A HALMAZELMÉLET EGYIK PROBLÉMÁJÁRÓL*

FODOR GÉZA

ERDŐS PÁL vetette fel a következő problémát:[1]

Legyen $\mathfrak{m}$ végtelen kardinális szám, φ az $\mathfrak{m}$ kezdőszáma, $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ a φ-nél kisebb rendszámok halmaza. Legyen továbbá $\mathfrak{n}$ egy $\mathfrak{m}$-nél kisebb kardinális szám. Tegyük fel, hogy S egy adott $\mathfrak{m}$ számosságú halmaz, és hogy $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ minden γ eleméhez hozzá van rendelve S-nek egy $S(\gamma)$ részhalmaza, úgy hogy $\overline{S(\gamma)} < \mathfrak{n}$. Probléma: létezik-e $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek olyan $\mathfrak{m}$ számosságú Γ részhalmaza, hogy

$$\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)} = \mathfrak{m}?$$

Ha az $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ feltételt az $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$ feltétellel helyettesítjük, akkor a válasz általában negatív. Valóban, legyen $S = \Gamma_{\mathfrak{m}}$ és $S(\gamma)$ a γ-nál kisebb rendszámok halmaza. Nyilvánvaló, hogy $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek minden $\mathfrak{m}$ számosságú Γ részhalmazára

$$S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma) = 0.$$

ERDŐS PÁL a kontinuum-hipotézis feltételezésével bebizonyította, hogy a problémára a válasz pozitív.[2]

Jelen dolgozat az általánosított kontinuum-hipotézis felhasználása nélkül bizonyítja be, hogy a problémára a válasz pozitív.[3]

1. LEMMA. *Legyen $\mathfrak{q}$ reguláris kardinális szám $\mathfrak{p}$ egy $\mathfrak{q}$-nál kisebb kardinális szám és $\Gamma'_{\mathfrak{q}}$ a $\Gamma_{\mathfrak{q}}$-nak $\mathfrak{q}$ számosságú részhalmaza. Ha $\Gamma'_{\mathfrak{q}}$ minden γ eleméhez hozzá van rendelve $\Gamma_{\mathfrak{p}}$-nek egy $g(\gamma)$ eleme, akkor létezik egy π rendszám, $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$ és $\Gamma'_{\mathfrak{q}}$-nak egy $\mathfrak{q}$ számosságú Γ részhalmaza úgy, hogy Γ minden γ elemére $g(\gamma) < \pi$.*

BIZONYÍTÁS. Jelöljük $H(\alpha)$-val minden α rendszámra, $\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$, azon γ elemek halmazát, $\gamma \in \Gamma'_{\mathfrak{q}}$, amelyekre $g(\gamma) = \alpha$. Nyilvánvaló, hogy

$$\Gamma'_{\mathfrak{q}} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{p}}} H(\alpha).$$

* E dolgozat tartalma „On a problem in the set theory" címmel megjelenés alatt áll: Acta Sci. Math., **15** (1954), 240—242.

[1] Írásbeli közlés.

[2] P. ERDŐS, Some remarks on set theory III, *Michigan Math. Journal*, 2 (1953—54), 51—57.

[3] Köszönetet mondok ERDŐS PÁL-nak és L. GILLMAN-nak, akik, miután ennek a dolgozatnak egy előző kéziratát olvasták, bizonyításomat egyszerűsítették.

Mivel $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ és $\mathfrak{q}$ reguláris kardinális szám, azért létezik olyan π' rendszám, $\pi' \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$, amelyre $H(\pi') = \mathfrak{q}$. Legyen $\Gamma = H(\pi')$ és $\pi = \pi' + 1$, a $H(\alpha)$ definíciója szerint a lemma teljesül.

Jelöljük $\mathfrak{r}^*$-gal tetszőleges $\mathfrak{r}$ kardinális szám esetén azt a legkisebb kardinális számot, amelyre $\mathfrak{r}$ előállítható $\mathfrak{r}^*$ számú $\mathfrak{r}$-nél kisebb kardinális szám összegeként.

2. LEMMA. *Legyen* $\mathfrak{a}$ *végtelen szinguláris kardinális szám,* $\mathfrak{b}$ *pedig egy* $\mathfrak{a}$*-nál kisebb reguláris kardinális szám. Ha* $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}^*$ *és* $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ *minden* γ *elemének megfelel egy* $h(\gamma)$ *rendszám,* $h(\gamma) \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$, *akkor létezik* $\Gamma_{\mathfrak{b}}$*-nek egy* π *eleme és* $\Gamma_{\mathfrak{a}}$*-nak egy* $\mathfrak{a}$ *számosságú* Γ *részhalmaza úgy, hogy* Γ*-nak minden* γ *elemére* $h(\gamma) < \pi$.

BIZONYÍTÁS. Legyen μ az $\mathfrak{a}^*$ kezdőszáma. Létezik reguláris kardinális számoknak olyan μ típusú $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\xi, \ldots, (\xi < \mu)$ sorozata, hogy $\mathfrak{a}_\beta > \mathfrak{a}_\alpha$, ha $\beta > \alpha$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}_\xi < \mathfrak{a}$ minden μ-nél kisebb ξ rendszámra és

$$\mathfrak{a} = \sum_{\xi < \mu} \mathfrak{a}_\xi .$$

Az 1. lemma szerint minden μ-nél kisebb ξ rendszámhoz található olyan π_ξ rendszám, $\pi_\xi \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$, hogy létezik $\Gamma_{\mathfrak{a}_\xi}$-nek $\mathfrak{a}_\xi$ számú olyan γ eleme, amelyre $h(\gamma) < \pi_\xi$. Valóban, legyen $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_\xi$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ és $g(\gamma) = h(\gamma)$ a $\Gamma_{\mathfrak{a}_\xi}$-n. Mivel $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}_\xi$ és $\mathfrak{a}_\xi$ reguláris kardinális szám, azért az 1. lemma feltételei teljesülnek. Ezért létezik $\Gamma_{\mathfrak{b}}$-nek olyan π_ξ eleme és $\Gamma_{\mathfrak{a}_\xi}$-nek olyan $\mathfrak{a}_\xi$ számosságú Γ_ξ részhalmaza, hogy Γ_ξ minden γ elemére $g(\gamma) = h(\gamma) < \pi_\xi$.

Mivel $\mathfrak{a}^* < \mathfrak{b}$ és $\mathfrak{b}$ reguláris kardinális szám, azért létezik $\Gamma_{\mathfrak{b}}$-nek olyan π eleme, hogy $\pi_\xi < \pi$ minden ξ-re, $0 < \xi < \mu$. Legyen

$$\Gamma = \bigcup_{\xi < \mu} \Gamma_\xi .$$

Nyilvánvaló, hogy Γ számossága $\mathfrak{a}$. Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor valamely μ-nél kisebb ξ_0 rendszámra $\gamma \in \Gamma_{\xi_0}$. A Γ_ξ definíciója szerint $h(\gamma) < \pi_{\xi_0}$. Mivel $\pi_\xi < \pi$, azért a lemmát bebizonyítottuk.

3. LEMMA. *Legyen* $\mathfrak{m}$ *reguláris kardinális szám,* $\mathfrak{n}$ *egy* $\mathfrak{m}$*-nél kisebb szinguláris kardinális szám és* S *egy* $\mathfrak{m}$ *számosságú halmaz. Ha* $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ *minden* γ *eleméhez hozzá van rendelve* S*-nek egy* $S(\gamma)$ *részhalmaza úgy, hogy* $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}$, *akkor van olyan* $\mathfrak{n}$*-nél kisebb* $\mathfrak{n}_0$ *reguláris kardinális szám és* $\Gamma_{\mathfrak{m}}$*-nek olyan* $\mathfrak{m}$ *számosságú* G *részhalmaza, hogy ha* $\gamma \in G$, *akkor*

$$\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}_0 .$$

BIZONYÍTÁS. Legyen ψ az $\mathfrak{n}^*$ kezdőszáma. Létezik reguláris kardinális számoknak olyan ψ típusú $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_\xi, \ldots$ $(\xi < \psi)$ sorozata, hogy $\mathfrak{n}_\beta > \mathfrak{n}_\alpha$, ha $\beta > \alpha$, $\mathfrak{n}^* < \mathfrak{n}_\xi < \mathfrak{n}$ minden ψ-nél kisebb ξ rendszámra és

$$\mathfrak{n} = \sum_{\xi < \psi} \mathfrak{n}_\xi .$$

Bontsuk fel $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-et a $\Gamma^{(\xi)}$ $(\xi < \psi)$ halmazok összegére a következő módon: $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek γ eleme akkor és csak akkor tartozzék $\Gamma^{(\xi)}$-hez, ha $\overline{S(\gamma)} < \mathfrak{n}_\xi$. Mivel $\mathfrak{m}$ reguláris, azért van olyan ξ_0 rendszám, $\xi_0 < \psi$, amelyre $\overline{\Gamma^{(\xi_0)}} = \mathfrak{m}$. Legyen $G = \Gamma^{(\xi_0)}$ és $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_{\xi_0}$.

TÉTEL. *Legyen S egy $\mathfrak{m}$ számosságú halmaz, $\mathfrak{m} > \aleph_0$, és $\mathfrak{n}$ egy $\mathfrak{m}$-nél kisebb kardinális szám. Ha $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ minden γ eleméhez hozzá van rendelve S-nek egy $S(\gamma)$ részhalmaza úgy, hogy $\overline{S(\gamma)} < \mathfrak{n}$, akkor létezik $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek olyan $\mathfrak{m}$ számosságú Γ részhalmaza, amelyre*

$$\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)} = \mathfrak{m}.$$

BIZONYÍTÁS. Ha van olyan $\mathfrak{s}$ reguláris kardinális szám, amelyre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s} < \mathfrak{m}$, akkor jelöljön $\mathfrak{s}_0$ reguláris $\mathfrak{m}$ esetén tetszőleges, szinguláris $\mathfrak{m}$ esetén $\mathfrak{m}^*$-nál nagyobb olyan reguláris kardinális számot, amelyre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s}_0 < \mathfrak{m}$. Ha nincs olyan $\mathfrak{s}$ reguláris kardinális szám, amelyre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s} < \mathfrak{m}$, akkor $\mathfrak{n}$ nyilvánvalóan szinguláris és $\mathfrak{m}$ reguláris kardinális szám. A 3. lemma szerint létezik ekkor olyan $\mathfrak{n}_0$ reguláris kardinális szám, $\mathfrak{n}_0 < \mathfrak{n}$, és $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek olyan $\mathfrak{m}$ számosságú G részhalmaza, hogy ha $\gamma \in G$, akkor $\overline{S(\gamma)} < \mathfrak{n}_0$.

Legyen $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_0$ és $G' = \Gamma_{\mathfrak{m}}$, ha van olyan $\mathfrak{s}$ reguláris kardinális szám, amelyre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s} < \mathfrak{m}$; ha nincs ilyen $\mathfrak{s}$, akkor legyen $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{n}_0$ és $G' = G$.

Bontsuk fel S-et $\mathfrak{s}_1$ számú páronként idegen $\mathfrak{m}$ számosságú $M_\varkappa$ halmaz összegére,

$$S = \bigcup_{\varkappa \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1}} M_\varkappa.$$

Mivel $\overline{S(\gamma)} < \mathfrak{s}_1$ $(\gamma \in G')$ és $\mathfrak{s}_1$ reguláris kardinális szám, azért létezik olyan $f(\gamma)$ $(\gamma \in G')$ rendszám, $f(\gamma) \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1}$, hogy minden $f(\gamma)$-nál nagyobb $\varkappa$-ra $(\varkappa \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1})$ $S(\gamma) \cap M_\varkappa$ üres. Reguláris $\mathfrak{m}$ esetén az 1. lemmát $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}_1$, $\Gamma'_{\mathfrak{q}} = G'$, $g(\gamma) = f(\gamma)$ mellett, szinguláris $\mathfrak{m}$ esetén a 2. lemmát $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{s}_1$, $h(\gamma) = f(\gamma)$ mellett alkalmazva következik, hogy létezik olyan π rendszám, $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1}$, és G'-nek olyan $\mathfrak{m}$ számosságú Γ részhalmaza, hogy Γ-nak minden γ elemére $f(\gamma) < \pi$, innen

$$\bigcup_{\pi \leqq \varkappa \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1}} M_\varkappa \subseteq S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma),$$

azaz

$$\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)} = \mathfrak{m}.$$