbbi k kör és a valós tengely egyik metszéspontja. Mivel pedig Q_1 az L és L_1, Q_2 viszont az L és L_2 körök belső hasonlósági pontja, azért ΩQ_1 átmegy L_1-nek Ω_1-gyel átellenes A_1, ΩQ_2 pedig L_2-nek Ω_2-vel átellenes A_2 pontján. A feltételezett L kör tehát az előbb szerkesztett két kör egyikével azonos. E kettőn kívül tehát több ilyen kör valóban nincsen.

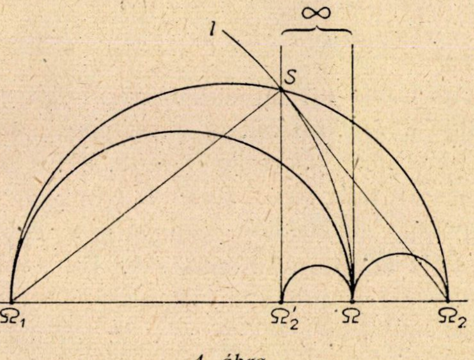
Minthogy a szerkesztés szerint Ω és Ω' a P-n át vezetett Σ középpontú k kör és a valós tengely metszéspontjai s e kör az $\Omega_1 P \Omega_2$ kört derékszögben metszi, azért e pontok egymás tükörképei az utóbbi körre vonatkozólag. Ebből pedig nyilván következik, hogy *az $\Omega_1\Omega_2\Omega$ és $\Omega_1\Omega_2\Omega'$ körívháromszögek is egymás tükörképei az $\Omega_1 P \Omega_2$ körre nézve* (3. ábra). Az $\Omega_1 P \Omega_2$



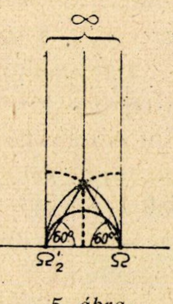
3. ábra

és $\Omega P \Omega'$ körök ortogonalitásából egyben az is látható, hogy *az $\widehat{\Omega P}$ ív az $\Omega_1\Omega_2\Omega$ körívháromszögnek, $\widehat{\Omega' P}$ pedig $\Omega_1\Omega_2\Omega'$-nek az $\widehat{\Omega_1\Omega_2}$ oldalhoz tartozó magassága.*

Megmutatjuk most, hogy általában, *ha Ω_1, Ω_2 és Ω a valós tengely különböző pontjai, az $\Omega_1\Omega_2\Omega$ körívháromszög magasságai egy ponton mennek át és egymást 120° alatt metszik.*[2])



4. ábra



5. ábra

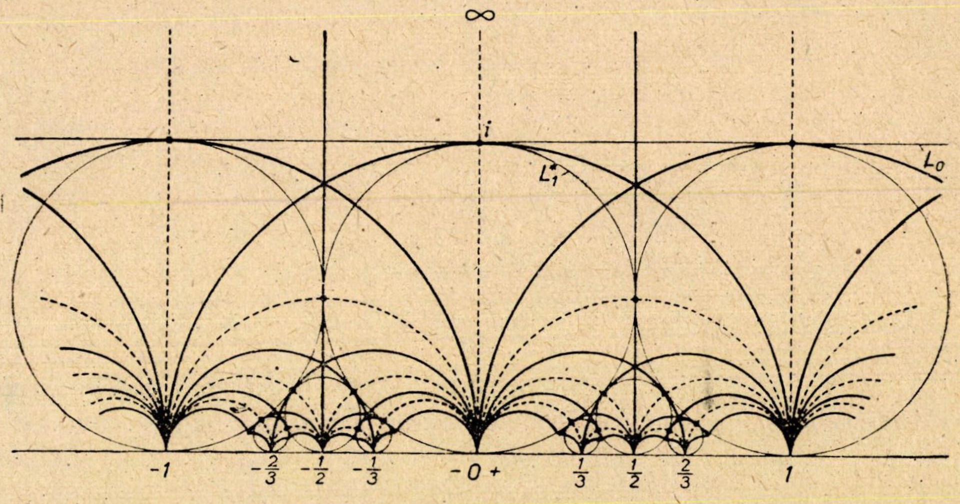
[2]) Ez a Poincaré-féle félsík révén (lásd az [1]) lábjegyzetet) elemi geometriai kifejezése a hiberbolikus sík aszimptotikus háromszögeire vonatkozó megfelelő tételnek.

Feltehetjük, hogy (amint a fenti ábrákon is) Ω az Ω_1 és Ω_2 közé esik (4. ábra). Tekintsük az Ω_1 középpontú és Ω-n átmenő l kört s jelöljük ennek az $\widehat{\Omega_1\Omega_2}$ félkörrel való metszéspontját S-sel. Ez l körre vonatkozó tükrözésnél Ω önmagába, Ω_1 pedig a ∞-be megy át. Ugyanekkor Ω_2 tükörképe az S pontnak a valós tengelyen levő Ω_2' vetülete, minthogy THALES tétele értelmében $\Omega_1 S \Omega_2 \sphericalangle$ derékszög és így

$$\overline{\Omega_1\Omega_2'} \cdot \overline{\Omega_1\Omega_2} = \overline{\Omega_1 S}^2.$$

Ezekből folyólag az $\Omega_1\Omega_2\Omega$ körívháromszögnek az l körre vonatkozó tükörképe a $\infty\Omega_2'\Omega$ körívháromszög. Mivel pedig az utóbbira nyilván igaz a tétel (5. ábra) és az inverziónál a szögek nagysága megmarad, azért a tétel érvényes az eredeti $\Omega_1\Omega_2\Omega$ körívháromszögre is.

Ha mármost kiindulva a valós tengelyt érintő és egymással kívülről érintkező két körből (amelyek egyike a valós tengellyel párhuzamos egyenes is lehet, mint azt a ∞-ben érintő elfajuló kör) a fenti módon megszerkeszt-



6. ábra

jük az ezeket és a valós tengelyt érintő két új kört, majd az így nyert négy kör közül kettő-kettőre ismételjük a szerkesztést, a most már nyolc körből álló rendszerben kettő-kettőre újra ismételjük s így tovább, akkor a mondottak szerint három-három egymással kettenként kívülről érintkező körnek a valós tengellyel való érintési pontjai alkotta körívháromszögek egy ilyennek az oldalakra vonatkozó szukcesszív tükrözésével adódnak. És a szerkesztés folyamán minden ilyen körívháromszög a három magassága által hat körívháromszögre bomlik, amelyeknek szögei 90°, 60° és 0°. Az így nyert háromszögek közül kettőt-kettőt, amelyeknek közös oldalán derékszög és 0-szög van, egy háromszöggé egyesítve, a körívháromszögeknek olyan hálózatát nyerjük, amelyben mindegyik háromszögnek két szöge 60°, egy pedig 0-szög.

Ezt a szerkesztést arra az esetre alkalmazva, amelyben a kiindulásul szolgáló két kör egyike a 0 és i pontokat összekötő egyenesdarabra mint átmérőre szerkesztett $x^2-y+y^2=0$ egyenletű kör, a másik pedig ezt az i pontban érintő $y=1$ egyenes (mint elfajuló kör), a fentebbiek értelmében éppen a moduláris alakzat áll elő (6. ábra, ahol a háromszögek határa vastagon van kihúzva).

2. §. A moduláris csoport geometriai interpretációja

A rövidség kedvéért bevezetünk néhány átmeneti elnevezést. Nevezzünk a valós tengelyt érintő köröknek abban a rendszerében, amely a moduláris alakzat fenti szerkesztésében szerepel, vagyis amelyet az $x^2-y+y^2=0$ kör és az $y=1$ egyenes (mint elfajuló kör) a leírt szerkesztés szerint definiál, minden kört *segédkörnek*, az egyes érintési pontokat az illető segédkör valós tengelyen lévő érintési pontjával összekötő és e tengelyre merőleges köríveket e segédkör *bordáinak*. (Ez utóbbiak a 6. ábrán szaggatott vonallal vannak kihúzva.) Az $y=1$ segédkör bordái a valós tengelyre merőleges félegyenesek (elfajuló körívek), amelyek ennek érintési pontjait a ∞-nel kötik össze; az i pontot a ∞-nel összekötő félegyenes neveztessék *alapbordának*. A moduláris alakzat körívháromszögeit nevezzük *sárkányoknak*, ezek közül az (1) alatti szögpontokkal bírót *alapsárkánynak*. Végül a valós együtthatós (2) alatti lineáris transzformációkat (amelyek az $y>0$ félsíkot, valamint a valós tengelyt önmagába viszik át) nevezzük *hiperbolikus mozgásoknak.*[3]) Ismeretes, hogy e mozgások kör- és szögtartóak, minthogy a valós tengely mentén való eltolásból, az egységkörre vonatkozó inverzió- és a képzetes tengely körüli átfordításból, továbbá a kezdőpontra vonatkozó hasonlósági transzformációból tevődnek össze, amint (2)-re tekintettel $\gamma \neq 0$ esetén az

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{1}{\gamma^2\left(\omega+\frac{\delta}{\gamma}\right)},$$

$\gamma=0$ esetén pedig az

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\delta}=\frac{1}{\delta^2}\omega+\frac{\beta}{\delta}$$

átalakitásból közvetlenül láthatjuk is. Ennek alapján nyilvánvaló, hogy bármelyik sárkány hiperbolikus mozgással átvihető az alapsárkányba; ez ti. az a mozgás, amely a sárkány valós tengelyen lévő szögpontjához tartozó magasságát képező bordát az alapbordába viszi át. Az egyes sárkányokat az alapsárkányba vivő hiperbolikus mozgások tehát azonosak az egyes bordákat az alapbordába átvivő mozgásokkal.

[3]) Ezek a felső félsíknak mint hiperbolikus síknak a mozgásai, analitikusan kifejezve (v. ö. az [1]) jegyzettel).

Bebizonyítjuk, hogy *az egyes bordákat az alapbordába vivő ezen hiperbolikus mozgások a moduláris csoportot alkotják.* Ez a mondottak alapján nyilván ekvivalens R. DEDEKIND idézett tételének azzal a részével, amely szerint — az imént bevezetett kifejezésmódot használva — a moduláris csoport az alapsárkányt az egyes sárkányokba átvivő hiperbolikus mozgások csoportja.

Jelöljük az $y=1$ segédkört L_0-lal (6. ábra); ennek egyik bordája az alapborda, amely az i pontot a ∞-nel köti össze. Minden borda, bármelyik segédkörhöz tartozzék is, úgy nyerhető, hogy vesszük az L_0 segédkört, azután az ezt érintő egyik L_1 segédkört, majd az utóbbit érintő egyik L_2 segédkört és így tovább, végül az L_{n-1}-et érintő egyik L_n segédkört s abban valamelyik bordát. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ezt az alapbordába viszi valamely

$$\omega' = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_0 + \omega}}}} \tag{3}$$

hiperbolikus mozgás, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok. (Ez alatt $n=0$ esetén az $\omega' = a_0+\omega$ mozgást értjük.)

Az állítás $n=0$-ra igaz, mert az L_0 segédkörben két szomszédos borda távolsága 1 lévén, ennek bármely bordáját az alapbordába viszi bizonyos $\omega' = a_0+\omega$ hiperbolikus mozgás, ahol a_0 racionális egész szám. Tegyük fel most, hogy az állítás $(n-1)$-re igaz; megmutatjuk, hogy akkor igaz n-re is. Tekintsük L_{n-1}-nek azt a bordáját, amely L_{n-1} és L_n érintkezési pontjához tartozik. Ezt feltevésünk szerint az alapbordába viszi valamely

$$S_{n-1}(\omega) = a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_0 + \omega}}}}$$

hiperbolikus mozgás, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ racionális egész számok. E mozgás az L_n segédkörnek ugyanezen érintkezési ponthoz tartozó bordáját (amely az előbbit a valós tengelyre merőleges félkörré egészíti ki) nyilván az L_0-t az i pontban érintő L_1^* segédkörnek (6. ábra) ehhez a ponthoz tartozó bordájába, vagyis e pontot a 0 ponttal összekötő egyenesdarabba viszi át. Ennélfogva a $-1/S_{n-1}(\omega)$ hiperbolikus mozgás L_n-nek ezt a bordáját az alapbordába viszi. Minthogy ekkor maga L_n nyilván L_0-ba kerül bordástól, azért L_n-nek valamely kiszemelt bordáját az alapbordába viszi át bizonyos

$$S_n(\omega) = a_n - \frac{1}{S_{n-1}(\omega)}$$

hiperbolikus mozgás, ahol a_n szintén racionális egész szám. Ez azonban $S_{n-1}(\omega)$ fenti alakjára tekintettel éppen a (3) alatti alakkal bír. Az állítás tehát valóban n-re is igaz. Ennélfogva az állítás minden n-re igaz.

Hasonlóképp mutathatjuk meg teljes indukcióval, hogy fordítva, minden (3) alatti hiperbolikus mozgás, amelyben $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok, egy a leírt módon előálló L_n segédkör valamely bordáját viszi az alapbordába. Speciálisan az $a_0 + \omega$ alakú hiperbolikus mozgások, amelyekben a_0 racionális egész szám, az L_0 egyes bordáit viszik át az alapbordába.

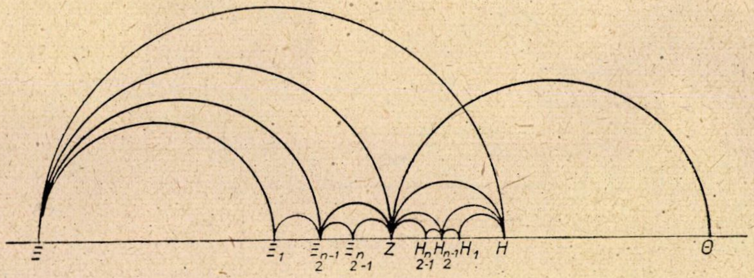
Ezek szerint az egyes bordákat az alapbordába vivő hiperbolikus mozgások összességét azok a (3) alatti alakkal bíró mozgások alkotják, amelyekben $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok. Minthogy pedig a bevezetésben mondottak szerint az utóbbiak éppen a moduláris csoportot alkotják, ezzel a fenti tétel be van bizonyítva.

Amint e bizonyításból is látható, a moduláris csoportnak ez a geometriai interpretációja, vagyis amely szerint (az eredeti fogalmazásban) e csoport az (1) alatti szögpontokkal bíró körívháromszöget a moduláris alakzat egyes háromszögeibe átvivő valós együtthatós (2) alatti transzformációk csoportja, *független attól, hogy ez alakzat az egész felső félsíkot kitölti-e vagy sem.*

3. §. A moduláris alakzat hézagtalansága

Bebizonyítjuk most R. DEDEKIND szóbanforgó tételének azt a részét, amely szerint a moduláris alakzat az egész felső félsíkot kitölti, röviden szólva *hézagtalan*. Ennek bebizonyítását [12] a következő tételre alapítjuk:

Legyen p_1 *a félkörök alkotta* $\Xi H Z$ *körívháromszög, ahol* Z *a* Ξ *és* H *közé esik. E körívháromszög a* $\widehat{\Xi Z}$ *és a* $\widehat{HZ}$ *oldalakra vonatkozó tükörképeivel kiegészítve legyen a* p_2 *körívpoligon, ez az előbbi kiegészítő háromszögeknek a két-két új oldalra vonatkozó tükörképeivel kiegészítve legyen* p_3 *s így tovább. Akkor feltéve, hogy* $\widehat{\Xi Z} \geqq \widehat{HZ}$, *a* p_n *körívpoligon* $\widehat{\Xi H}$*-tól különböző oldalai közül a* Ξ*-ből kiinduló a legnagyobb.*



7. *ábra*

Bizonyítás. Az állítás $n = 1$-re igaz a feltevés szerint. Megmutatjuk, hogy ha n-re igaz a leírt módon előálló bármely körívpoligon esetén, akkor $(n+1)$-re is érvényes. Legyenek p_{n+1}-nek a ΞH egyenesre (a valós tengelyre) eső szögpontjai (7. ábra)

$$\Xi, \Xi_1, \ldots, \Xi_{2^n-1}, Z, H_{2^n-1}, \ldots, H_1, H.$$

Ezek közül Ξ_{2^n-1} a szerkesztésből folyólag H-nak a $\widehat{\Xi Z}$ ívre vonatkozó, H_{2^n-1} pedig Ξ-nek $\widehat{HZ}$-re vonatkozó tükörképe, tehát nyilván

$$\widehat{\Xi\Xi}_{2^n-1} \geqq \widehat{\Xi_{2^n-1}Z}, \quad \widehat{HH}_{2^n-1} \geqq \widehat{H_{2^n-1}Z}.$$

Ennélfogva indukciófeltevésünk szerint a $Z\Xi\Xi_1 \ldots \Xi_{2^n-1}$ körívpoligonnak

$$\widehat{\Xi\Xi}_1, \widehat{\Xi_1\Xi}_2, \ldots, \widehat{\Xi_{2^n-1}Z} \tag{4}$$

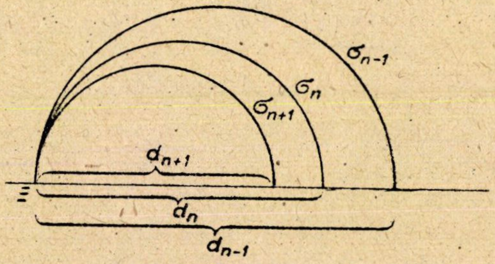
oldalai közül a legnagyobb $\widehat{\Xi\Xi}_1$ s hasonlóképp $ZHH_1 \ldots H_{2^n-1}$-nek

$$\widehat{HH}_1, \widehat{H_1H}_2, \ldots, \widehat{H_{2^n-1}Z} \tag{5}$$

oldalai közül a legnagyobb $\widehat{HH}_1$. De Z-ból a $\widehat{\Xi H}$-ra merőleges $\widehat{Z\theta}$ félkört húzva, a szerkesztésből nyilván következik, hogy a $Z\Xi\Xi_1 \ldots \Xi_{2^n-1}$ körívpoligon tükörképe $\widehat{Z\theta}$-ra éppen $ZHH_1 \ldots H_{2^n-1}$. S mivel $\widehat{\Xi Z} \geqq \widehat{HZ}$ folytán előbbi a $\widehat{Z\theta}$-t tartalmazó körön kívül van, azért $\widehat{\Xi\Xi}_1 \geqq \widehat{HH}_1$. Ennélfogva valamennyi (4) és (5) alatti ív közül (amelyek p_{n+1}-nek a $\widehat{\Xi H}$-tól különböző összes oldalai) a legnagyobb $\widehat{\Xi\Xi}_1$, az állítás $(n+1)$-re is igaz. Tehát az állítás minden n-re igaz. Qu. e. d.

Jelöljük p_n-nek a $\widehat{\Xi H}$-tól különböző oldalai közül ezt a Ξ-ből kiinduló legnagyobb ívet σ_n-nel és legyen ennek átmérője d_n. Egyöntetűség kedvéért legyen $\sigma_0 = \widehat{\Xi H}$ és ennek átmérője d_0. A szerkesztésből folyólag σ_{n-1}-nek a σ_n-re vonatkozó tükörképe σ_{n+1} (8. ábra), tehát

$$\left(d_{n-1} - \frac{d_n}{2}\right)\left(d_{n+1} - \frac{d_n}{2}\right) = \left(\frac{d_n}{2}\right)^2$$



8. ábra

vagyis

$$d_{n-1}d_{n+1} - \frac{d_n}{2}(d_{n+1} + d_{n-1}) = 0,$$

honnan

$$\frac{1}{d_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_{n-1}} + \frac{1}{d_{n+1}}\right)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

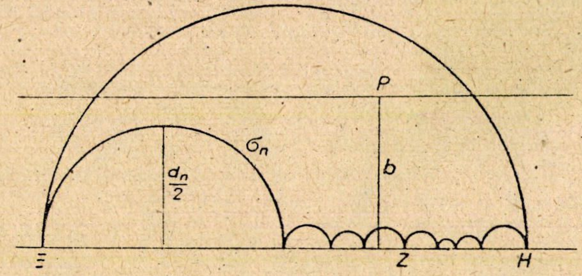
Eszerint

$$\frac{1}{d_0}, \frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}, \ldots$$

növekedő számtani haladványt alkotnak s így $1/d_n \to +\infty$, azaz

(6) $$d_n \to 0.$$

Most már könnyű megmutatnunk, hogy *a $\overset{\frown}{\Xi H}$ félkör és az átmérője által határolt félkörkaréj bármely belső pontja eléggé nagy n mellett a p_n körívpoligon belsejében van.*



9. ábra

Legyen ui. e félkörkaréj valamely belső P pontjának ordinátája b. (6) alapján

(7) $$\frac{d_n}{2} < b, \text{ ha } n \text{ eléggé nagy.}$$

Miután fenti tételünk szerint a p_n körívpoligonnak a $\overset{\frown}{\Xi H}$-tól különböző oldalai közül a legnagyobb σ_n, amelynek sugara $\frac{d_n}{2}$, azért (7)-ből következik, hogy mindezen félkörívek sugara kisebb b-nél, tehát ezek valamennyien a P ponton átmenő $y=b$ egyenes alatt vannak (9. ábra). Következőleg P a p_n körívpoligon belsejében van.

Ez utóbbi tételből mármost nyilván következik, hogy a felső félsíkon felvett 01∞ körívháromszögnek az oldalakra vonatkozó szukcesszív tükrözésével nyert háromszöghálózat az egész felső félsíkot kitölti. Ugyanez érvényes tehát a moduláris alakzatra is, amely e hálózatból az egyes körívháromszögeknek a magasságokkal való hat részre osztásával s az így nyert kisebb háromszögeknek páronkénti összefoglalásával keletkezik. Ezzel a moduláris alakzat hézagtalanságát bebizonyítottuk.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] R. Dedekind, Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **83** (1877), 265—292, speciálisan § 2, 271—273, vagy Gesammelte mathematische Werke I, Braunschweig 1930, 174—201, speciálisan 180—183.

[2] F. Klein, Über die Transformation der elliptischen Funktionen und Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Mathematische Annalen **14** (1878—79), 111—172, speciálisan Abschnitt I, §§ 6—7, 119—122, vagy Gesammelte mathematische Abhandlungen III, Berlin 1923, 13—75, speciálisan 21—24.

[3] A. Hurwitz, Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe, Mathematische Annalen **18** (1881), 528—592, speciálisan 531—536, vagy Mathematische Werke I, Basel 1932, 1—66, speciálisan 5—10.

[4] A. Hurwitz, Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Mathematische Annalen **58** (1904), 343—360, speciálisan 343—347, vagy Mathematische Werke I, Basel 1932, 577—595, speciálisan 577—581.

[5] F. Klein—R. Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, I. Band, Leipzig 1890, Zweites Kapitel §§ 1—6, 208—223.

[6] H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, Acta Mathematica 1 (1882), 1—62 speciálisan 27—39, vagy Oeuvres II, Paris 1916, 134—146.

[7] H Poincaré, i. h. 12, resp. 118.

[8] V. ö. É. Picard, Traité d'analyse t. III., 3e ed., Paris 1928, 343—349.

[9] S. Saks—A. Zygmund, Analytic Functions, Translated by E. J. Scott, Warszava—Wroclaw 1952, Chapter VIII, §§ 11—12, 387—401.

[10] V. ö. pl. P. G. Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausg. von R. Dedekind, 4 Aufl., Braunschweig 1894, § 81, 195—197.

[11] Johannes Bolyai de eadem, Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens etc., Marosvásárhely 1832, § 11; magyarul lásd pl. Bolyai János, Appendix, Kárteszi Ferenc bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel, Budapest 1952, 83.

[12] Más bebizonyítást illetően v. ö. pl. W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, I. Band, 4. Aufl., Leipzig—Berlin 1923, 705—706.