ORTOGONÁLIS POLINOMOKRÓL*

FREUD GÉZA

Bemutatta Turán Pál r. tag az 1954. november 12-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen $w(x) \in L$ egy $(-1, +1)$-ben definiált, nemnegatív súlyfüggvény

$$\int_{-1}^{+1} w(x)dx > 0$$

és $\{p_n(x)\}$ legyen a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó a $(-1, +1)$ intervallumban ortogonális és normált polinomok sorozata. A szerző két korábbi cikkében [2], [3] ezen polinomok szerinti sorfejtéseket vizsgálta arra az esetre, ha a polinomok sorozata eleget tesz az

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} [p_\nu(x)]^2 = O(n) \tag{1}$$

feltételnek, azaz a polinomsorozat négyzete középértékben korlátos. Kimutattuk, hogy az $f(x) \in L^2(w)$ függvény ortogonális polinomsora ebben az esetben minden Lebesgue-pontban abszolut $(C, 1)$-szummálható, továbbá általánosítottuk S. N. BERNSTEINnek a Fourier-sorok abszolut konvergenciájára vonatkozó tételét [3] az ilyen típusú ortogonális polinomsorfejtésekre. Ezen tételeknek az adott különös jelentőséget, hogy mint a szerző [2] dolgozatában bebizonyította, ha $(-1, +1)$-nek egy tetszőleges (a, b) részintervallumában $w(x) \geq m > 0$, az ortogonális polinomok az (a, b) minden belső részintervallumában egyenletesen négyzetes középértékben korlátosak.

Ezen tételek érdekessége abban áll, hogy az ortogonális polinomsorfejtés abszolút konvergenciájára, ill. $(C, 1)$ szummálhatóságára a súlyfüggvény viselkedéséből következtethetünk anélkül, hogy az ortogonális polinomok korlátosságáról bármit is feltennénk.

Az a kérdés, hogy nem teljesül-e (1) majdnem minden olyan $x \in (-1, +1)$ pontban, ahol $w(x) > 0$, igen nehéznek látszik, és a szerző nem is tud rá jelenleg felelni. Megmutatjuk azonban, hogy amennyiben a $w(x)$ súlyfüggvény egy eléggé általános strukturális feltételnek tesz eleget, úgy majdnem minden x-re (1) teljesül.

Legyen a továbbiakban

$$W(\theta) = \begin{cases} w(\cos\theta)\sin\theta & 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 & \theta \bar{\in} [0, \pi] \end{cases} \tag{2}$$

* E dolgozat német nyelven megjelent az Acta Math. Hung. V. k. 3—4. füzetében.

I. TÉTEL: Legyen h elegendő kis értékére $\dfrac{W(\theta+h)-W(\theta)}{W(\theta)}$ L-integrálható és

$$\int_0^\pi \frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta = O\left(\log^{-\alpha}\frac{1}{|h|}\right) \tag{3}$$

ahol $\alpha > 1$. Akkor (1) majdnem minden x helyen teljesül.

Másrészt megmutatjuk, hogy az (1) alatti kifejezés viselkedéséről a $w(x)$ zérushelyeiből álló N ponthalmaz felett minden mellékfeltevés nélkül áttekintést nyerhetünk:

II. TÉTEL. Az N halmaz majdnem minden pontjában

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) = \infty. \tag{4}$$

Az I. tételnek legemlítésreméltóbb következménye:

III. TÉTEL: A súlyfüggvény elégítse ki ugyanazokat a feltételeket, mint az I. tételben. Akkor minden $f\in L^2(w)$ függvény ortogonális polinomsora az egész ortogonalitási intervallum majdnem minden pontjában erősen $(C, 1)$ szummálható.

TANDORI KÁROLY egy a szerzőét megelőző dolgozatában [5] kimutatta egy $f\in L^2(w)$ függvény ortogonális polinomsorának erős $(C, 1)$ szummálhatóságát azon erősebb feltétel mellett, hogy a polinomsorozat az ortogonalitási intervallum egy (α, β) belső részintervallumában egyenletesen korlátos. TANDORI dolgozatában megemlíti tételének következményét: ha a $w(x)$ súlyfüggvény egy pozitív mértékű N ponthalmazon zérus, akkor a normált ortogonális polinomsorozat nem maradhat az N halmazon egyenletesen korlátos. A II. tétel a fenti állítás finomításának tekinthető.

I. §. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)$ *approximációja az L-térben*

Meggondolásainkban, mint a szerző több előző dolgozatában is, fontos szerepet játszik az alábbi lemma:

I. SEGÉDTÉTEL: *Tekintsük az összes olyan legfeljebb $n-1$-edfokú $\Phi_{n-1}(x)$ polinomokat, melyekre*

$$\int_{-1}^{+1} [\Phi_{n-1}(t)]^2\, w(t)\,dt \leq 1. \tag{5}$$

Akkor $[\Phi_{n-1}(x)]^2$ *pontos maximuma*

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) \geq \Phi_{n-1}^2(x). \tag{6}$$

és ezt a maximumot akkor veszi fel, ha

$$\Phi^*_{n-1}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\, p_k(t)}{\left\{\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)\right\}^{1/2}}$$

(Lásd SZEGŐ [4] 38. o. 3.1, 3 tétel, ERDŐS és TURÁN [1]). Erdős és Turán ([1], 539—540 o.) egy gondolata nyomán legyen speciálisan

$$\Phi_{n-1}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\, T_k(t)}{\left\{\int_{-1}^{+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x) T_k(u)\right)^2 w(u)\,du\right\}^{1/2}}, \tag{7}$$

ahol $T_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $T_k(x)$ a k-adfokú Csebisev-polinom.

Akkor a segédtétel értelmében

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) \geq \frac{\left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k^2(x)\right)^2}{\int_{-1}^{+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\, T_k(t)\right)^2 w(t)\,dt} = \tag{8}$$

$$= \left(\frac{n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\int_{-1}^{+1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\, T_k(u)\right]^2 w(u)\,du}$$

ahol $\theta = \arccos x$.

Mármost tekintettel (2)-re

$$\int_{-1}^{+1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x) T_k(u)\right]^2 w(u)\,du = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\theta \cos k\varphi\right]^2 W(\varphi)\,d(\varphi) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}}{2}\, W(\theta) +$$

$$+ \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\,\theta \cos k\,\varphi\right]^2 [W(\varphi) - W(\theta)]\,d\varphi.$$

Elemi, a Fourier-sorok elméletéből ismert számítással adódik, hogy

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos k\theta\cos k\varphi\right|^2 \leqq c_1 \operatorname{Min}\left(n^2, \frac{1}{|\theta-\varphi|^2}\right),$$

hacsak $0 \leqq \theta \leqq \pi$ és $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Így tehát

$$\int_{-1}^{+1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\, T_k(u)\right]^2 w(u)\,du \leqq \frac{\pi}{2}\left\{\frac{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}}{2} W(\theta)+\right.$$

$$\text{(9)} \qquad \left. + c_2 \int_0^\pi \operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)|W(\varphi)-W(\theta)|\,d\varphi\right\}.$$

(8) és (9)-ből, az elemi $\frac{1}{a+b} \geqq \frac{a-b}{a^2}$ egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\text{(10)} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\cos\theta) \geqq \left(n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\right)\frac{1}{\pi}\cdot \frac{W(\theta)-c_2\int_0^\pi \operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)|W(\theta)-W(\varphi)|\,d\varphi}{W^2(\theta)}.$$

Ebből egyszerű átalakítással következik

$$\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\cos\theta)\, W(\theta) \leqq c_3 \int_0^\pi \operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)\cdot\frac{|W(\theta)-W(\varphi)|}{W(\theta)}\,d\varphi +$$

$$\text{(11)} \qquad + \frac{1}{2n}\left(1+\left|\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\right|\right).$$

Vezessük be az

$$\{a\}^+ = \begin{cases} a & \text{ha} \quad a>0 \\ 0 & \text{ha} \quad a \leqq 0 \end{cases}$$

jelölést. Mivel (11) jobboldala mindig pozitív, az egyenlőtlenség akkor is helyes marad, ha a baloldalt a pozitív részével helyettesítjük. θ szerint integrálva így kapjuk:

$$\int_0^\pi \left\{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\cos\theta) W(\theta)\right\}^+ d\theta \leqq$$

$$\text{(12)} \qquad \leqq c_3 \int_0^\pi\int_0^\pi \operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)\frac{|W(\theta)-W(\varphi)|}{W(\theta)}\,d\theta\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2n}\int_0^\pi\left(1+\left|\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\right|\right)d\theta.$$

A (12) egyenlőtlenség jobboldalán a második tag $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ nagyságrendű. Az első tagként szereplő integrálban vezessük be — θ mellett — a $h=\theta-\varphi$ változót, akkor (2) figyelembevételével kapjuk

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)\frac{|W(\theta)-W(\varphi)|}{W(\theta)}\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Min}\left(n,\frac{1}{nh^2}\right)\left\{\int_0^\pi\frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta\right\}dh=$$

$$=n\int_{-\frac{1}{n}}^{+\frac{1}{n}}\left\{\int_0^\pi\frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta\right\}dh+$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dh}{h^2}\left\{\int_0^\pi\frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta+\int_0^\pi\frac{|W(\theta-h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta\right\}$$

és így (3) felhasználásával

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \operatorname{Min}\left(n,\frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)\frac{|W(\theta)-W(\varphi)|}{W(\theta)}\,d\theta\,d\varphi=O(\log^{-\alpha}n),$$

tehát (12)-ből

$$\int_0^\pi\left\{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k^2(\cos\theta)\,W(\theta)\right\}^+d\theta=O(\log^{-\alpha}n). \tag{13}$$

Tekintettel arra, hogy a $p_k(x)$ polinomok normáltak, és így

$$\int_0^\pi\left\{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k^2(\cos\theta)\,W(\theta)\right\}d\theta=0,$$

(13)-ból következik, hogy

$$I_n=\int_0^\pi\left|\pi-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k^2(\cos\theta)\,W(\theta)\right|d\theta=O(\log^{-\alpha}n). \tag{14}$$

Ezt a becslést fogjuk felhasználni az I. tétel bizonyítására.

II. §. Becslés $\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)$-re

A (14) egyenlőtlenségből leolvasható, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} I_{2^\nu} < \infty,$$

tehát majdnem minden θ-ra

(15) $$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{2^\nu-1} p_k^2(\cos\theta) = \frac{\pi}{W(\theta)}.$$

Rögzítsünk most egy θ-t, amelyre (15) teljesül, akkor ezen θ helyhez választható olyan $K(\theta)$ ν-től független pozitív szám, hogy

$$\sum_{k=0}^{2^\nu-1} p_k^2(\cos\theta) < K2^\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Legyen most n egy tetszőleges egész szám, és

$$2^{m-1} \leq n < 2^m,$$

akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\cos\theta) \leq \sum_{k=0}^{2^m-1} p_k^2(\cos\theta) \leq K2^m \leq 2Kn.$$

Mivel azon θ-k halmaza, melyekre (15) nem áll fenn, az $x = \cos\theta$ leképezés után ismét egy nullmértékű halmazba megy át, bizonyításunk teljes.

A II. tétel bizonyítása.

A $w(x)$ $(-1, +1)$ nyilt intervallumba eső zérushelyei N halmazának majdnem minden x pontja Lebesgue-pont, azaz

(16) $$\int_{x-h}^{x+h} w(t)\,dt = o(h).$$

Kimutatjuk, hogy minden ilyen x pontra (4) érvényes. A $\Phi_{n-1}(t)$-nek ismét a (7) képletben definiált polinomot választjuk, akkor (5) mindenesetre teljesül, mégpedig az egyenlőségjellel.

Egy ma már klasszikusnak mondható okoskodással, amivel a Fejér—Lebesgue-tételt bizonyítják, belátható, hogy tekintettel (15)-re

(17) $$\int_{-1}^{+1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\,T_k(u)\right]^2 w(u)\,du = o(n).$$

Ennek következtében, tekintettel (7)-re

(18) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Phi_{n-1}^2(x) = \infty,$$

és végül (6) és (18)-ból

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) = \infty.$$

Q. e. d.

IRODALOM

[1] P. ERDŐS and P. TURÁN: On interpolation III. *Annals of Math.* 41 (1940), 510—553.

[2] G. FREUD: Über die starke $(C, 1)$— Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.* 3 (1952), 83—88.

[3] G. FREUD: Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.* 4 (1953), 127—136.

[4] G. SZEGŐ: Orthogonal polynomials. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* Vol. XXIII. (1939).

[5] K. TANDORI: Über die Cesarosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. *Acta. Math. Sci. Ac. Hung.* 3 (1952), 73—82.