AZ HERMITE—FEJÉR-FÉLE INTERPOLÁCIÓS ELJÁRÁS KONVERGENCIÁJÁRÓL*

FREUD GÉZA

Bevezetés

Legyen $w(x) \in L$ egy $(-1, +1)$-ben definiált nemnegatív súlyfüggvény, $\{p_n(x)\}$ legyen a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edfokú ortogonális polinomok sorozata. $p_n(x)$ gyökei legyenek $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ és az ezen alappontokhoz tartozó Hermite—Fejér-féle interpolációs alapfüggvények

$$h_{kn}(x) = v_{kn}(x)\, l_{kn}^2(x) \tag{1}$$

és

$$\mathfrak{h}_{kn}(x) = (x - x_{kn})\, l_{kn}^2(x), \tag{2}$$

ahol $l_{kn}(x)$ az $\{x_{in}\}$ alappontrendszer x_{kn} alappontjához tartozó Lagrange-féle interpolációs alapfüggvény

$$l_{kn}(x) = \frac{p_n(x)}{p_n'(x_{kn})\,(x - x_{kn})}, \tag{3}$$

továbbá

$$v_{kn}(x) = 1 - \frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})}(x - x_{kn}). \tag{4}$$

Az Hermite-féle interpolációs alapfüggvények definiciója értelmében tetszőleges legfeljebb $2n-1$-edfokú $\pi_{2n-2}(x)$ polinomra

$$\pi_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} [h_{kn}(x)\pi_{2n-1}(x_{kn}) + \mathfrak{h}_{kn}(x)\pi_{2n-1}'(x_{kn})]. \tag{5}$$

Legyen a továbbiakban $f(x)$ egy $(-1, +1)$-ben definiált függvény, és tekintsük a

$$H_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} h_{kn}(x) f(x_{kn}) + \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_{kn}(x)\, d_{kn} \tag{6}$$

polinomsorozatot, ahol a $\{d_{kn}\}$ egyébként tetszőleges számértékek nagyságrendjére később kikötéseket teszünk. $H_n(f; x)$ az a legfeljebb $2n-1$-edfokú polinom, amely az x_{kn} helyeken egyenlő $f(x)$-szel, és ugyanott differenciálhányadosa előírt d_{kn} $(k = 1, 2, \ldots n)$ értékeket vesz fel. A (6) polinomsorozat vizsgálatával először FEJÉR LIPÓT [4], [5], [6], [9] foglalkozott. FEJÉR nyomán normálisnak nevezünk egy alappontsorozatot, ha az összes alappontokra

$$v_{kn}(x) \geqq 0 \qquad -1 \leqq x \leqq 1, \tag{7}$$

* E dolgozat német nyelven megjelent az Acta Math. Ac. Sc. Hung. V. kötetében.

és szigorúan normálisnak, ha

(8) $$v_{kn}(x) \geqq \varrho > 0 \qquad -1 \leqq x \leqq 1,$$

ahol ϱ k-tól és n-től független pozitív szám. Fejér [7] kimutatta, hogy az $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ súlyfüggvényre ortogonális Jacobi-féle polinomok gyökei normális alappontrendszert alkotnak, ha $-1<\alpha, \beta \leqq 0$ és szigorúan normális alappontrendszert, ha $-1<\alpha, \beta<0$. Maga FEJÉR az Hermite-féle interpolációs eljárást elsősorban arra az esetre vizsgálta, ha az alappontok a Csebisev- ($\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$), ill. Legendre- ($\alpha=\beta=0$) polinomok gyökei. A Csebisev-esetben kimutatta, hogy a (6) Hermite-féle interpolációs parabolák $(-1,+1)$-ben egyenletesen tartanak $f(x)$-hez, ha a d_{kn} deriváltértékekre k-ban egyenletesen a

(9) $$d_{kn} = o\left(\frac{n}{\log n}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x_{kn}^2}}$$

becslés érvényes. Kimutatta továbbá, hogy amennyiben az alappontok a Legendre-polinomok gyökei és a d_{kn} számok egyenletesen korlátosak, az interpolációsorozat $(-1,+1)$ minden belső részintervallumában egyenletesen konvergál. Később FEJÉR [9] kimutatta, hogy tetszőleges normális alappontrendszer esetén is $H_n(f;x)\to f(x)$ hacsak a d_{kn} számmátrixot $f(x)$-től függően alkalmas módon választjuk. FEJÉR munkájához csatlakozik GRÜNWALD GÉZA dolgozata [13]; ebben kimutatja, hogy az Hermite-féle interpolációs parabolák $(-1,+1)$ minden belső részintervallumában $f(x)$-hez tartanak, ha az alappontrendszer normális és a $\{d_{kn}\}$ számmátrix tagjai egyenletesen korlátosak. Ha ezenfelül az alappontrendszer szigorúan normális, akkor a konvergencia az egész $(-1,+1)$ intervallumban egyenletes. Kimutatta még, hogy ebben az esetben a $\{d_{kn}\}$ mátrix korlátossága helyettesíthető $|d_{kn}|<An^{\varrho-\varepsilon}$-nal, ahol ϱ a (8)-ban fellépő pozitív szám.

Csak Jacobi-polinomokra szorítkozva (az $\alpha>0, \beta>0$ esetre is), az Hermite-féle interpolációs eljárás konvergenciáját SZEGŐ [16] és SHOHAT [15] vizsgálták.

TURÁN PÁL vetette fel a kérdést személyes megbeszélések során, nem lehet-e az Hermite-féle interpolációs eljárás konvergenciájára következtetni, ha az $\{x_{kn}\}$ alappontrendszernek egy általános $w(x)$ pozitív súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok zérushelyeit választjuk. A továbbiakban az ilyen interpolációs eljárást „$w(x)$-hez rendelt interpolációnak" fogjuk nevezni. Tájékozódás szempontjából megjegyezzük, hogy bizonyos Jacobi-polinomok esetén FEJÉR [7] (7) ill. (8) fennállását az ezen polinomokra érvényes másodrendű lineáris differenciálegyenlet segítségével bizonyította. Az a probléma viszont, hogy az ortogonális polinomok milyen általánosabb osztályához adható meg ilyen differenciálegyenlet, az ortogonális polinomok elméletének mind a mai napig megoldatlan nehéz kérdése. Általános súlyfüggvényhez tartozó polinomok gyökhelyeit választva alappontoknak, ez ideig az sem volt ismeretes, hogy az Hermite-interpoláció konvergál-e, ha $f(x)$ folytonosan differenciálható és $d_{kn} = f'(x_{kn})$.

TURÁN PÁL egy szóbeli közlése szerint, ha a $w(\cos\theta)\sin\theta = g(\theta)$ függvény a $0 \leq \theta \leq \pi$-ben egyenletesen 1-nél nagyobb exponensű logaritmikus Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor a $w(x)$-hez rendelt Hermite—Fejér-féle lépcsőparabola folytonos $f(x)$ esetén konvergál. Ennek bizonyítása S. N. BERNSTEIN [1] tétele alapján végezhető, amely ezen feltétel mellett aszimptotikus kifejezést szolgáltat $p_n(x)$-re.

Az alábbiakban két tételt fogunk bizonyítani:

Mindkét tételünknél feltételezzük, hogy a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó normált ortogonális polinomok sorozata az (α, β) részintervallumban egyenletesen korlátos:

$$|p_n(x)| \leq K \qquad \alpha \leq x \leq \beta. \tag{10}$$

Továbbá a $\{d_{kn}\}$ számmátrixot úgy választjuk, hogy

$$d_{kn} = \begin{cases} o\left(\dfrac{n}{\log n}\right), & \text{ha } \alpha \leq x_{kn} \leq \beta \\ o\left\{\operatorname{Min}\left(\dfrac{n}{\sqrt{1-x_{kn}^2}}, n^2\right)\right\} & \text{minden } x_{kn}\text{-re} \end{cases} \tag{11}$$

x_{kn}-ben egyenletesen fennálljon.

Bebizonyítjuk a következő két tételt:

I. TÉTEL: A $w(x) \in L$ súlyfüggvény legyen az egész $[-1, +1]$ zárt intervallumban folytonos és pozitív, továbbá $w(x)$ (α, β)-ban tegyen eleget a

$$w(x_1) - w(x_2) = o\left(\log^{-1}\frac{1}{|x_2 - x_1|}\right) \tag{12}$$

Dini—Lipschitz-feltételnek. Akkor a (6) Hermite-féle interpolációsorozat minden $\alpha < \xi < \beta$ helyen $f(\xi)$-hez konvergál, ha $f(x)$ a $\xi, -1, +1$ helyeken folytonos, $(-1, +1)$-ben korlátos függvény. Ha $f(x)$ az egész (α, β)-ban folytonos, akkor az interpolációsorozat (α, β) minden belső részintervallumában egyenletesen konvergál.

II. TÉTEL: Legyen

$$0 < m \leq w(x) \leq M \qquad (-1 \leq x \leq +1). \tag{13}$$

Az $f(x)$ függvény legyen a zárt $[-1, +1]$ intervallumban folytonos, és az (α, β) részintervallumban tegyen eleget a

$$f(x_1) - f(x_2) = o\left(\log^{-1}\frac{1}{|x_2 - x_1|}\right) \quad (\alpha \leq x_1, x_2 \leq \beta) \tag{14}$$

Dini—Lipschitz-feltételnek. Akkor a (6) Hermite-féle interpolációsorozat (α, β) minden belső részintervallumában egyenletesen $f(x)$-hez konvergál.

Jegyezzük meg, hogy a (13) alatti egyenlőtlenség $w(x)$ folytonossága és pozitivitása miatt I. tétel feltevéseiből is következik.

A Cotes-féle számok egy általánosítása

Legyen $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x), \ldots$ a $w(x) \in L$ pozitív súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata. Legyen $-1 < \xi < 1$ és legyenek

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$$

a $p_{n-1}(\xi)p_n(x) - p_n(\xi)p_{n-1}(x)$ x-ben n-edfokú polinom gyökei; ezek egyike $\xi_\nu = \xi$. Egyelőre kikötjük, hogy $p_{n-1}(\xi) \neq 0$. Legyenek $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x)$ a $\{\xi_i\}$ alappontrendszerhez tartozó Lagrange-féle interpolációs parabolák és vezessük be az

$$l_\nu(x) = l_n(x, \xi), \int_{-1}^{+1} l_n(x, \xi)\, w(x)\, dx = \lambda_n(\xi)$$

jelölést. $l_n(x, \xi)$-t a ξ helyhez tartozó Lagrange-parabolának, $\lambda_n(\xi)$-t a ξ helyhez tartozó Cotes-féle számnak fogjuk nevezni. A Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadraturaképlet általánosításaként fennáll az alábbi összefüggés. Ha $\pi_{2n-2}(x)$ tetszőleges legfeljebb $2n-2$-edfokú polinom, akkor

$$\int_{-1}^{+1} \pi_{2n-2}(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \pi_{2n-2}(\xi_k) \int_{-1}^{+1} l_k(x)\, w(x)\, dx, \tag{15}$$

ahol

$$\int_{-1}^{+1} l_k(x) w(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} l_k^2(x)\, w(x)\, dx > 0.* \tag{16}$$

Ebből leolvasható, hogy

$$\lambda_n(\xi) = \int_{-1}^{+1} l_n(x, \xi)\, w(x) dx = \int_{-1}^{+1} l_n^2(x, \xi)\, w(x)\, dx > 0, \tag{17}$$

továbbá hogy $\lambda_n(\xi)$ a pontos minimuma az

$$\int_{-1}^{+1} [\pi_{n-1}(x)]^2\, w(x)\, dx$$

integrálnak, ha $\pi_{n-1}(x)$ végigfut az összes olyan legfeljebb $n-1$-edfokú polinomokon, melyekre $\pi_{n-1}(\xi) \geqq 1$.

Megjegyezzük, hogy (15) és (16)-ból leolvasható az az élesebb állítás, hogy $\lambda_n(\xi)$ az

$$\int_{-1}^{+1} \pi_{2n-2}(x)\, w(x)\, dx$$

pontos minimuma, ha $\pi_{2n-2}(x)$ az összes legfeljebb $2n-2$-edfokú polinomokat befutja, melyek az egész zárt $[-1, +1]$ intervallumban nemnegatívok és a $\pi_{2n-2}(\xi) \geqq 1$ feltételt teljesítik.

* Lásd Fejér L. [8].

Ezt a minimumproblémát SZEGŐ G. [17], továbbá ERDŐS P. és TURÁN P. [3] vizsgálták. SZEGŐ G. [17] (3.1.3 tétel) egy nevezetes lemmája alapján

$$(18)\qquad \lambda_n(\xi)=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\xi)}=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\frac{1}{p_n'(\xi)p_{n-1}(\xi)-p_{n-1}'(\xi)p_n(\xi)}.$$

A jobboldali egyenlőséghez a Christoffel—Darboux-féle összegképletet használtuk fel; α_n jelenti x^n együtthatóját a $p_n(x)$ polinomban.

Ilyen módon a Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadratura n-edrendű Cotes-féle számait egy n-edrendű $\lambda_n(\xi)$ „Cotes-függvénnyé" általánosítottuk, amely nemcsak a $p_n(x)$ zérushelyein, hanem minden valós ξ helyen értelmezve van.

Ha $p_{n-1}(\xi)=0$, akkor (18) alapján $\lim\limits_{\xi'\to\xi}\lambda_n(\xi')=\lambda_{n-1}(\xi)$, ezért a $p_{n-1}(x)$ gyökhelyein definíciószerűen legyen $\lambda_n(\xi)=\lambda_{n-1}(\xi)$.

Ha $w(x)\leqq W(x)$ és $\Lambda_n(\xi)$ a $W(x)$-hez rendelt n-edrendű Cotes-féle függvényt jelenti, a minimumtulajdonságból következik, hogy

$$\lambda_n(\xi)\leqq\Lambda_n(\xi).$$

Ezt az egyenlőtlenséget először ERDŐS P. és TURÁN P. [3] találták és alkalmazták interpolációelméletbeli kérdésekre.

Tekintettel (18)-ra, $\lambda_n(\xi)$ differenciálható, és

$$\frac{\lambda_n'(\xi)}{\lambda_n(\xi)}=-\frac{p_n''(\xi)p_{n-1}(\xi)-p_{n-1}''(\xi)p_n(\xi)}{p_n'(\xi)p_{n-1}(\xi)-p_{n-1}'(\xi)p_n(\xi)}.$$

Ha tehát x_{kn} a $p_n(x)$ egyik gyöke, akkor

$$(19)\qquad \frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_n(x_{kn})}=-\frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})}.$$

A (19) képlet további meggondolásaink alapja, segítségével becsüljük $v_{kn}(x)$-et.

Erdős és Turán néhány tételéről

Összes meggondolásunk kiindulópontja ERDŐS és TURÁN [3] interpolációelméleti munkája. Röviden idézzük és helyenként továbbépítjük azokat az eredményeket, amelyek abból a továbbiakban felhasználásra kerülnek. A $\lambda_n(\xi)$ minimumtulajdonságából kiindulva, ez előállítható a

$$(20)\qquad \lambda_n(\xi)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{l_{kn}^2(\xi)}{\lambda_{kn}}}$$

alakban. Ebből a $\lambda_n(\xi)$ minimumtulajdonságának és $w(x)\geqq m>0$-nak felhasználásával ERDŐS és TURÁN* kimutatták, hogy $(-1,+1)$ minden belső rész-

* i. m. [3].

intervallumára egyenletesen

(21) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{l_{kn}^2(x)}{\lambda_{kn}} = O(n).$$

$w(x) \leqq M$-ből következik, hogy létezik egy csak h-tól függő pozitív $c_0(h)$ szám, melyre

(22) $$\lambda_{kn} \geqq \frac{c_0(h)}{n} \qquad (-1+h \leqq x_{kn} \leqq 1-h)$$

teljesül. (21) és (22)-ből kiindulva triviálisan bebizonyítható az alábbi segédtétel:

I. Segédtétel: Fennáll

(23) $$\sum_{|x_{kn}| < 1-h} l_{kn}^2(x) = O(1),$$

ahol $(-1+h, 1-h)$ a $(-1, +1)$-nek egy rögzített belső részintervalluma, és $(-1, +1)$ minden belső részintervallumában (23) x-ben egyenletesen teljesül.

Erdős P. és Turán P. megmutatják továbbá, hogy (13) következtében léteznek $c_1(h)$ és $c_2(h)$ pozitív számok, hogy két $(-1+h, 1-h)$-ba eső szomszédos x_{kn} és $x_{k+1,n}$ gyökhelyre fennáll a

(24) $$\frac{c_1(h)}{n} \leqq x_{k+1,n} - x_{kn} \leqq \frac{c_2(h)}{n}$$

egyenlőtlenség.

II. Segédtétel:

(25) $$\lambda_n(\xi) < 100\,M\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Bizonyítás: $\lambda_n(\xi)$ minimumtulajdonsága következtében

(26) $$\lambda_n(\xi) \leqq M \cdot \Lambda_n(\xi),$$

ahol $\Lambda_n(\xi)$ a $h(x) \equiv 1$ súlyfüggvényhez tartozó n-edik Cotes-féle függvény. Legyen

(27) $$\psi_{2n-2}(\cos\theta) = g(\theta - \vartheta) + g(\theta + \vartheta),$$

ahol $\xi = \cos\vartheta$ $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ és

$$g(t) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$$

a Jackson-féle approximációs magfüggvény. Jackson [14] tételét a

$$h(\theta) = \begin{cases} \sin\theta & \text{ha} \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 & \text{ha} \quad -\pi \leqq \theta \leqq 0 \end{cases}$$

függvényre alkalmazva, amely $(0, 2\pi)$-ben eleget tesz a

$$|h(\theta_1)-h(\theta_2)|<|\theta_1-\theta_2|$$

Lipschitz-feltételnek, kapjuk, hogy*

$$(28)\qquad \left|\int_0^n [g(\theta-\vartheta)+g(\theta+\vartheta)]\sin\theta\, d\theta-\sin\vartheta\right|<\frac{12}{n}.$$

(27)-ből leolvasható, hogy

$$(29)\qquad \psi_{2n-2}(\xi)\geqq g(0)>\frac{1}{7}n.$$

$\pi_{2n-2}(x)=\frac{7}{n}\psi_{2n-2}(x)$ polinom $[-1, +1]$-ben nemnegatív és a ξ helyen $\pi_{2n-2}(\xi)\geqq 1$; tehát a minimumtulajdonság és (28) figyelembevételével

$$(30)\qquad \Lambda_n(\xi)\leqq\int_{-1}^{+1}\pi_{2n-2}(x)dx=\frac{7}{n}\int_{-1}^{+1}[g(\theta-\vartheta)+g(\theta+\vartheta)]\sin\vartheta\, d\vartheta<$$

$$<\frac{7}{n}\left(\sin\vartheta+\frac{12}{n}\right)=\frac{7\sqrt{1-\xi^2}}{n}+\frac{84}{n^2}.$$

(26) és (30)-ból következik (25).

III. Polinomok maximumának becsléséről

Idézzük S. N. Bernstein következő tételét [1]: Legyen $\pi_n(x)$ n-edfokú polinom, $(-1, +1)$-ben teljesüljön

$$|\pi_n(x)|\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

akkor fennáll a következő becslés:

$$|\pi_n(x)|\leqq n+1.$$

Hasonló tételeket akarunk bizonyítani majoránsfüggvények egy jóval általánosabb osztályára. Ezen általánosított becsléseknek a továbbiakban jelentős szerepük lesz. A $\pi_n(x)$ n-edfokú polinom majoránsa $[-1, +1]$-ben legyen $\mu(x)$:

$$(31)\qquad |\pi_n(x)|\leqq\mu(x)\qquad(-1\leqq x\leqq+1).$$

A $\mu(x)$ függvény a $[-1, +1]$ véges számú helyén váljék csak végtelenné és ezen helyek egy kis környezetének kizárásával a $[-1, +1]$ minden ponthalmazán legyen korlátos.

Ezen feltételek mellett minden (31)-nek eleget tevő polinom értékére egy egységes, csak n-től és $\mu(x)$ viselkedésétől függő korlát adható meg. $\pi_n(x)$ maximuma $[-1, +1]$-ben legyen $|\pi_n(x_0)|=\mu_0$. Markov tétele szerint

* Lásd pl. J. P. Natanszon: Konstruktív függvénytan 88. o.

$|\pi_n'(x)| \leqq n^2\mu_0$ $[-1, +1]$-ben. Így azokon az x_1 helyeken, melyek $[-1, +1]$-be és egyúttal $\left[x_0-\frac{1}{2n^2}, x_0+\frac{1}{2n^2}\right]$-be esnek, az első középértéktétel szerint

$$|\pi_n(x_0)-\pi_n(x_1)| \leqq \frac{1}{2n^2}n^2\mu_0=\frac{\mu_0}{2},$$

tehát $|\pi_n(x_1)| \geqq \frac{\mu_0}{2}$ és végül

$$\mu_0 \leqq 2|\pi_n(x_1)|.$$

Ebből az alábbi tétel következik:

III. A. SEGÉDTÉTEL. Legyen $I_n \in [-1, +1]$ egy $\frac{1}{2n^2}$ hosszúságú intervallum, legyen továbbá I_n-ben $\mu^*(I_n)$ $\mu(x)$ alsó határa és $\mu_0^*\mu^*(I_n)$ felső határa, ha I_n befutja $[-1, +1]$ összes $\frac{1}{2n^2}$ hosszúságú részintervallumait. Akkor minden, a (31)-nek eleget tevő legfeljebb n-edfokú polinomra érvényes a

$$|\pi_n(x)| \leqq 2\mu_0^*$$

becslés.

Hasonló becslést kapunk, ha MARKOV tétele helyett BERNSTEIN tételét alkalmazzuk egy trigonometrikus polinom deriváltjaira. Legyen $\tau_n(x)$ egy legfeljebb n-edfokú trigonometrikus polinom, és legyen

$$|\tau_n(x)| \leqq \nu(x), \tag{31a}$$

ahol $\nu(x)$ egy 2π szerint periódikus, $\mu(x)$-hez hasonló tulajdonságú függvény.

III. B. SEGÉDTÉTEL. Legyen J_n egy tetszőleges $\frac{1}{n}$ hosszúságú intervallum és $\nu^*(J_n)=\inf\limits_{x\in J_n}\nu(x)$; továbbá legyen $\nu_0^*=\sup \nu^*(J_n)$. Ekkor (31a)-ból következik

$$|\tau_n(x)| \leqq 2\nu_0^*.$$

Mivel $\pi_n(\cos\theta)$ egy legfeljebb n-edfokú trigonometrikus polinom, a III. B. segédtételből következik az alábbi

III. C. SEGÉDTÉTEL: Legyen

$$\mu^{**}(\xi)=\inf_{|\xi-\xi'|\leqq\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{4n}}\mu(\xi')$$

és

$$\mu_0^{**}=\sup\mu^{**}(\xi)$$

ha ξ átfutja a $|\xi|+\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{4n}\leqq 1$-nek elegettevő összes értékeket. Akkor (31)-ből következik

$$|\pi_n(x)| \leqq 2\mu_0^{**}. \qquad (-1\leqq x\leqq 1)$$

Figyeljük meg, hogy $\xi=\cos\vartheta$, $\xi'=\cos\vartheta'$ és $|\xi-\xi'|\leqq\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{4n}=\frac{\sin\vartheta}{4n}$, továbbá $0\leqq\vartheta,\vartheta'\leqq\pi$-ből következik, hogy $|\vartheta-\vartheta'|\leqq\frac{1}{2n}$.

Ezen tétel első alkalmazásaként tekintsünk egy olyan $f(x)$ függvényt, mely eleget tesz a II. tétel követelményeinek, azaz $[-1,+1]$-ben folytonos és (α,β)-ban eleget tesz a (14) alatti Dini—Lipschitz-feltételnek. Ekkor létezik egy olyan $\{q_n(x)\}$ polinomsorozat (pl. az $f(x)$-hez tartozó Jackson-féle approximációs polinomok), hogy $q_n(x)$ legfeljebb n-edfokú, és a folytonos $f(x)$-et $[-1,+1]$-ben $q_n(x)$-szel egyenletesen approximálhatjuk úgy, hogy minden (α,β) részintervallumban

$$f(x)-q_n(x)=o\left(\frac{1}{\log n}\right)\qquad(\alpha<x<\beta).\tag{32}$$

Ezek előrebocsátásával megbecsüljük $q_n'(x)$-et. Legyen először $x\in(\alpha,\beta)$, akkor (14) és (32)-ből következik

$$\left|\frac{q_n(x)-q_n(x_1)}{x-x_1}\right|\leqq\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right|+\frac{1}{|x-x_1|}o\left(\frac{1}{\log n}\right)$$
$$=\frac{1}{|x-x_1|}\left\{o\left(\log^{-1}\frac{1}{|x-x_1|}\right)+o\left(\frac{1}{\log n}\right)\right\}.$$

A jobboldal nagyságrendje, egy tetszőleges rögzített pozitív c_3-ra és $|x-x_1|>\frac{c_3}{n}$ mellett, $o\left(\frac{n}{\log n}\right)$, tehát III. C. tétel szerint, amennyiben $\frac{q_n(x)-q_n(x_1)}{x-x_1}$ egy x_1-ben $n-1$-edfokú polinom,

$$q_n'(x)=o\left(\frac{n}{\log n}\right)\qquad(\alpha<x<\beta)\tag{33}$$

az egész (α,β) részintervallumban egyenletesen. Másrészt minden $[-1,+1]$-ben levő x-re fennáll

$$\left|\frac{q_n(x)-q_n(x_1)}{x-x_1}\right|\leqq\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right|+\frac{1}{|x-x_1|}o(1),$$

így III. A. és III. C. tételekből kapjuk, hogy

$$q_n'(x)=\begin{cases}o\left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ o(n^2)\end{cases}\tag{34}$$

$[-1,+1]$-ben egyenletesen. (34)-et megkaphatjuk egy egyszerűbb, elegánsabb gondolatmenettel is, melyet először FEJÉR L. [10] alkalmazott trigonometrikus sorok konjugáltjára vonatkozó dolgozatában. Azonban (33) ezen a módon nem bizonyítható.

IV. A hullámparabola becslése

IV. Segédtétel: Az $(\alpha+2\delta, \beta-2\delta)$ valamely belső részintervallumába eső x értékekre egyenletesen

$$\sum_{|x_{kn}-x|<\delta}' |x-x_{kn}|\, l_{kn}^2(x) = O\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{35}$$

Bizonyítás: Mint egy előző dolgozatomban kimutattam [11]

$$l_{kn}(x) = \lambda_{kn} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{p_{n-1}(x_{kn})p_n(x)}{x-x_{kn}}, \tag{36}$$

ahol

$$0 < \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} < 1. \tag{37}$$

x_{jn} és $x_{j+1,n}$ legyenek $p_n(x)$ x-hez legközelebbi gyökhelyei; akkor (25) és (10) szerint

$$\sum_{|x-x_{kn}|<\delta}' |x-x_{kn}|\, l_{kn}^2(x) < O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{|x-x_{kn}|<\delta}'' \frac{1}{|x-x_{kn}|} + \tag{38}$$

$$+ |x-x_{jn}|\, l_{jn}^2(x) + |x-x_{j+1,n}|\, l_{j+1,n}^2(x).$$

a Σ''-ban $k=j$ és $k=j+1$ tagok nem szerepelnek. (24) baloldalából kapjuk

$$\Sigma'' \frac{1}{|x-x_{kn}|} < 2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu \frac{c_1}{n}} = O(n \log n).$$

(23) és (24) jobboldalából

$$|x-x_{jn}|\, l_{jn}^2(x) + |x-x_{j+1,n}|\, l_{j+1,n}^2(x) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ebből pedig (35) következik.

V. Segédtétel: Legyen

$$|\gamma_{kn}| < \varrho \frac{n}{\sqrt{1-x_{kn}^2}} \quad \text{és} \quad |\gamma_{kn}| < \varrho n^2, \tag{39}$$

akkor van egy n-től független c_5 konstans, hogy a

$$\left| \sum_{|x-x_{kn}|>\delta}' \gamma_{kn} l_{kn}^2(x) \right| < \frac{c_5 \varrho}{\delta^2} \tag{40}$$

egyenlőtlenség fennáll.

Bizonyítás: (10), (36) és (37)-ből

$$\sum_{|x-x_{kn}|>\delta}' |\gamma_{kn}|\, l_{kn}^2(x) \leq \frac{K^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{kn}|\, p_{n-1}^2(x_{kn}) \lambda_{kn}^2;$$

tehát tekintettel (39)-re és II. segédtételre $|\gamma_{kn}|\lambda_{kn} \leqq 200\,M\varrho$; így kapjuk, hogy

$$\sum_{|x-x_{kn}|<\delta} |\gamma_{kn}| l_{kn}^2(x) \leq \frac{200\,MK^2\varrho}{\delta^2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} p_{n-1}^2(x_{kn}) =$$

$$= 200\,MK^2 \frac{\varrho}{\delta^2} \int_{-1}^{+1} p_{n-1}^2(x)\, w(x)\, dx =$$

$$= \frac{200\,MK^2\varrho}{\delta^2}.$$

V. Segédtételek a lépcsőparabola becsléséhez

VI. SEGÉDTÉTEL:

$$\left| \frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_n^2(x_{kn})} \right| \leqq c_6 \frac{n^2}{1-x_{kn}^2} \tag{41}$$

és

$$\frac{|\lambda_n'(x_{kn})|}{\lambda_{kn}^2} \leqq c_6 n^4. \tag{42}$$

BIZONYÍTÁS: Az Erdős—Turán-féle variációs lemma értelmében, miután $w(x) \geqq m$,

$$\frac{1}{\lambda_n(\xi)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\xi) < \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} P_k^2(\xi), \tag{43}$$

ahol $P_k(\xi)$ a k-adik Legendre-polinom. Ismert becslés* szerint

$$|P_k(\xi)| \leqq \frac{c_7}{\sqrt{k}(1-\xi^2)^{1/4}}, \tag{44}$$

ahol c_7 k-tól és ξ-től független, tehát

$$0 < \frac{1}{\lambda_n(\xi)} \leqq c_8 \frac{n}{\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{45}$$

Mivel $\lambda_n^{-1}(\xi)$ $2n-2$-edfokú polinom, BERNSTEIN-nek a III. rész elején említett tételéből következik

$$0 < \frac{1}{\lambda_n(\xi)} \leqq 2c_8 n^2 \tag{46}$$

és differenciálás útján MARKOV tételének következtében

$$\frac{|\lambda_n'(\xi)|}{\lambda_n^2(\xi)} < 8c_8 n^4.$$

* L. Szegő [17] 160. o.

Ezzel (42)-t bizonyítottuk. Másrészt (45)-ből $\xi = \cos\theta$ helyettesítéssel kapjuk

$$0 < \frac{\sin\theta}{\lambda_n(\cos\theta)} \leq c_8\, n;$$

itt egy $2n-1$-edfokú trigonometrikus polinom áll, így BERNSTEIN tételét alkalmazva differenciálással kapjuk, hogy

$$\left| -\frac{\lambda_n'(\cos\theta)}{\lambda_n^2(\cos\theta)}\sin^2\theta + \frac{\cos\theta}{\lambda_n(\cos\theta)} \right| \leq 2c_8 n^2. \tag{47}$$

(46) és (47)-ből következik (41).

Megjegyezzük, hogy (42) a III. A. segédtétel szerint (41) következménye.

II. és VI. segédtételekből következik

$$\frac{|\lambda_n'(x_{kn})|}{\lambda_{kn}} \leq c_9 \operatorname{Min}\left(\frac{n}{\sqrt{1-x_{kn}^2}},\, n^2 \right). \tag{48}$$

VII. SEGÉDTÉTEL: Az $(\alpha+2\delta, \beta-2\delta)$ intervallumba eső x-ekre egyenletesen

$$\sum_{|x-x_{kn}|\leq\delta} |v_{kn}(x)|\, l_{kn}^2(x) = O(\log n).$$

BIZONYÍTÁS: Miután (19)- és (4)-ből

$$v_{kn}(x) = 1 + \frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_{kn}}(x - x_{kn}) \tag{49}$$

az I. segédtétel szerint elegendő kimutatnunk, hogy

$$\sum_{|x-x_{kn}|\leq\delta} \left| \frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_{kn}} \right| |x - x_{kn}|\, l_{kn}^2(x) = O(\log n),$$

ez azonban teljesül, tekintettel (48)-ra és a IV. segédtételre. Q.e.d.

VIII. SEGÉDTÉTEL:

$$\sum_{|x-x_{kn}|\geq\delta} |v_{kn}(x)|\, l_{kn}^2(x) = o(1). \tag{50}$$

BIZONYÍTÁS: Az állítás következik (48), (49)-ből és az V. segédtételből.

A II. tétel bizonyítása

Tekintsük azon $\{q_n(x)\}$ polinomsorozatot, amely eleget tesz (32), (33), ill. (34)-nek. Már most

$$\begin{aligned} H_n(f,x) - q_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_{kn}) - q_n(x_{kn})]\, v_{kn}(x)\, l_{kn}^2(x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} [d_{kn} - q_n'(x_{kn})]\,(x - x_{kn})\, l_{kn}^2(x) = A_{1n} + A_{2n} + A_{3n} + A_{4n}, \end{aligned} \tag{51}$$

ahol

(52) $$A_{1n}=\sum_{|x-x_{kn}|\leqq\delta}[f(x_{kn})-q_n(x_{kn})]\,v_{kn}(x)\,l_{kn}^2(x)$$

(53) $$A_{2n}=\sum_{|x-x_{kn}|>\delta}[f(x_{kn})-q_n(x_{kn})]\,v_{kn}(x)\,l_{kn}^2(x)$$

(54) $$A_{3n}=\sum_{|x-x_{kn}|\leqq\delta}[d_{kn}-q_n'(x_{kn})]\,(x-x_{kn})\,l_{kn}^2(x)$$

és végül

(55) $$A_{4n}=\sum_{|x-x_{kn}|>\delta}[d_{kn}-q_n'(x_{kn})]\,(x-x_{kn})\,l_{kn}^2(x).$$

VII. segédtétel és (32) szerint

$$A_{1n}=o(1),$$

VIII. segédtételből és $q_n(x)\to f(x)$ következtében

$$A_{2n}=o(1),$$

IV. segédtétel szerint (11) és (33)-ból

$$A_{3n}=o(1),$$

végül V. segédtételből és (11), (34) következtében

$$A_{4n}=o(1).$$

Így tehát fennáll

$$H_n(f;(x))-q_n(x)=A_{1n}+A_{2n}+A_{3n}+A_{4n}=o(1)$$

és ebből következik, hogy

$$H_n(f,x)\to f(x),$$

q. e. d.

Pontosabb becslés $\lambda_n'(\xi)$-re

A következőkben teljesüljenek I. tétel feltételei.

Legyen $-1<\xi_1<\xi_2<1$ és $\varphi(x)$ legyen az a lineáris függvény, melyre $\varphi(\xi_1)=\xi_2$ és $\varphi(1)=1$:

$$\varphi(x)=1+\frac{1-\xi_2}{1-\xi_1}(x-1).$$

$[-1,+1]$-ben $\varphi(x)\leqq 1$ és $\varphi(x)$ legkisebb értéke

$$\eta=\varphi(-1)=-1+\frac{2(\xi_2-\xi_1)}{1-\xi_1}>-1,$$

végül

(56) $$0\leqq\varphi(x)-x\leqq\eta+1=\frac{2}{1-\xi_1}(\xi_2-\xi_1),\qquad(-1\leqq x\leqq 1).$$

Az $l_n(\varphi(x),\xi_2)$ legfeljebb $n-1$-edfokú polinom az $x=\xi_1$ helyen az

$l_n(\xi_2, \xi_2) = 1$ értéket veszi fel; tehát $\lambda_n(\xi)$; minimumtulajdonsága következtében

$$\lambda_n(\xi_1) \leqq \int_{-1}^{1} l_n^2(\varphi(t), \xi_2) w(t)\, dt. \tag{57}$$

Legyen

$$\Phi(x) = 1 + \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}(x-1) \tag{58}$$

a $\varphi(x)$ inverz függvénye; (56) következtében

$$0 \leqq x - \Phi(x) \leqq \frac{2}{1-\xi_1}(\xi_2 - \xi_1) \qquad (\eta \leqq x \leqq 1). \tag{59}$$

$t = \Phi(x)$ helyettesítéssel (57)-ből következik

$$\lambda_n(\xi_1) \leqq \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} \int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi_2) w(\Phi(x))\, dx.$$

(57)-ből, tekintettel (17)-re

$$\begin{aligned} \lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) \leqq & \int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi_2)[w(\Phi(x)) - w(x)]\, dx + \\ & + \frac{\xi_2 - \xi_1}{1-\xi_2} \int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi_2) w(\Phi(x))\, dx. \end{aligned} \tag{60}$$

Hasonlóan, ha $\varphi^*(x)$ az a lineáris függvény, amelyre $\varphi^*(-1) = -1$ és $\varphi^*(\xi_2) = \xi_1$, ennek inverze legyen $\Phi^*(x)$ és $\varphi^*(1) = \eta^*$, akkor $[-1, +1]$-ben

$$\varphi^*(x) \geqq -1$$

$$\varphi^*(x) \leqq \eta^* = \varphi^*(1) = 1 - \frac{2(\xi_2 - \xi_1)}{1+\xi_2} < 1$$

és

$$0 \leqq \Phi^*(x) - x \leqq \frac{2}{1+\xi_2}(\xi_2 - \xi_1). \tag{56a}$$

Ugyanazzal a meggondolással, mint az előbb, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) \geqq & - \int_{-1}^{\eta^*} l_n^2(x, \xi_1)[w(\Phi^*(x)) - w(x)]\, dx - \\ & - \frac{\xi_2 - \xi_1}{1+\xi_1} \int_{-1}^{\eta^*} l_n^2(x, \xi_1) w(\Phi^*(x))\, dx. \end{aligned} \tag{60a}$$

Válasszuk meg δ^*-ot olyan kicsinek, hogy ha $|\xi_2 - x| < \delta^*$, akkor $|\Phi(x) - x| < \delta$. Tekintettel (12) és (56)-ra

$$\max_{|x-\xi_2| < \delta^*} |w(\Phi(x)) - w(x)| = o\left(\log^{-1} \frac{1}{|\xi_2 - \xi_1|}\right). \tag{61}$$

$w(x)$ folytonossága következtében x-ben egyenletesen

(62) $$w(\Phi(x))-w(x)=o(1) \quad \text{ha } \xi_2-\xi_1\to 0.$$

(60), (61) és (62) figyelembevételével $|\xi_2|<1-h$-ra

(63) $$\lambda_n(\xi_1)-\lambda_n(\xi_2)\leqq o\left(\log^{-1}\frac{1}{|\xi_2-\xi_1|}\right)\int_{\xi_2-\delta^*}^{\xi_2+\delta^*} l_n^2(x,\xi_2)\,dx+$$
$$+o(1)\left\{\int_{-1}^{\xi_2-\delta^*} l_n^2(x,\xi_2)\,dx+\int_{\xi_2+\delta^*}^{1} l_n^2(x,\xi_2)\,dx\right\}+\frac{M(\xi_2-\xi_1)}{h}\int_{-1}^{1} l_n^2(x,\xi_2)\,dx.$$

$w(x)\geqq m$ és II. segédtétel szerint

(64) $$\int_{-1}^{+1} l_n^2(x,\xi_2)\,dx\leqq\frac{1}{m}\int_{-1}^{+1} l_n^2(x,\xi_2)w(x)\,dx=\frac{1}{m}\lambda_n(\xi_2)\leqq\frac{c_{10}}{n}.$$

(63) második részének megbecsléséhez szükségünk van (36) egy általánosítására:

(65) $$l_n(x,\xi)=\lambda_n(\xi)\sum_{k=0}^{n-1}p_k(\xi)p_k(x)=\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\lambda_n(\xi)\frac{p_{n-1}(\xi)p_n(x)-p_n(\xi)p_{n-1}(x)}{x-\xi}$$

A bizonyítás szószerint átvihető [11] dolgozatomból.

Tekintettel (65)-re (37) és (10)-ből kapjuk, hogy

(66) $$\int_{-1}^{\xi_2-\delta^*} l_n^2(x,\xi_2)\,dx\leqq\frac{2}{\delta_m^{*2}}\lambda_n^2(\xi_2)\left[p_{n-1}^2(\xi_2)\int_{-1}^{+1} p_n^2(x)w(x)\,dx+\right.$$
$$\left.+p_n^2(\xi_2)\int_{-1}^{+1} p_{n-1}^2(x)w(x)\,dx\right]\leqq\frac{4k^2}{\delta_m^{*2}}\lambda_n^2(\xi_2)\leqq\frac{c_{11}}{n^2}.$$

és $\int_{\xi_2+\delta^*}^{1} l_n^2(x,\xi_2)\,dx$ hasonlóan becsülhető.

Tehát (63) és (64) következtében fennáll

(67) $$\lambda_n(\xi_1)-\lambda_n(\xi_2)\leqq\frac{1}{n}o\left(\log^{-1}\frac{1}{|\xi_2-\xi_1|}\right)+\frac{1}{n^2}o(1).$$

(60a)-ból egy hasonló alsó becslést nyerhetünk $\lambda_n(\xi_1)-\lambda_n(\xi_2)$-re és mindkét becslésben eltekinthetünk a $\xi_1<\xi_2$ feltételtől, ha $\xi_2\in(\alpha+\delta,\beta-\delta)$ mellett $\xi_1\in(\alpha+\delta,\beta-\delta)$-t is feltesszük.

Így tekintettel (22)-re

(68) $$\frac{\dfrac{1}{\lambda_n(\xi_1)}-\dfrac{1}{\lambda_n(\xi_2)}}{\xi_1-\xi_2}=n\,o\left(\frac{\log^{-1}\dfrac{1}{|\xi_2-\xi_1|}}{|\xi_2-\xi_1|}\right).$$

IX. SEGÉDTÉTEL: *(α, β) minden belső részintervallumában ξ-ben egyenletesen.*

$$\frac{\lambda_n'(\xi)}{\lambda_n^2(\xi)} = o\left(\frac{n^2}{\log n}\right). \tag{69}$$

BIZONYÍTÁS: (68) baloldala (18) következtében egy ξ_2-ben $2n$-nél alacsonyabb fokú polinom. Így tekintettel III. C. segédtételre, (68) és (22)-re:

$$\frac{\frac{1}{\lambda_n(\xi_1)} - \frac{1}{\lambda_n(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2} = o\left(\frac{n^2}{\log n}\right).$$

$\xi_1 = \xi_2 = \xi$ helyettesítéssel ebből a (69) becslést nyerhetjük.

X. SEGÉDTÉTEL. *$[-1, +1]$ minden belső részintervallumában*

$$\frac{\lambda_n'(\xi)}{\lambda_n^2(\xi)} = o(n^2). \tag{70}$$

BIZONYÍTÁS: (62) és (64) figyelembevételével (60) és (60a)-ból következik

$$|\lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2)| \leq \frac{c_{12}}{n}[|\xi_2 - \xi_1| + o(1)] \tag{71}$$

$-1 + h \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq 1 - h$-ban egyenletesen.

Ebben a becslésben $\xi_1 < \xi_2$ ismét figyelmen kívül hagyható. Tehát (22) következtében

$$\frac{\frac{1}{\lambda_n(\xi_2)} - \frac{1}{\lambda_n(\xi_1)}}{\xi_2 - \xi_1} = \left[1 + o\left(\frac{1}{|\xi_2 - \xi_1|}\right)\right] O(n). \tag{72}$$

Itt a baloldalon ismét egy $2n$-nél alacsonyabb fokú polinom áll. Így III. C. segédtétel alapján nyerhetjük (70)-et.

Pontosabb becslés a lépcsőparabolára

XI. SEGÉDTÉTEL: *(α, β) valamely belső részintervallumába eső x-ekre egyenletesen*

$$\sum_{\substack{|x - x_{kn}| < \delta \\ |x_{kn}| < 1-h}} |v_{kn}(x)| \, l_{kn}^2(x) = o(1). \tag{73}$$

X. és II. segédtétel szerint

$$\frac{\lambda_n'(\xi)}{\lambda_n(\xi)} = o(n) \qquad (-1 + h \leqq \xi \leqq 1 - h),$$

tehát (49)-ből

$$v_{kn}(x) = o(n) \qquad (-1 + h \leqq x_{kn} \leqq 1 - h). \tag{74}$$

$|x-x_{kn}|>\delta$-ra (36), (37) és (10)-ből kapjuk, hogy

(75) $$|l_{kn}(x)|<\frac{K}{\delta}\lambda_{kn}|p_{n-1}(x_{kn})|.$$

Tehát (74) és (75)-ből nyerjük, hogy

(76) $$\sum_{\substack{|x-x_{kn}|>\delta \\ |x_{kn}|<1-h}}|v_{kn}(x)|\,l_{kn}^2(x)=o(n)\frac{K^2}{\delta^2}\operatorname{Max}\lambda_{kn}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}p_{n-1}^2(x_{kn}).$$

II. segédtételből következik $\lambda_{kn}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, továbbá

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}p_{n-1}^2(x_{kn})=\int_{-1}^{+1}p_{n-1}^2(x)w(x)dx=1.$$

Így (76)-ból következik (73).

XII. SEGÉDTÉTEL: $(\alpha+2\delta,\beta-2\delta)$ *minden belső részintervallumára egyenletesen*

(77) $$\sum_{|x-x_{kn}|<\delta}|v_{kn}(x)|\,l_{kn}^2(x)=O(1).$$

BIZONYÍTÁS: Tekintettel I. segédtételre és (49)-re; elegendő bebizonyítani, hogy

(78) $$\sum_{|x-x_{kn}|<\delta}\frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_{kn}}|x-x_{kn}|\,l_{kn}^2(x)=O(1).$$

IX. és II. segédtételből következik

$$\frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_{kn}}=o\left(\frac{n}{\log n}\right),$$

tehát (78) következik a IV. segédtételből.

Az I. tétel bizonyítása

Az $f(x)$ függvény tegyen eleget az I. tétel feltételeinek. Legyen $\chi(x)$ az a legfeljebb másodfokú polinom, amely a ξ, -1, $+1$ helyeken $f(x)$-szel egyenlő:

$$\chi(\xi)=f(\xi),\quad \chi(-1)=f(-1),\quad \chi(1)=f(1).$$

Az $f(x)$ és $\chi(x)$ függvények folytonossága következtében megadhatók bármely ε-hoz olyan δ és h pozitív számok, hogy

(79) $$|f(x)-\chi(x)|\leqq\varepsilon,\quad \text{ha}\quad |x-\xi|\leqq\delta$$

(80) $$|f(x)-\chi(x)|\leqq\varepsilon,\quad \text{ha}\quad 1-h\leqq|x|\leqq 1.$$

Feltételezzük, hogy $\alpha \leqq \xi-\delta < \xi+\delta \leqq \beta$. Rögzítsük ezen δ és h értékeket, és bontsuk fel az n-edik Hermite-féle interpolációs polinomot a ξ helyen az alábbi alakban:

$$H_n(f,\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{kn})v_{kn}(\xi)l_{kn}^2(\xi)+\sum_{k=1}^{n} d_{kn}(\xi-x_{kn})l_{kn}^2(\xi)= \tag{81}$$

$$=\chi(\xi)+\sum_{k=1}^{n}[f(x_{kn})-\chi(x_{kn})]v_{kn}(\xi)l_{kn}^2(\xi)+\sum_{k=1}^{n}[d_{kn}-\chi'(x_{kn})]\cdot(\xi-x_{kn})l_{kn}^2(\xi)=$$

$$=f(\xi)+\Sigma_{1n}+\Sigma_{2n}+\Sigma_{3n}+\Sigma_{4n},$$

ahol

$$\Sigma_{1n}=\sum_{|\xi-x_{kn}|\leqq\delta}[f(x_{kn})-\chi(x_{kn})]v_{kn}(\xi)l_{kn}^2(\xi) \tag{82}$$

$$\Sigma_{2n}=\sum_{\substack{|\xi-x_{kn}|>\delta\\ |x_{kn}|\leqq 1-h}}[f(x_{kn})-\chi(x_{kn})]v_{kn}(\xi)l_{kn}^2(\xi) \tag{83}$$

$$\Sigma_{3n}=\sum_{|x_{kn}|>1-h}[f(x_{kn})-\chi(x_{kn})]v_{kn}(\xi)l_{kn}^2(\xi) \tag{84}$$

és végül

$$\Sigma_{4n}=\sum_{k=1}^{n}[d_{kn}-\chi'(x_{kn})](\xi-x_{kn})l_{kn}^2(\xi). \tag{85}$$

A XII. segédtételből és (79)-ből

$$|\Sigma_{1n}|<\varepsilon O(1). \tag{86}$$

A XI. segédtétel alapján

$$|\Sigma_{2n}|=o(1). \tag{87}$$

A VIII. segédtételből és (80)-ból,

$$|\Sigma_{3n}|<\varepsilon O(1), \tag{88}$$

végül (11)-ből a IV. és V. segédtétel alapján

$$|\Sigma_{4n}|=o(1). \tag{89}$$

Így (81), (86), (87), (88) és (89) alapján

$$\lim_{n=\infty} H_n(f;\xi)=f(\xi), \quad \text{q. e. d.}$$

IRODALOM

[1] S. N. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, *Mémoires Ac. de Belgique*, II. **4** (1912), 1—103.

[2] S. N. BERNSTEIN, Sur les polynomes orthogonaux relatifs a un segment fini, *Journal de Mathématiques*, **9** (1930), 127—177. és **10** (1921), 219—286.

[3] P. ERDŐS—P. TURÁN, On interpolation. III, *Annals of Math.*, **41** (1940), 510—553.

[4] L. FEJÉR, Über Interpolation, *Nachrichten der Ges. der Wiss.* Göttingen, Math. Phys. Kl, 1916, 66—91.

[5] L. FEJÉR, Über Weierstrass-sche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation, *Math. Annalen*, **102** (1930), 707—725.

[6] L. FEJÉR, Die Abschätzung eines Polynoms, *Math. Zeitschr.*, **32** (1930), 426—457.

[7] L. FEJÉR, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), 1—55.

[8] L. FEJÉR, Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, *Math. Zeitschr.*, **37** (1933), 287—309.

[9] L. FEJÉR, On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points, *American Math. Monthly*, **41** (1934), 1—14.

[10] L. FEJÉR, Über konjugierte trigonometrische Reihen, *Journal f. reine u. angew. Math.*, **144** (1914), 48—56.

[11] FREUD G., A Lagrange-féle interpoláció Lebesgue-függvényeiről. *MTA III. oszt. Közl.* **3** (1953), 563—567.

[12] FREUD G., Erdős P. és Turán P. egy tételéről. *MTA III. oszt. Közl.* **4** (1954), 209—217.

[13] G. GRÜNWALD, On the theory of interpolation, *Acta Math.*, **75** (1943), 219—245.

[14] D. JACKSON, The theory of approximation, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Band. XI (New York, 1930).

[15] J. SHOHAT, On interpolation, *Annals of Math.* (2), **34** (1933), 130—146.

[16] G. SZEGŐ, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören, *Math. Zeitschr.* **35** (1932), 579—602.

[17] G. SZEGŐ, Orthogonal polynomals, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ* **13** (New. York, 1939).