ORTOGONÁLIS POLINOMSOROK ABSZOLÚT KONVERGENCIÁJÁRÓL*

FREUD GÉZA

Bevezetés

Ismeretes S. N. BERNSTEIN következő tétele [4]:

Legyen $g(x)$ 2π szerint periódikus függvény, melyet a $(0, 2\pi)$-ben n-edfokú trigonometrikus polinomokkal approximálunk. A Csebisev-féle értelemben őt legjobban megközelítő polinomtól való eltérése legyen $E_n(g)$. Ekkor ha fennáll

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(g)}{\sqrt{n}} < \infty,$$

$g(x)$ Fourier sora mindenütt abszolút konvergens. S. N. BERNSTEIN megjegyzései szerint (1) minden olyan esetben teljesül, ha

(1. a) $$\sum \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g\right)}{\sqrt{n}} < \infty$$

fennáll, ahol $\omega(\delta, g)$ $g(x)$ folytonossági modulusa $(0, 2\pi)$-ben.[1]

Ebből következik, hogy $g(x)$ Fourier sora mindenütt abszolút konvergens, ha $g(x)$ egy $\alpha > \frac{1}{2}$ kitevőjű Lipschitz feltételnek tesz eleget. Ebben az értelemben ALEXITS Gy. [1], [2] a fenti tételt ortogonális polinomok egy osztályára is átvitte.

Legyen $\{P_n(x)\}$ normált ortogonális polinomok sorozata $(-1, +1)$-ben és $w(x)$ a hozzátartozó nemnegatív súlyfüggvény, legyen továbbá

(2) $$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu P_\nu(x)$$

a $(-1, +1)$-ben definiált L^2 integrálható $f(x)$ ortogonális polinom sorfejtése. ALEXITS GY. tételében bebizonyítja, hogy ha

(3) $$w(x) \leqq W(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

* E dolgozat „Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen" címmel megjelent az Acta Math. Ac. Sci. Hung. 4 (1953), 127—135.

[1] S. B. STECKIN megmutatta [9], hogy (1) és (1. a) ekvivalensek.

továbbá $f\in Lip\alpha, \alpha > \frac{1}{2}$, akkor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu| < \infty \tag{4}$$

Ha a $\{P_n(x)\}$ sorozat az x helyen korlátos, akkor nyilvánvalóan a (2) ortogonális sorfejtés ugyanazon a helyen abszolút konvergens.

S. N. BERNSTEIN tételének egy további általánosítása S. B. STECKINtől ered [8], [9]: Legyen $\{\Phi_n\}$ egy (a, b)-ben értelmezett, tetszőleges teljes ortogonális rendszer és

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k(x) \tag{2. a}$$

az $f\in L^2$ függvény ortogonális sorfejtése. Legyen

$$E_n^2\{f, \Phi_n\} = \left\{ \operatorname{Min} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x) \right]^2 \right\}^{1/2} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}, \tag{5}$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E_n^{(2)}(f, \Phi). \tag{6}$$

S. B. STECKIN ezen tételéből — ugyanúgy, mint ALEXITS említett tételéből — csak akkor lehet az ortogonális sorfejtés abszolút konvergenciájára következtetni, hogy ha az ortogonális függvények egyenletesen korlátosak. Egy nemrég megjelent dolgozatomban [6] kimutattam, hogy az ortogonális polinomsorok szummabilitásának elméletében az az erős követelmény, hogy $\{P_\nu(x)\}$ egyenletesen korlátos legyen, helyettesíthető a

$$\sum_{\nu=0}^{n} [P_\nu(x)]^2 = O(n) \tag{7}$$

gyengébb feltétellel. Továbbá bebizonyítottam, hogy ez biztosan teljesül, ha a $w(x)$ súlyfüggvény az x hely környezetében egy pozitív korlát fölött marad. Ezen dolgozatban megmutatjuk, hogy a (7) feltétel, hasonlóan, mint a szummabilitási elméletben, a (2) sor abszolút konvergenciájához is elégséges.

Egy tétel általános ortogonális sorfejtésekről

Legyen $\{\Phi_n(x)\}$ a $(-1, +1)$-ben értelmezett ortogonális függvények egy normált teljes rendszere a $w(x) \geqq 0$ súlyfüggvényre vonatkozólag azaz

$$\int_{-1}^{+1} \Phi_m(x)\Phi_n(x)\, w(x)\, dx = \delta_{mn}.$$

Legyen továbbá (2. a) egy, a $w(x)$ súlyfüggvénnyel L^2 integrálható $f(x)$ függvény ortogonális sorfejtése, és

$$(5.\,a)\qquad E_n^{(2)}(f, w, \Phi_n) = \left\{ \operatorname{Min} \int_{-1}^{1} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x) \right|^2 w(x)\,dx \right\}^{1/2} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

I. TÉTEL. Ha fennáll

$$(8)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} |\Phi_\nu(x)|^2 \leq Kn$$

és

$$(9)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^2(f, w, \Phi_n)}{\sqrt{n}} < \infty,$$

akkor (2. a) az x helyen abszolút konvergens.

BIZONYÍTÁS. (5. a) és (8) értelmében fennáll

$$(10)\qquad \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k \Phi_k(x)| \leq \left(\sum_{2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} [\Phi_k(x)]^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}} [\Phi_k(x)]^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^\nu+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} < \sqrt{2K}\, 2^{\nu/2} E_{2^\nu}^{(2)}(f, w, \Phi_n)$$

(9) figyelembevételével, és a tagok monotonitásának következtében CAUCHY egy ismert tétele szerint[2] kapjuk, hogy

$$\sum 2^{\nu/2} E_{2^\nu}^{(2)}(f, w, \Phi_n) < \infty$$

ez (10)-ből épp (2. a) abszolút konvergenciáját adja.

Áttérés ortogonális polinomsorokra

A továbbiakban foglalkozunk a (2) sorfejtéssel. $f(x)$ folytonossága esetén definiáljuk $f(x)$ „trigonometrikus folytonossági modulusát"

$$(11)\qquad \omega^*(\delta, f) = \operatorname*{Max}_{|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq \delta} |f(\cos\vartheta_1) - f(\cos\vartheta_2)|$$

II. TÉTEL. Legyen $f(x)$ folytonos és

$$(12)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^*\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}} < \infty$$

akkor (2) minden olyan x helyen, ahol (7) teljesül, abszolút konvergens.[3]

[2] *Cauchy* tétele kimondja, hogy ha $a_n > a_{n+1} > \cdots > 0$, akkor $\sum a_n$ és $\sum 2^\nu a_{2^\nu}$ egyidejűleg konvergens, vagy divergens.

[3] (12) alatti feltétel biztosan teljesül, ha ϑ-ban egyenletesen fennáll

$$(12.a.)\qquad |f[\cos(\vartheta + h)] - f(\cos\vartheta)| \leq c_3 |h|^{1/2} (\log|h|^{-1})^{-1} (\log\log|h|^{-1})^{-1} \cdots (\log_k |h|^{-1})^{-K}, K > 1$$

ahol $\log_p(x) = \log\log_{p-1}(x)$-et jelent, vagy ha $g(\vartheta) = f(\cos\vartheta)$ egy $\alpha > 1/2$ kitevőjű Lipschitz feltételnek tesz eleget.

BIZONYÍTÁS: D. JACKSON egy ismert tétele szerint van egy olyan legfeljebb n-edfokú $\pi_n(x)$ polinom, melyre az egész $(-1, +1)$ intervallumban

$$|f(x)-\pi_n(x)| < c_1 \omega^*\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ebből következik

$$(13)\qquad \begin{aligned} E_n^{(2)}(f, w, P_n) &\leqq \sqrt{\int_{-1}^{+1} [f(x)-\pi_n(x)]^2 w(x)\, dx} \leqq \\ &\leqq c_1 \omega^*\left(\frac{1}{n}\right) \sqrt{\int_{-1}^{+1} w(x)\, dx} \end{aligned}$$

(12) és (13)-ból kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^2(f, w, P_n)}{\sqrt{n}} < \infty$$

tehát az I. tétel értelmében (2) abszolút konvergens.

Ha a $w(x)$ súlyfüggvény megválasztását korlátozzuk, akkor több is bizonyitható. Ehhez felhasználjuk a következő segédtételt.

I. SEGÉDTÉTEL: Legyen $f \in L^2$

$$(14)\qquad \omega^{2*}(\delta, f) = \left\{ \operatorname*{Max}_{|h| \leqq \delta} \int_0^{\pi} [f(\cos(\vartheta+h)) - f(\cos\vartheta)]^2\, d\vartheta \right\}^{1/2}$$

és

$$(15)\qquad E_n^{(2)*}(f) = \left\{ \operatorname{Min} \int_0^{\pi} \left[f(\cos\vartheta) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos k\vartheta \right]^2 d\vartheta \right\}^{1/2}$$

akkor

$$(16)\qquad E_n^{(2)*}(f) \leqq c_2\, \omega^{(2)*}\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

BIZONYÍTÁS: Jelentse

$$(17)\qquad f(\cos\vartheta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\vartheta$$

az $f(\cos\vartheta)$ páros függvény Fourier sorát, akkor

$$(18)\qquad [E_n^{(2)*}(f)]^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2$$

és fennáll a következő identitás:

$$(19)\quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \left(1 - \frac{\sin \frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right) = \frac{n}{\pi} \int_0^{1/n} dh \int_0^{\pi} \left\{ f\left[\cos\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right)\right] - f\left[\cos\left(\vartheta - \frac{h}{2}\right)\right] \right\}^2 d\vartheta$$

Az $y = \sin x$ görbe menetéből következik, hogy van egy olyan pozitív c_3 konstans, melyre fennáll

$$1 - \frac{\sin \frac{k}{n}}{\frac{k}{n}} \geqq c_3 \frac{k^2}{n^2} \qquad (k \leqq n) \tag{20}$$

egyenlőtlenség. Ebből (18), (19) és (14) figyelembevételével $c_2 = \frac{\pi c_3}{4}$ mellett következik (16).[4]

Q.E.D.

III. TÉTEL. A (3) és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{2*}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}} < \infty \tag{21}$$

feltevések mellett a (2) sor minden x helyen, ahol (7) teljesül, abszolút konvergens.

Speciálisan (21) teljesül, ha $f(\cos\vartheta)$ ϑ függvényeként egy $\mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, $\alpha > {}^1/_2$ feltételnek tesz eleget.

BIZONYÍTÁS: (3) miatt

$$\begin{aligned} E_n^{(2)}(f, w, P_n) &\leqq W \left\{ \operatorname{Min} \int_{-1}^{+1} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k \right]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\}^{1/2} = \\ &W \left\{ \operatorname{Min} \int_0^{\pi} \left[f(\cos\vartheta) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos k\vartheta \right]^2 d\vartheta \right\}^{1/2} = W E_n^{(2)*}(f) \end{aligned} \tag{22}$$

(16), (21) és (22)-ből következik

$$\sum \frac{E_n^{(2)}(f, w, P_n)}{\sqrt{n}} < \infty$$

és így III. tételt visszavezettük I. tételre.

Zygmund és Hardy—Littlewood tételéről

A. ZYGMUND [13] bebizonyította, hogy egy 2π szerint periodikus $g(\vartheta)$ függvény Fourier-sora abszolút konvergens, ha $f(x)$ korlátos variációjú és $g \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ egy tetszőleges $\alpha > 0$ kitevővel. G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD [7] kimutatták, hogy itt a $g \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ feltétel a $g \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $\alpha p > 1$ gyengébb felté-

[4] Fenti segédtétel egyszerű bizonyítása RÉNYI ALFRÉDtől származik, amiért neki ez úton mondok köszönetet. Más bizonyítást lásd AHIJEZER [3], 161—162.

tellel helyettesíthető. Továbbá ugyanazon a helyen bebizonyították, hogy $g(\vartheta)$ Fourier-sora akkor is abszolút konvergál, ha a következő feltételek teljesülnek:

$$g \in \mathrm{Lip}(\alpha, p) \quad \alpha p = 1, \; p < 2 \text{ és } f \in \mathrm{Lip}\,\beta, \quad \beta > 0.$$

M. Z. WARASZKIEWICZ [12] mindkét utóbb említett tételt visszavezette Bernstein tételének egy SZÁSZ OTTÓtól származó általánosítására. Szász Ottó tételét S. B. Steckin már említett tétele tartalmazza. Hardy—Littlewood mindkét tételét először ortogonális polinomsorokra terjesztjük ki.

II. SEGÉDTÉTEL. A 2π szerint periodikus $g(\vartheta)$ tegyen eleget a következő feltételek egyikének:

a) $g(\vartheta)$ korlátos variációjú és $g \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $\alpha p < 1$

b) $g \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $\alpha p = 1$, $p < 2$ és $g \in \mathrm{Lip}\,\beta$, $\beta > 0$, akkor[5]

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, g\right) = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\delta}\right), \quad \delta > 0. \tag{23}$$

Ezen segédtétel bizonyítására vonatkozóan utalunk WARASZKIEWICZ dolgozatára [12].

IV. TÉTEL. Az $f(\cos\vartheta) = g(\vartheta)$ függvény tegyen eleget a II. segédtétel a) vagy b) feltételének. Amennyiben $w(x)$ eleget tesz a (3) egyenlőtlenségnek, (2) minden x helyen, ahol (7) teljesül, abszolút konvergens.

Bizonyításunk következik (23)-ból és a III. tételből, mivel

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, g\right) = \omega^{2*}\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Tekintsük most ZYGMUND tételét: Ha $f(x)$ korlátos variációjú függvény, akkor $g(\vartheta) = f(\cos\vartheta)$ is korlátos variációjú, tehát fennáll

$$\omega^{(1)}(\delta, g) = \sup_{|h| \leq \delta} \int_0^{2\pi} |g(\vartheta + h) - g(\vartheta)|\, d\vartheta = O(\delta) \tag{24}$$

és ebből következik

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \sqrt{\omega^{*}\left(\frac{1}{n}, f\right)}\, O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{25}$$

IV. tétel figyelembevételével (24) és (25)-ből következik:

V. TÉTEL. Tegyük fel, hogy (3) teljesül, $f(x)$ korlátos variációjú és fennáll

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\omega^{*}\left(\frac{1}{n}, f\right)} < \infty, \tag{26}$$

[5] Mint szokásos $\omega^{(2)}(\delta, g)$ g folytonossági mértékét jelenti az L^2 metrikájában:

$$\omega^{(2)}(\delta, g) = \operatorname*{Max}_{|h| < \delta} \int_0^{2\pi} |g(\vartheta + h) - g(\vartheta)|^2\, d\vartheta$$

akkor (2) minden x helyen, ahol (7) teljesül, abszolút konvergens. Érdemes megemlíteni, hogy (26) teljesül, ha $f(\cos\vartheta)$ korlátos variációjú és $(0,\pi)$-ben egyenletesen eleget tesz a

$$|f[\cos(\vartheta+h)]-f(\cos\vartheta)|<c_4\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-\alpha}$$

Dini—Lipschitz feltételnek $\alpha>2$ kitevővel.

$\sum_{k=0}^{n}[P_k(x)]^2$ becsléséről

A [6] dolgozatban bebizonyítottuk a következőt: amennyiben a $(-1,+1)$ belső részintervallumában

$$w(x)\geqq m>0, \tag{27}$$

akkor a (7) alatti becslés (α,β) minden belső részintervallumában egyenletesen teljesül. Jegyezzük meg, hogy a (7) becslés egy x ponthalmazon való egyenletességéből a (2) sor egyenletes és abszolút konvergenciája következik ugyanazon a ponthalmazon, hogyha a II., III., IV. vagy az V. tétel feltételei teljesülnek. Kívánatosnak látszik egy egyszerű elégséges feltétel arra nézve, hogy a (7) becslés az egész ortogonalitási intervallumban egyenletesen teljesüljön.

III. SEGÉDTÉTEL. Ha $\mu>0$ és

$$w(x)>\mu(1-x^2)^{1/2}\qquad(-1\leqq x\leqq+1), \tag{27a}$$

akkor (7) az egész $(-1,+1)$ ortogonalitási intervallumban egyenletesen teljesül. A bizonyítás hasonlóan, mint [6] dolgozat II. tétele, ERDŐS P. és TURÁN P. egy gondolatmenetén alapszik ([5] lemma II. 524—525).

A

$$k_n(x,x)=\sum_{k=0}^{n}[P_k(x)]^2$$

függvény előállítja a $|\pi_n(x)|^2$ maximumát, amíg $\pi_n(x)$ az összes legfeljebb n-edrendű polinomokat befutja, melyek eleget tesznek

$$\int_{-1}^{+1}|\pi_n(t)|^2w(t)\,dt\leqq 1 \tag{28}$$

egyenlőtlenségnek (SZEGŐ G. [11] 38 o.). Továbbiakban jelölje $\pi_n(t)$ azt a (28)-nak eleget tevő polinomot, amely a $|\pi_n(x)|^2=k_n(x,x)$ maximális értékét tényleg felveszi. Akkor (28) és (27a)-ból következik:

$$\mu\int_{-1}^{+1}|\pi_n(t)|^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\leqq 1. \tag{29}$$

Megfigyelve, hogy a $(-1, +1)$ intervallumban az $(1-x^2)^{-1/2}$-hez tartozó ortogonális és normált polinomok éppen $\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, T_n(x)\right\}$, ahol $T_n(x)$ az n-edrendű Csebisev-féle polinomokat jelöli, így (29) következtében fennáll a már használt Szegő-féle segédtétel szerint a következő becslés:

$$\mu\,|\pi_n(x)|^2 = \mu \sum_{k=0}^{n} [P_k(x)]^2 \leqq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} [T_k(x)]^2 \tag{30}$$

(30) és $|T_k(x)| \leqq 1$ miatt végül is adódik

$$\sum_{k=0}^{n} [P_k(x)]^2 \leqq \frac{2}{\pi\mu}(n+1). \tag{31}$$

VI. TÉTEL, Ha a II., III., IV., V. tételekben (7) feltételt (27), ill. (27a) feltétellel helyettesítjük, akkor a (2) alatti ortogonális sorfejtés azonos feltevések mellett (α, β) minden belső részintervallumában, ill. az egész $(-1, +1)$ intervallumban egyenletesen abszolút konvergens.

IRODALOM

[1] G. Alexits, Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux, Commentarii Math. Helv. **16** (1943), 200—208.

[2] G. Alexits, Sur la convergence et la summabilité presque partout des séries de polynomes orthogonaux, *Acta Sci. Math.*, 12B (1950), 223—225.

[3] N. I. Ahijezer: Előadások az approximáció elméletéről. Akadémiai Kiadó, Budapest 1951.

[4] S. N. Bernstein, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 199 (1934), 397—400.

[5] P. Erdős és P. Turán, On interpolation, III, Annals of Math., **41** (1940), 510—553.

[6] Freud G.: Ortogonális polinomok erős $(C, 1)$-szummálhatóságáról. MTA III. oszt. Közl. 3 (1953) 507—512.

[7] G. H. Hardy és J. E. Littlewood, On the absolute convergence of Fourier series, Journal of the London Math. Soc. **3** (1928), 250—253.

[8] С. Б. Стечкин, Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, Успехы Матем. Наук, II. 3. (19) (1947), 177—178.

[9] С. Б. Стечкин, Об абсолютной сходимости ортогональных рядов I. Математический Сборник, 21 (71), (1951), 225—232.

[10) O. Szász, Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der Bayerischen Akad. der Wiss., 1922, 135—150.

[11] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. XXIII. (New-York, 1939).

[12] M. Z. Waraszkiewitz, Remarque sur un théoreme de M. Zygmund, Bulletin International de l'Ac. Polonaise Classe Sci. Math. et Nat., 1929, 275—279.

[13] A. Zygmund, Remarque sur la convergence absolue des séries de Fourier, *Journal of the London Math. Soc.*, (1928), 194—196.