SZINGULÁRIS INTEGRÁLOK KONVERGENCIÁJÁRÓL

TANDORI KÁROLY

Bemutatta Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag az 1954. november 12-én tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

Még H. LEBESGUE [3] vetette fel a következő problémát: mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy egy adott függvényosztály minden olyan $f(t)$ függvényét, amelynek az $x=x_0$ pont bizonyos típusú pontja, a

$$\Phi_n(f;x)=\int_a^b f(t)\,\varphi_n(x;t)\,dt \qquad (n=1,2,\ldots)$$

szinguláris integrál az $x=x_0$ pontban előállítsa, vagyis hogy minden ilyen függvényre teljesüljön a

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f;x_0)=f(x_0)$$

reláció. Ezt a problémát az L függvényosztály és a Lebesgue-pontok esetére D. K. FAGYEJEV [2] oldotta meg. Tételét később Sz. G. KREJN és a B. JA. LEVIN [5] a Banach-terek elméletének módszereivel egyszerűbben bebizonyították. Majd B. I. KORENBLJUM, Sz. G. KREJN és B. JA. LEVIN [4] a Lebesgue-féle problémát megoldották az $L^p(p>1)$ függvényosztály és a p-edrendű Lebesgue-pontok esetén is.

Ebben a dolgozatban a Banach-terek elméletének módszereivel egy másik — a fenti szerzőkétől különböző — szükséges és elegendő feltételt adunk az $L^p(p\geqq 1)$ függvényosztályok függvényeinek p-edrendű Lebesgue-pontban való előállíthatóságára. Feltételünkből könnyen nyerhető D. K. FAGYEJEV említett tétele és egy további tétel, amely ugyancsak L osztálybeli függvényeknek Lebesgue-pontban való előállíthatóságára vonatkozik.

A következőkben az $a=0$, $b=1$, $x_0=0$ esetre szorítkozunk; az általános eset erre könnyen visszavezethető.[1])

2. §. Segédtétel

Legyen p egy rögzített kitevő: $p\geqq 1$ és jelölje L_0^p azoknak az $f(t)\in L^p\,[0,1]$ függvényeknek az osztályát, amelyek az $x=0$ pontban 0-val egyenlők és amelyeknek az $x=0$ pontban p-edrendű Lebesgue-pontjuk van,

[1]) Hálás köszönetemet fejezem ki Sz.-NAGY BÉLA professzor úrnak, aki e dolgozat elkészítése közben munkámban értékes megjegyzéseivel támogatott.

azaz

$$f(0)=0 \text{ és } \int_0^h |f(t)|^p\,dt = o(h) \qquad (0<h\to 0).$$

Az

$$(1) \qquad \|f\|_0^{(p)} = \sup_h \left\{ \frac{1}{h}\int_0^h |f(t)|^p\,dt \right\}^{1/p} \qquad (0<h\leqq 1)$$

normálással L_0^p Banach-féle tér.[2])

Legyen $\varphi(t)$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett mérhető függvény és tekintsük a

$$(2) \qquad \Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

függvényoperációt. Tegyük fel, hogy $\Phi(f)$ az L_0^p térben *mindenütt értelmezve van és véges értékű*, azaz a fenti integrál minden $f(t)\in L_0^p$ függvényre Lebesgue-értelemben létezik és véges. Ekkor a (2) integrál minden olyan $f(t)$ függvényre létezik, amely a $[0, \eta]$ $(0<\eta<1)$ intervallumban 0-val egyenlő és az $[\eta, 1]$ intervallumon az $L^p[\eta, 1]$ osztályba tartozik. Mint ismeretes, ebből következik, hogy $\varphi(t)$ minden $[\eta, 1]$ $(0<\eta<1)$ intervallumon az $L^q[\eta, 1]$

[2]) L. pl. B. I. KORENBLJUM, SZ. G. KREJN és B. JA. LEVIN [4]. Csak az L_0^p tér teljességét kell részletesebben megmutatni. Legyen $f_n(t)\in L_0^p$ $(n=1, 2, \ldots)$ egy Cauchy-sorozat: $\|f_m - f_n\|_0^{(p)} \to 0$ $(m, n\to\infty)$. Akkor (1) alapján

$$\int_0^1 |f_m(t)-f_n(t)|^p\,dt \to 0 \qquad (m, n\to\infty)$$

és így létezik olyan $f_{n_k}(t)$ részsorozat, amely majdnem mindenütt konvergál egy $f(t)$ határfüggvényhez; nyilvánvaló, hogy $f(0)=0$. Legyen ε tetszőleges pozitív szám és $0<h\leqq 1$. Ha n és n_k elég nagy, akkor a feltevés miatt

$$\left\{ \frac{1}{h}\int_0^h |f_{n_k}(t)-f_n(t)|^p\,dt \right\}^{1/p} \leqq \|f_{n_k}-f_n\|_0^{(p)} < \varepsilon.$$

Ebből a Fatou-féle lemma alkalmazásával adódik, hogy

$$\left\{ \frac{1}{h}\int_0^h |f(t)-f_n(t)|^p\,dt \right\}^{1/p} \leqq \varepsilon \qquad (n>N(\varepsilon)).$$

Tehát $\|f-f_n\|_0^{(p)} \to 0$ $(n\to\infty)$. Továbbá

$$\left\{ \frac{1}{h}\int_0^h |f(t)|^p\,dt \right\}^{1/p} \leqq \left\{ \frac{1}{h}\int_0^h |f(t)-f_n(t)|^p\,dt \right\}^{1/p} + \left\{ \frac{1}{h}\int_0^h |f_n(t)|^p\,dt \right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \|f-f_n\|_0^{(p)} + \left\{ \frac{1}{h}\int_0^h |f_n(t)|^p\,dt \right\}^{1/p}.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy az $f(t)$ függvénynek az $x=0$ pontban p-edrendű Lebesgue-pontja van. Ezzel az L_0^p tér teljességét bebizonyítottuk.

$(q = p\,(p-1))$ osztályba tartozik és így a

$$\Phi_\eta(f) = \int_\eta^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

függvényoperáció minden rögzített η mellett az L_0^p térben korlátos:

$$|\Phi_\eta(f)| = \left|\int_\eta^1 \varphi(t) f(t)\,dt\right| \leqq \left\{\int_\eta^1 |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q} \left\{\int_0^1 |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \left\{\int_\eta^1 |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q} \|f\|_0^{(p)}.^{3)}$$

Mivel minden $f(t) \in L_0^p$ függvényre

$$\lim_{\eta\to 0} \Phi_\eta(f) = \Phi(f)$$

és $\Phi(f)$ véges, ezért a Banach—Steinhaus-féle tétel szerint $\Phi(f)$ L_0^p-ben lineáris függvényoperáció. A következőkben $\Phi(f)$ normáját $\|\Phi\|_0^{(p)}$-vel jelöljük:

$$\|\Phi\|_0^{(p)} = \sup_f |\Phi(f)| \qquad (f \in L_0^p,\ \|f\|_0^{(p)} \leqq 1).$$

SEGÉDTÉTEL. *Fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$4^{-1/p} A(p) \leqq \|\Phi\|_0^{(p)} \leqq A(p),$$

ahol

$$A(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q}.$$

BIZONYÍTÁS. Ha $f(t) \in L_0^p$ és $\|f\|_0^{(p)} \leqq 1$, akkor

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt\right| \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)\,\varphi(t)|\,dt \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q},$$

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)|^p dt \leqq \frac{1}{2^m}\left\{2^m \int_0^{2^{-m}} |f(t)|^p dt\right\} \leqq \frac{1}{2^m},$$

és így $\|\Phi\|_0^{(p)} \leqq A(p)$.

[3]) A $p = 1$, $q = \infty$ határesetben az

$$\left\{\int_\alpha^\beta |h(t)|^q dt\right\}^{1/q}$$

integrál a

$$\lim_{r\to\infty} \left\{\int_\alpha^\beta |h(t)|^r dt\right\}^{1/r} = \operatorname{vrai\,max}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} |h(t)|$$

határértéket jelenti.

Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Mint ismeretes, minden m természetes számhoz létezik egy a $(2^{-m-1}, 2^{-m})$ intervallumon értelmezett $f_m(t)$ függvény, amelyre

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f_m(t)|^p\,dt = 1, \quad \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} f_m(t)\,\varphi(t)\,dt \geqq \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q\,dt \right\}^{1/q} - \varepsilon.^{4})$$

Legyen

$$f^*(t) = 2^{-m/p} f_m(t), \quad \text{ha} \quad t \in (2^{-m-1}, 2^{-m}) \qquad (m, = 0, 1, \ldots).$$

Nyilvánvaló, hogy

(3) $$\Phi(f^*) \geqq A(p) - \frac{1}{1-2^{-1/p}}\,\varepsilon.$$

Legyen $0 < h \leqq 1$ és jelölje $k = k(h)$ azt a természetes számot, amelyre $2^{-k-1} < h \leqq 2^{-k}$. $f^*(t)$ definíciója szerint

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f^*(t)|^p dt \leqq 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} |f^*(t)|^p\,dt = 2^{k+1} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f_m(t)|^p\,dt = 4$$

és így

$$\|f^*\|_0^{(p)} \leqq 4^{1/p}.$$

Ebből és (3)-ból következik, hogy

$$\|\Phi\|_0^{(p)} \geqq 4^{-1/p} A(p).$$

Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

3. §. Tételek szinguláris integrálokra

Tekintsük a

(4) $$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

szinguláris integrált; tegyük fel, hogy $\Phi_n(f)$ *minden n-re L_0^p-ben mindenütt értelmezve van és véges.* Ekkor $\Phi_n(f)$ minden n-re L_0^p-ben lineáris függvény-operáció.

A segédtétel szerint

(5) $$4^{-1/p} A_n(p) \leqq \|\Phi_n\|_0^{(p)} \leqq A_n(p) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ahol

(6) $$A_n(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/p} \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q\,dt \right\}^{1/q} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

[4]) L. pl. S. Banach [1], 61—65.

I. TÉTEL. *Ahhoz, hogy minden $f(t) \in L^p[0, 1]$ függvényre, amelynek az $x = 0$ pont p-edrendű Lebesgue-pontja, fennálljon a*

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(f) = f(0) \tag{7}$$

reláció szükséges és elegendő, hogy

1. *minden η-ra $(0 < \eta \leqq 1)$ teljesüljön a*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\eta} \varphi_n(t)\, dt = 1$$

feltétel és

2. *a (6) alatti $A_n(p)$ értékek egy n-től független $K = K(p)$ állandó alatt maradjanak.*[5])

SZÜKSÉGESSÉG. Az 1. feltétel szükségessége nyilvánvaló. 2. szükségessége a következő módon látható be. (7) szerint minden $f(t) \in L_0^p$ függvényre

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(f) = f(0) = 0.$$

Mivel a $\Phi_n(f)$ függvényoperációk az L_0^p Banach-térben korlátosak, ezért a Banach—Steinhaus-féle tétel szerint normáik korlátosak és így az (5) egyenlőtlenség alapján adódik, hogy az $A_n(p)$ értékek is egy n-től független korlát alatt maradnak.

ELEGENDŐSÉG. Tegyük fel, hogy az $f(t) \in L[0, 1]$ függvénynek az $x = 0$ pontban p-edrendű Lebesgue pontja van. Az 1. feltétel szerint

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 [f(t) - f(0)]\varphi_n(t)\, dt + f(0),$$

ezért elegendő a (7) relációt az $f(0) = 0$ esetben, vagyis az L_0^p osztály függvényeire bebizonyítani.

Legyen $f(t) \in L_0^p$ és ε tetszőleges pozitív szám. Ekkor elég kis $h(>0)$-ra

$$\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} < \frac{\varepsilon}{K}. \tag{8}$$

[5]) B. I. KORENBLJUM, SZ. G. KREJN és B. JA. LEVIN tételében (lásd [4]), a 2. feltétel helyett a $\|\Phi_n\|_0^{(p)} < K$ $(n = 1, 2, \ldots)$ feltétel szerepel. Ezek a szerzők a $\|\Phi_n\|_0^{(p)}$ $(p > 1)$ norma pontos értékét is meghatározták:

$$\|\Phi_n\|_0^{(p)} = \int_0^1 [-\psi_n'(t)]^{1/q} dt,$$

ahol $\psi_n(t)$ az a legnagyobb konvex függvény, amelyre teljesül a

$$\psi_n(t) < F_n(t) = \int_t^1 |\varphi_n(y)|^q dy \qquad (0 < t < 1)$$

egyenlőtlenség.

Legyen m_0 olyan nagy természetes szám, hogy a (8) egyenlőtlenség teljesüljön, valahányszor $0 < h \leqq 2^{-m_0}$. Írjuk fel a (4) szinguláris integrált a következő alakban:

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt = \left(\int_0^{2^{-m_0}} + \int_{2^{-m_0}}^1\right) f(t)\varphi_n(t)\,dt = I_1^{(n)} + I_2^{(n)}.$$

Legyen

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t), & \text{ha } t \in [0, 2^{-m_0}], \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $\|f^*\|_0^{(p)} < \varepsilon/K$. Így az (5) egyenlőtlenség és a 2. feltétel szerint

$$(9) \qquad |I_1^{(n)}| = \left|\int_0^{2^{-m_0}} f(t)\varphi_n(t)dt\right| = \left|\int_0^1 f^*(t)\varphi_n(t)dt\right| \leqq \|\Phi_n\|_0^{(p)}\|f^*\|_0^{(p)} < \varepsilon.$$

A Minkowski-féle egyenlőtlenség alkalmazásával a 2. feltétel alapján adódik, hogy

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\left\{\int_{2^{-m_0}}^1 |\varphi_n(t)|^q dt\right\}^{1/q} \leqq \sum_{m=0}^{m_0-1}\left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt\right\}^{1/q} \leqq \\ &\leqq (2^{m_0-1})^{1/p}\sum_{m=0}^{m_0-1} 2^{-m/p}\left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt\right\}^{1/q} \leqq (2^{m_0-1})^{1/p} A_n(p) \leqq (2^{m_0-1})^{1/p} K. \end{aligned}$$

Továbbá az 1. feltétel szerint minden $h(t)$ lépcsős függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2^{-m_0}}^1 h(t)\varphi_n(t)dt = 0,$$

ahonnan (10) alapján nyerjük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2^{-m_0}}^1 f(t)\varphi_n(t)dt = 0.$$

Tehát elég nagy n-re $|I_2^{(n)}| < \varepsilon$ és így (9) miatt elég nagy n-re $|\Phi_n(f)| < 2\varepsilon$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(f) = 0$. Ezzel az I. tételt bebizonyítottuk.

Az I. tételből következik a

II. TÉTEL. (D. K. FAGYEJEV [2].) *Ahhoz, hogy a* (7) *reláció minden olyan* $f(t) \in L[0, 1]$ *függvényre fennálljon, amelynek az* $x = 0$ *pontban Lebesgue-pontja van, szükséges és elegendő, hogy teljesüljön az* I. *tétel* 1. *feltétele és minden n-re fennálljon az*

$$\int_0^1 \psi_n(t)dt < M(< \infty)$$

egyenlőtlenség, ahol

$$\psi_n(t) = \operatorname*{vrai\,max}_{t\leq y\leq 1} |\varphi_n(y)| \qquad (0<t\leq 1).$$

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{2} A_n(1) \leq \int_0^1 \psi_n(t)dt \leq A_n(1) \qquad (n=1,2,\dots),$$

ebből az I. tétel alkalmazásával adódik az állítás. A $\psi_n(t)$ függvény definíciója szerint

$$\int_0^1 \psi_n(t)\,dt \geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t)\,dt \geq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m-1} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m}\leq t\leq 2^{-m+1}} |\varphi_n(t)| = \frac{1}{2} A_n(1).$$

Másrészről minden m-re

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t)dt \leq 2^{-m-1} \sum_{\mu=0}^{m} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-\mu-1}\leq t\leq 2^{-\mu}} |\varphi_n(t)|$$

és így

$$\int_0^1 \psi_n(t)dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t)\,dt \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-\mu-1}\leq t\leq 2^{-\mu}} |\varphi_n(t)| \left\{ \sum_{m=\mu}^{\infty} 2^{-m-1} \right\} = A_n(1).$$

Az I. tétel felhasználásával bebizonyítható a

III. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a (7) reláció minden olyan $f(t)\in L[0,1]$ függvényre teljesüljön, amelynek az $x=0$ pontban Lebesgue-pontja van, szükséges és elegendő, hogy*

a) *a (7) reláció minden $L_0^p(p>1)$ függvényosztály minden $f(t)$ függvényére teljesüljön és*

b) *a $\|\Phi_n\|_0^p(p>1)$ normák p-től és n-től független korlát alatt maradjanak.*

SZÜKSÉGESSÉG. Ha $p>1$, akkor $L_0^p\subset L_0^1$ és $\|\Phi_n\|_0^p \leq \|\Phi_n\|_0^{(1)}$, amiből a tétel feltételeinek szükségessége nyilvánvaló.

ELEGENDŐSÉG. a) miatt az I. tétel 1. feltétele teljesül. Továbbá minden természetes k-ra érvényes a következő becslés:

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m-1}\leq t\leq 2^{-m}} |\varphi_n(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{k} \left| 2^{-m} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m-1}\leq t\leq 2^{-m}} |\varphi_n(t)| - 2^{m/p} \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q\,dt \right\}^{1/q} \right| + A_n(p).$$

Ha $p \to 1$, azaz ha $q \to \infty$, akkor a jobboldali összeg minden tagja 0-hoz tart és így elég kis $(p-1)$-re

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}} |\varphi_n(t)| \leqq 1 + A_n(p).$$

Mivel k tetszőleges, ezért az $A_n(1)$ értékek b) és (5) szerint n-től független korlát alatt maradnak. Így az I. tétel alkalmazásával adódik a III. tétel feltételeinek elegendősége.

IRODALOM

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Warszawa, 1932.

[2] D. K. Fagyejev, Sur la représentation des fonctions sommables au moyen d'intégrales singulières, *Recueil math. Moscou (Mat. Sbornik),* 1(43) (1936), 351—368.

[3] H. Lebesgue, Sur les intégrales singulières, *Annales de Toulouse,* 1(1900), 25—117.

[4] Б. И. Коренблюм, С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О некоторых нелинейных вопросах теории сингулярных интегралов, Доклады Акад. Наук СССР, **62** (1948), 17—20.

[5] С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О сильной представимости функций сингулярными интегралами, Доклады Акад. Наук СССР, **60** (1948), 195—198.