K. SCHRÖTER EGY, AZ ÁLTALÁNOS REKURZÍV FÜGGVÉNY FOGALMÁNAK DEFINÍCIÓJÁRA VONATKOZÓ PROBLÉMÁJÁNAK MEGOLDÁSA

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

Péter Rózsának, a rekurzív függvények világszerte elismert kutatójának 50. születésnapjára

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében a Német Demokratikus Köztársaságban tett tanulmányutam alkalmával több tudományos előadást tartottam különböző egyetemeken; közülük kettőt a berlini matematikai kollokviumon. Az egyik előadásom kapcsán, 1954. november 22-én, K. SCHRÖTER professzor felvetett egy problémát az általános rekurzív függvény fogalmának definíciójára vonatkozóan. A jelen dolgozat — a szükséges fogalmak és tételek ismertetése[1] után — e probléma megoldását tartalmazza.

1. *Az általános rekurzív függvény fogalma.* Az általános rekurzív függvények bizonyos tulajdonságú *függvényegyenletrendszerek* által definiált aritmetikai függvények. (Aritmetikai függvényen olyan egy- vagy többváltozós függvényt értünk, amely független változójának vagy változóinak nemnegatív egész számú értékeire van értelmezve és értékei is nemnegatív egész számok.) A függvényegyenletrendszer minden egyes egyenletének bal- és jobboldala adott nemnegatív egész számokból és a nemnegatív egész számokon átfutó változókból az egyetlen $y = x + 1 = x'$ ismert függvény, valamint a függvényegyenlet által definiált ismeretlen függvények véges számú alkalmazásával felépülő *kifejezés.* A nemnegatív egész számokon átfutó változókat, az ún. *számváltozókat,* az x, y, z betűkkel jelölöm; minthogy azonban valamely általános rekurzív függvény definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerben akárhány számváltozó előfordulhat, felteszem, hogy megszámlálhatóan[2] végtelen sok számváltozó rendelkezésre áll (pl. $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$). Az ismeretlen függvények jelölésére az f, g, h, a, b, c, d betűket használom; minthogy valamely általános rekurzív függvény definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerben akárhány ismeretlen függvény szerepelhet, felteszem, hogy megszámlálhatóan[2] végtelen sok ilyen, függvények jelölésére szolgáló jel, ún.

[1] Ez az ismertető rész (**1.**, **2.** és **3.** pont) nem tartalmaz új eredményt, azonban lehetővé teszi, hogy e dolgozatot a rekurzív függvények elméletére vonatkozó előismeretek nélkül is meg lehessen érteni.

[2] Minthogy egy-egy függvényegyenletrendszerben csak véges számú számváltozó fordulhat elő és csak véges számú ismeretlen függvény szerepelhet, és minthogy mellékes, hogy a függvényegyenletrendszerben szereplő tetszőleges nemnegatív egész számokat és ismeretlen függvényeket hogyan jelöljük, megszámlálhatóan végtelen sok számváltozó és funktor biztosan elég bármely függvényegyenletrendszer felírásához.

funktor rendelkezésre áll (pl. $f, g, h, a, b, c, d, f_1, g_1, h_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_2, g_2, h_2, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots$). Egy-egy funktort egy és ugyanazon függvényegyenletrendszerben mindig ugyanazon ismeretlen függvény, tehát mindig ugyanannyi változós ismeretlen függvény jelölésére használok, tehát kerülni fogom azt, hogy egy függvényegyenleten belül pl. $f(x)$ is, $f(x, y)$ is előforduljon. Ezért kikötöm, hogy minden egyes funktorhoz hozzá van rendelve egy pozitív egész szám, mint a funktor által jelölhető függvény független változóinak száma; ezt a számot a kérdéses funktor *argumentumszámának* nevezzük. Minthogy valamely általános rekurzív függvény definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerben akárhány változós ismeretlen függvényből akárhány előfordulhat, felteszem, hogy $r = 1, 2, 3, \ldots$ esetén végtelen sok r argumentumszámú funktor rendelkezésre áll.

Az általános rekurzív függvények definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerben szereplő egyetlen adott függvényt mindig így jelölöm: $y = x'$; itt tehát x' a természetes számsorban[3] a közvetlenül az x-szel jelölt nemnegatív egész szám után következő egész számot jelöli (pl. $0' = 1$, $1' = 2$, $2' = 3, \ldots, 9' = 10$, $10' = 11, \ldots, 99' = 100, \ldots$). Ennélfogva a pozitív egész számokat a szokásos $1, 2, 3, \ldots$ jelölés helyett így is jelölhetjük: $0', 0'', 0''', \ldots$. Ez a gyakorlati szempontból kényelmetlen jelölés az alábbi elméleti meggondolások szempontjából célszerűbb lesz, mint az $1, 2, 3, \ldots$ jelölés; ezért felteszem, hogy az általános rekurzív függvények definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerekben az adott nemnegatív egész számok mindenütt csak $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ alakban fordulnak elő.

Ezek előrebocsátása után pontosan definiálhatjuk, mit értünk (az általános rekurzív függvények definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerek egyenletei bal- és jobboldalán előfordulható) kifejezésen. A definíció a kifejezés komplikáltságát jelző *rendszáma* szerinti rekurzióval történik; később azonban nem lesz szükség a rendszám fogalmára.

0-*adrendű kifejezésen* értjük a 0 konstanst és a számváltozók bármelyikét. Ha már tudjuk, mi az az n-edrendű vagy alacsonyabbrendű kifejezés, akkor $n+1$-*edrendű kifejezésen* bármely $\mathbf{f}(K_1, K_2, \ldots, K_r)$ alakú jelsorozatot[4] értünk, ahol $\mathbf{f}$ helyén akármelyik r argumentumszámú funktor állhat[5], $K_1, K_2, \ldots, K_r$ pedig legfeljebb n-edrendű kifejezések, amelyek közül legalább egy pontosan n-edrendű, továbbá bármely K' alakú jelsorozatot[4], ahol K valamely n-edrendű

[3] A 0-t is a természetes számsorhoz számítom.

[4] A definícióból világos, hogy minden kifejezés — alakját tekintve — a 0 konstansból, a számváltozókból, a ′ jelből, a funktorokból és a (,) és , (kezdőzárójel, végzárójel és vessző) írásjelekből álló véges sorozat. Jelentését tekintve minden kifejezés valamely nemnegatív egész számot jelöl, amelynek értéke általában attól függ, milyen aritmetikai függvényeket jelölünk a benne előforduló funktorokkal és milyen nemnegatív egész számú értékeket adunk a benne előforduló számváltozóknak.

[5] Kövér kisbetűvel általában a funktorok közül valamelyik tetszőlegeset jelöljük.

kifejezés. *Kifejezésen* értünk bármely olyan K jelsorozatot[4], amelyhez van olyan n nemnegatív egész szám, hogy K n-edrendű kifejezés[6].

Pl. $0, x, y, z$ 0-adrendű kifejezések; $0', x', y', z'$ és (ha pl. az f, g, h funktorok argumentumszáma sorra 2, 2, 1) $f(0,0), f(x,x), f(x,y), f(y,x), g(0,0), h(0), h(x)$ elsőrendű kifejezések; $0'', x'', f(0',0'), f(0,0'), f(0,x'), f(0,0)', f(x,0)', f(x,y)', f(x,h(x)), f(g(x,y),h(0)), h(h(0)), h(0'), h(0)', h(x'), h(x)'$ másodrendű kifejezések; $0''', x''', f(0,0''), f(0,0')', f(0,0)'', f(x,y''), f(x',y''), f(x,y')', f(x,y)'', f(g(x,h(y)),z), f(0,h(h(x))), h(h(h(x))), h(f(x,y)'), h(f(x,g(x,0)))$ harmadrendű kifejezések. A fentieknek megfelelően *nemnegatív egész számokon* (röviden: számokon) a $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ kifejezéseket értjük.

Függvényegyenleten (röviden: egyenleten) $K = L$ alakú jelsorozatot értünk, ahol K és L kifejezések; *függvényegyenletrendszeren* (röviden: egyenletrendszeren) pedig olyan véges halmazt[7], amelynek elemei függvényegyenletek.

Pl.

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ 0'' &= 0, \\ 0' &= x, \\ f(x, f(y,z)) &= f(f(x,y),z), \\ h(f(x,y)) &= f(h(x),h(y)), \\ h(h(x)) &= x'' \end{aligned}$$

függvényegyenletek,

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 0, \\ f(x,x) &= 0', \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(x,0) &= x, \\ f(x,y') &= f(x,y)', \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(x,y) &= f(y,x), \\ f(x,f(y,z)) &= f(f(x,y),z), \\ f(x,x) &= h(x), \\ h(f(x,y)) &= h(f(x),f(y)) \end{aligned} \right.$$

függvényegyenletrendszerek. Minden függvényegyenlet magában is függvényegyenletrendszert alkot.

[6] A kifejezés rendszáma fogalmának, amelyre kizárólag csak azért van szükség, hogy szerinte haladó rekurzióval definiálhassuk a kifejezés fogalmát, kiküszöbölésére szokás az ilyenféle definíciót a következő alakban is kimondani: a 0 konstans és a számváltozók kifejezések; ha $K_1, K_2, \ldots, K_r$ már kifejezések, $\mathfrak{f}$ pedig valamely r argumentumszámú funktor, akkor $\mathfrak{f}(K_1, K_2, \ldots, K_r)$ is kifejezés; ha K már kifejezés, akkor K' is kifejezés; más nem kifejezés. Halmazelméleti alakban így mondhatnók ki ezt a definíciót: a kifejezések halmazán értjük mindazon halmazok metszetét, amelyeknek a 0 konstans és bármely számváltozó eleme, továbbá, valahányszor $K_1, K_2, \ldots, K_r$ elemei és $\mathfrak{f}$ valamely r argumentumszámú funktor, akkor $\mathfrak{f}(K_1, K_2, \ldots, K_r)$ is eleme, és valahányszor K eleme, K' is eleme.

[7] A függvényegyenletrendszerhez tartozó függvényegyenletek sorrendje nem lényeges.

Egy F függvényegyenletről azt mondjuk, hogy valamely E függvényegyenletből *specializálással* keletkezik, ha F úgy jön létre E-ből, hogy egy vagy több számváltozó helyébe, mindenütt, ahol E baloldalán vagy jobboldalán előfordul, egy-egy tetszőleges számot (azaz a $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ kifejezések valamelyikét) helyettesítjük, azonban ugyanazon számváltozó helyébe mindenütt, ahol előfordul, egy és ugyanazt a számot. Pl. az $f(x, 0) = x$ függvényegyenletből az $f(0'', 0) = 0''$ egyenlet, vagy az $f(x, y') = f(x, y)'$ függvényegyenletből az $f(0'', 0') = f(0'', 0)'$ egyenlet specializálással keletkezik (az előbbi esetben x helyébe $0''$-t helyettesítettünk; az utóbbi esetben egyidejűleg helyettesítettünk x helyébe $0''$-t, y helyébe pedig 0-t). De specializálással (ti. y helyébe $0'$ helyettesítésével) keletkezik az $f(x, y') = f(x, y)'$ függvényegyenletből az $f(x, 0'') = f(x, 0')'$ egyenlet is.

Egy F függvényegyenletről azt mondjuk, hogy valamely E függvényegyenletből valamely G függvényegyenlet *alkalmazásával* keletkezik, ha F úgy jön létre E-ből, hogy a G baloldalán álló kifejezést egy vagy több helyen, ahol E-ben (akár baloldala, akár jobboldala részeként, esetleg E baloldalaként vagy jobboldalaként) előfordul, a G jobboldalán álló kifejezéssel pótoljuk. Pl. az $f(0'', 0') = f(0'', 0)'$ egyenletből az $f(0'', 0) = 0''$ egyenlet alkalmazásával az $f(0'', 0') = 0'''$ egyenlet keletkezik; az $f(f(x, x), f(x, x)) = f(f(x, x), 0)$ függvényegyenletből az $f(x, x) = h(x)$ függvényegyenlet alkalmazásával az $f(h(x), f(x, x)) = f(f(x, x), 0)$, $f(f(x, x), h(x)) = f(f(x, x), 0)$, $f(f(x, x), f(x, x)) = f(h(x), 0)$, $f(h(x), h(x)) = f(f(x, x), 0)$, $f(h(x), f(x, x)) = f(h(x), 0)$, $f(f(x, x), h(x)) = f(h(x), 0)$, $f(h(x), h(x)) = f(h(x), 0)$ függvényegyenletek bármelyike keletkezhetik (aszerint, hogy mely helyen vagy helyeken pótoljuk $f(x, x)$-et $h(x)$-szel); a $h(f(x, y)) = f(h(x), h(y))$ függvényegyenletből a $h(f(x, y)) = f(h(y), h(x))$ függvényegyenlet alkalmazásával az $f(h(y), h(x)) = f(h(x), h(y))$ függvényegyenlet keletkezik.

Egy F függvényegyenletről azt mondjuk, hogy valamely R függvényegyenletrendszer *triviális következménye,* ha az R egyenleteiből véges számú specializálással és alkalmazással (ti. akár az R egyenleteinek, akár a belőlük már véges számú specializálással és alkalmazással megkapott egyenleteknek alkalmazásával) keletkezik. A definíció világosabb lesz, ha a triviális következmény fogalmát a specializálások és alkalmazások együttes száma szerinti rekurzióval definiáljuk; ezt a számot a triviális következmény *rendszámának* nevezzük.

Egy F függvényegyenletet valamely R függvényegyenletrendszer 0-*adrendű triviális következményének* nevezzük, ha az R egyenleteinek valamelyike. Ha már tudjuk, mit jelent az, hogy egy függvényegyenlet valamely függvényegyenletrendszer n-edrendű vagy alacsonyabbrendű triviális következménye, akkor azon, hogy egy F függvényegyenlet valamely R függvényegyenletrendszer $n+1$-*edrendű triviális következménye,* azt értjük, hogy vagy specializálással keletkezik R valamely n-edrendű triviális következményéből, vagy pedig

R valamely legfeljebb n-edrendű E triviális következményéből R valamely legfeljebb n-edrendű G triviális következményének alkalmazásával keletkezik, de E és G közül legalább az egyik pontosan n-edrendű triviális következménye R-nek. Egy F függvényegyenletről akkor mondjuk, hogy valamely R függvényegyenletrendszer *triviális következménye*, ha van legalább egy[8] olyan n nemnegatív egész szám, hogy F az R-nek n-edrendű triviális következménye[9].

A *triviális* jelzőt azért célszerű alkalmazni, mert valamely R függvényegyenletrendszer *következményén* bármely olyan függvényegyenletet természetes érteni, amelyet R minden megoldása, azaz minden olyan függvényrendszer kielégít, amely R mindegyik egyenletét, az R-ben előforduló számváltozók minden értéke esetén, kielégíti. Világos, hogy valamely R függvényegyenletrendszer minden triviális következménye ilyen értelemben is következménye R-nek (feltéve, hogy olyan esetben, amikor R-nek egyáltalában nincs megoldása, bármely függvényegyenletet R következményének tekintünk)[10]. Fordítva azonban ez nem áll, van olyan R függvényegyenletrendszer, amelynek nem minden következménye triviális következménye. Ez adódik a jelen dolgozat eredményéből is, de egyszerűbben is bebizonyítható[11].

[8] Könnyen meggyőződhetünk, hogy előfordulhat, hogy egy és ugyanazon függvényegyenlet valamely függvényegyenletrendszernek különböző rendű triviális következménye.

[9] A triviális következmény rendszáma fogalmának kiküszöbölésére a következőképpen is kimondhatjuk a triviális következmény fogalmának definícióját (lásd a 6. lábjegyzetet): egy R függvényegyenletrendszer triviális következményének nevezzük R egyenleteit, továbbá bármely olyan függvényegyenletet, amely R valamely triviális következményéből specializálással, vagy R valamely másik triviális következményének alkalmazásával keletkezik, más függvényegyenletet azonban nem.

[10] Természetesen jogosan nevezhetnők még R bizonyos más következményeit is triviális következményeinek (pl. azokat, amelyekhez számváltozók helyébe *tetszőleges* kifejezések (nemcsak számok) helyettesítésével, továbbá az R-hez tartozó, vagy véges számú ilyen helyettesítéssel és alkalmazással már megkapott egyenletek alkalmazásával juthatunk; vagy bármely $K=K$ alakú egyenletet; vagy azokat, amelyekhez a fenti eljárásokon kívül az egyenletek bal- és jobboldalának felcserélésével juthatunk); azonban a továbbiakban mindig a fent definiált értelemben értjük majd a triviális következmény fogalmát.

[11] Pl. az

$$\begin{cases} f_1(x,0)=x, \\ f_1(x,y')=f_1(x,y)', \\ f_2(x,0)=0, \\ f_2(x,y')=f_1(x,f_2(x,y)), \\ c(f_1(x,y),x)=0, \\ c(x,f_1(x,y'))=0', \\ f_2(h(x),c(h(x),y))=0 \end{cases}$$

függvényegyenletrendszernek a $h(x)=0$ egyenlet következménye (mert az első hat egyenletének csak az $f_1(x,y)=x+y$, $f_2(x,y)=xy$ és

$$c(x,y)=\begin{cases} 0, \text{ ha } x\geqq y, \\ 1, \text{ ha } x<y \end{cases}$$

Egy R függvényegyenletrendszerről azt mondjuk, hogy valamely benne szereplő, azaz valamely R-ben előforduló $\mathbf{f}$ funktorral jelölt, függvény *értékeit meghatározza,* ha tetszőleges $n_1, n_2, \ldots, n_r$ nemnegatív egész számokhoz (azaz $0''^{\cdots\prime}$ alakú kifejezésekhez), ahol r az $\mathbf{f}$ funktor argumentumszáma, egy és csak egy olyan m nemnegatív egész szám van, hogy az $\mathbf{f}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = m$ egyenlet triviális következménye R-nek.

Pl. az

$$S \begin{cases} f_1(x, 0) = x, \\ f_1(x, y') = f_1(x, y)' \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer az f_1 függvény értékeit egyértelműen meghatározza. Valóban, legyen k és n két tetszőleges nemnegatív egész szám. Mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy *van* olyan m nemnegatív egész szám, hogy az $f_1(k, n) = m$ egyenlet triviális következménye az S egyenletrendszernek. Valóban, ez áll, ha $n = 0$; ugyanis S első egyenletében x helyébe k-t helyettesítve adódik, hogy az $f_1(k, 0) = k$ egyenlet triviális következménye S-nek. Ha állításunk valamely n nemnegatív egész számra igaz, akkor igaz n'-re is. Ugyanis S második egyenletében x helyébe k-t, y helyébe n-et helyettesítve adódik, hogy az $f_1(k, n') = f_1(k, n)'$ egyenlet triviális következménye S-nek; ebből az egyenletből, az $f_1(k, n) = m$ egyenletet alkalmazva, amely az indukciós feltevés szerint triviális következménye S-nek, adódik, hogy az $f_1(k, n') = m'$ egyenlet is triviális következménye S-nek. Az, hogy adott k és n nemnegatív egész számokhoz *csak egy* olyan m nemnegatív egész szám lehet, ti. k és n összege, hogy az $f_1(k, n) = m$ egyenlet triviális következménye S-nek, pl. abból adódik, hogy az $f_1(x, y) = x + y$ függvény kielégíti az S függvényegyenletrendszert. Valóban, ha $f_1(x, y) = x + y$, akkor tetszőleges x nemnegatív egész szám esetén $f_1(x, 0) = x + 0 = x$ és tetszőleges x és y nemnegatív egész számok esetén $f_1(x, y') = x + y' = x + y + 1 = f_1(x, y)'$. Ennélfogva az $f_1(x, y) = x + y$ függvény kielégíti az S függvényegyenletrendszer bármely (triviális vagy nem triviális) következményét; így, ha az $f_1(k, n) = m$ egyenlet következménye S-nek, akkor[12] $m = k + n$. Ilyen értelemben tehát az S egyenlet-

függvények tesznek eleget és így a hetedik egyenlete azt mondja ki, hogy (bármely x-re és y-ra) vagy $h(x) = 0$, vagy $h(x) \geqq y$; minthogy az utóbbi nem állhat adott x esetén bármely y-ra, tehát csak a $h(x) = 0$ függvény tesz eleget az egész függvényegyenletrendszernek); azonban könnyen meg lehet mutatni, hogy nem triviális következménye (ennek az az oka, hogy a hetedik egyenletből y helyébe véges számú szám helyettesítésével csupa olyan egyenlet keletkezik, amelynek még más h függvény is eleget tesz, pl. bármely olyan konstans, amely nagyobb, vagy ugyanakkora, mint a helyettesített véges számú szám bármelyike). — A fenti példa nem a legegyszerűbb példa valamely függvényegyenletrendszer nem triviális következményére, azonban módot ad arra, hogy az olvasó előre megismerje a SCHRÖTER-féle probléma megoldásának alapgondolatát.

[12] Itt természetesen m azt a *kifejezést* jelöli, amely a $k + n$ nemnegatív egész számot állítja elő $0''^{\cdots\prime}$ alakban (tehát 0-t annyi vesszővel, amennyi a k és az n kifejezésekben együttvéve van a 0 után). Hasonló értelemben beszélünk később majd ($k > n$ esetén) $k - n - 1$-ről, ill. ($k < n$ esetén) $n - k - 1$-ről.

rendszer az $f_1(x, y) = x + y$ függvény értékeit határozza meg. Hasonlóan látni, hogy a

$$P \begin{cases} f_1(x, 0) = x, \\ f_1(x, y') = f_1(x, y)', \\ f_2(x, 0) = 0, \\ f_2(x, y') = f_1(x, f_2(x, y)) \end{cases}$$

egyenletrendszer meghatározza az $f_1(x, y) = x + y$ és $f_2(x, y) = xy$ függvények értékeit, a

$$Q \begin{cases} f_1(x, 0) = x, \\ f_1(x, y') = f_1(x, y)', \\ f_2(x, 0) = 0, \\ f_2(x, y') = f_1(x, f_2(x, y)), \\ f_3(x, 0) = 0', \\ f_3(x, y') = f_2(x, f_3(x, y)) \end{cases}$$

egyenletrendszer pedig a $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = xy$ és $f_3(x, y) = x^y$ függvények értékeit.

Az S, P, Q egyenletrendszerek példát szolgáltatnak ún. primitív rekurzióval való definícióra. Általában *primitív rekurzióval való definíciónak* nevezünk minden

$$R \begin{cases} \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{r_1-1}, 0) = K_1, \\ \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{r_1-1}, x'_{r_1}) = L_1, \\ \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \ldots, x_{r_2-1}, 0) = K_2, \\ \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \ldots, x_{r_2-1}, x'_{r_2}) = L_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{f}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{r_n-1}, 0) = K_n, \\ \mathbf{f}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{r_n-1}, x'_{r_n}) = L_n \end{cases}$$

alakú függvényegyenletrendszert, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén r_i az $\mathbf{f}_i$ funktor argumentumszáma, K_i olyan kifejezés, amelyben nem fordul elő más számváltozó, mint $x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}$ és nem fordul elő más funktor, mint $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{i-1}$ (tehát K_1-ben egyáltalában nem fordul elő funktor), L_i pedig olyan kifejezés, amelyben nem fordul elő más számváltozó, mint $x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}$ és nem fordul elő más funktor, mint $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_i$, de $\mathbf{f}_i$ is csak az $\mathbf{f}_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, x_{r_i})$ kifejezésben fordul elő L_i-ben; továbbá minden olyan függvényegyenletrendszert, amely R-ből egy

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = K$$

alakú egyenlet hozzávételével keletkezik, ahol r az $\mathbf{f}$ funktor argumentumszáma, K pedig olyan kifejezés, amelyben nem fordul elő más számváltozó, mint $x_1, x_2, \ldots, x_r$ és nem fordul elő más funktor, mint $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. (Meg van engedve $n = 0$ is; ez esetben a primitív rekurzió egyedül az $\mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = K$ egyenletből áll és itt K-ban egyáltalában nem fordul elő funktor.) Pl.

az az egyenletrendszer, amely egyedül az $f(x)=0''$ egyenletből áll, továbbá az

$$A \begin{cases} a(0)=0' \\ a(x')=0, \end{cases}$$

egyenletrendszer és a P-ből a

$$d(x, y, z)=f_2(f_2(x, y), z)$$

egyenlet hozzávételével keletkező P' függvényegyenletrendszer is primitív rekurzióval való definíció; hasonlóan a Q-ból az

$$f_4(x, 0)=0',$$
$$f_4(x, y')=f_3(x, f_4(x, y))$$

egyenletek hozzávételével keletkező Q' függvényegyenletrendszer is.

Meg lehet mutatni, hogy minden primitív rekurzióval való definíció meghatározza minden benne szereplő (funktorral jelölt) függvény értékeit. Az olyan aritmetikai függvényt, amelyhez van olyan primitív rekurzióval való definíció, amely (többek között) a kérdéses függvény értékeit meghatározza, *primitív rekurzív függvénynek* nevezzük[13]. Pl. a fentiek szerint $x+y$, xy, x^y, $0''$, továbbá az A egyenletrendszer által definiált a függvény (amelynek értéke a 0 helyen 1, a pozitív egész helyeken pedig 0), a P' egyenletrendszer által (az $f_1(x, y)=x+y$ és $f_2(x, y)=xy$ függvényekkel együtt) definiált $d(x, y, z)=xyz$ függvény, valamint a Q' egyenletrendszer által (az $f_1(x, y)=x+y$, $f_2(x, y)=xy$ és $f_3(x, y)=x^y$ függvényekkel együtt) definiált

$$f_4(x, y)=x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$$

függvény, ahol az x-ek száma y (és $y=0$ esetén $f_4(x, y)=1$), primitív rekurzív függvények.

Azonban a primitív rekurzióval való definíciókon kívül még más olyan függvényegyenletrendszerek is vannak, amelyek meghatározzák a bennük szereplő függvények értékeit. Ilyen pl. a

$$B \begin{cases} f_1(x, 0)=x, \\ f_1(x, y')=f_1(x, y)', \\ b(x, x)=0, \\ b(f_1(x, y'), x)=0', \\ b(x, f_1(x, y'))=0' \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer, amely nyilván nem primitív rekurzióval való definíció. Valóban, azt már láttuk, hogy a B egyenletrendszer első két egyenletéből álló S függvényegyenletrendszer meghatározza az $f_1(x, y)=x+y$ függvény értékeit; tehát nyilván csak azt kell megmutatni, hogy B meghatározza

[13] Könnyen látható, hogy ez a definíció ekvivalens a primitív rekurzív függvény fogalmának szokásos definiciójával, pl. azzal, amely PÉTER RÓZSA [2] könyvének 25. oldalán szerepel. (A nevek után szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.)

a b függvény értékeit is, vagyis, hogy tetszőleges k és n nemnegatív egész számokhoz egy és csak egy olyan m nemnegatív egész szám van, hogy a $b(k,n)=m$ egyenlet triviális következménye B-nek. Valóban, ilyen m van, ha n ugyanaz a szám, mint k, mert akkor a $b(k,k)=0$ egyenlet a B egyenletrendszer harmadik egyenletéből specializálással keletkezik. Ellenkező esetben van olyan p nemnegatív egész szám (ti. $k>n$ esetén $p=k-n-1$, $k<n$ esetén pedig $p=n-k-1$), hogy vagy $k=n+p'$, vagy $n=k+p'$. Az első esetben az $f_1(n,p')=k$, a másodikban az $f_1(k,p')=n$ egyenlet triviális következménye B-nek (mert a B egyenletrendszer meghatározza az $f_1(x,y)=x+y$ függvény értékeit). Ugyancsak triviális következményei B-nek a

$$b(f_1(n,p'),n)=0',$$
$$b(k,f_1(k,p'))=0'$$

egyenletek is, amelyek B két utolsó egyenletéből specializálással keletkeznek. Ennélfogva a $b(k,n)=0'$ egyenlet is triviális következménye B-nek, hiszen ez akár a $b(f_1(n,p'),n)=0'$ egyenletből az $f_1(n,p')=k$ egyenlet alkalmazásával, akár a $b(k,f_1(k,p'))=0'$ egyenletből az $f_1(k,p')=n$ egyenlet alkalmazásával megkapható és, mint láttuk, az $f_1(n,p')=k$ és $f_1(k,p')=n$ egyenletek közül valamelyik triviális következménye B-nek. Eszerint minden esetben van olyan m nemnegatív egész szám, ti. $n=k$ esetben 0, különben 0', hogy a $b(k,n)=m$ egyenlet triviális következménye B-nek. Hogy csak egy ilyen szám lehet, az az S függvényrendszerrel kapcsolatban mondottakhoz hasonló módon adódik abból, hogy az $f_1(x,y)=x+y$ és a

$$b(x,y)=\begin{cases}0, & \text{ha } x=y,\\ 1, & \text{ha } x\neq y\end{cases}$$

függvények kielégítik a B függvényegyenletrendszert. Eszerint a B egyenletrendszer az $f_1(x,y)=x+y$ és a fenti $b(x,y)$ függvények értékeit határozza meg.

Hasonló módon adódik, hogy a

$$C\begin{cases}f_1(x,0)=x,\\ f_1(x,y')=f_1(x,y)',\\ c(f_1(x,y),x)=0,\\ c(x,f_1(x,y'))=0'\end{cases}$$

függvényegyenletrendszer, amely szintén nem primitív rekurzióval való definíció, meghatározza az $f(x,y)=x+y$ és a

$$c(x,y)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\geqq y,\\ 1, & \text{ha } x<y\end{cases}$$

függvény értékeit.

Könnyen meg lehet mutatni, hogy a B, ill. C függvényegyenletrendszer által definiált b és c függvények primitív rekurzív függvények, azaz van primitív rekurzióval való definíciójuk is[14]. Meg lehet azonban mutatni, hogy van olyan függvényegyenletrendszer is, amely meghatározza a benne szereplő függvények értékeit, bár azok nem mind primitív rekurzív függvények. Ilyen pl. a

$$Q'' \begin{cases} d_1(x,y,0) = x+y, \\ d_1(x,0,0') = 0, \\ d_1(x,0,0'') = 0', \\ d_1(x,0,z''') = x, \\ d_1(x,y',z') = d_1(x,d_1(x,y,z'),z) \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer, amely egy olyan d_1 függvény[15] értékeit határozza meg, amelyről ACKERMANN [1] bebizonyította, hogy nem primitív rekurzív függvény. (Később PÉTER RÓZSA [1] egy hasonló, de egyszerűbb egyenletrendszerrel definiált függvényről mutatta ki, hogy nem primitív rekurzív függvény.)

A Q'' (és a [15] lábjegyzetben szereplő Q''') egyenletrendszer két változó (y és z) szerint haladó, ún. kétszeres rekurzióval való definíció. Az ilyen definíció a primitív rekurzióval való definíció legegyszerűbb olyan általánosítása, amely már nem minden esetben pótolható primitív rekurzióval való definícióval. A primitív rekurzióval való definíciónak még több, bonyolultabb általánosítása ismeretes[16]; ezek mind olyan egyenletrendszerek, amelyek a definiálandó függvény (és a definíciójához szükséges esetleges „segédfüggvények") értékeit meghatározzák. Ez a körülmény indokolja a következő definíciót:

Általános rekurzióval való definíción (röviden: *általános rekurzív definíción*) *bármely olyan függvényegyenletrendszert értünk, amely minden benne szereplő függvény értékeit meghatározza. Az olyan aritmetikai függvényeket,*

[14] Ez adódik pl. abból, hogy (PÉTER RÓZSA [2] művének jelöléseivel) $b(x,y) = \mathrm{sg}(|x-y|)$, $c(x,y) = \mathrm{sg}(y \dot{-} x)$ és hogy $y \dot{-} x$, $\mathrm{sg}(x)$ és $|x-y|$ primitív rekurzív függvények; lásd PÉTER RÓZSA [2], 6., 7. és 12. oldal.

[15] Könnyen látható, hogy $d_1(x,y,0) = f_1(x,y) = x+y$, $d_1(x,y,1) = f_2(x,y) = xy$, $d_1(x,y,2) = f_3(x,y) = x^y$, $d_1(x,y,3) = f_4(x,y+1) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$ (az x-ek száma $y+1$) és általában $d_1(x,y,z)$ jelentése: a $z+1$-edik direkt „alapművelet" az x „alapon" és y „kitevőn" elvégezve. Az ACKERMANN által választott $d_1(x,0,z) = x$ definíció ($z \geqq 3$ esetén) önkényes, logikusabb volna a definíciót úgy módosítani, hogy $z \geqq 3$ esetén $d_1(x,0,z) = 1$ legyen (mint $z = 2$ esetén is). Ez esetben $d_1(x,y,3) = f_4(x,y) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$ volna, ahol az x-ek száma y és a (módosított) $d_1(x,y,z)$ függvényt az egyszerűbb

$$Q''' \begin{cases} d_1(x,y,0) = x+y, \\ d_1(x,0,0') = 0, \\ d_1(x,0,z'') = 0', \\ d_1(x,y',z') = d_1(x,d_1(x,y,z'),z) \end{cases}$$

egyenletrendszerrel lehetne definiálni, amely ugyancsak meghatározza a d_1 függvény értékeit.

[16] Ezeket az általánosításokat meg lehet ismerni PÉTER RÓZSA [2] művéből; ott további irodalmi utalásokat is talál az e kérdések iránt érdeklődő olvasó.

amelyekhez van olyan általános rekurzív definíció, amely (többek között) a kérdéses függvény értékeit meghatározza, általános rekurzív függvényeknek nevezzük[17].

2. *Schröter problémája.* Az általános rekurzióval való definíció fogalma merész általánosítást tartalmaz, amennyiben a definíció gyanánt szolgáló függvényegyenletrendszer alakjáról semmit sem köt ki, ellentétben a primitív rekurzióval való definícióval és annak egyéb általánosításaival, amelyeknek éppen az alakjuk adja meg a jellegüket. Ennek a merész általánosításnak köszönhető, hogy a tapasztalat szerint minden olyan függvénydefiníció, amelynek alapján a definiált aritmetikai függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, átalakítható általános rekurzióval való definícióvá (amennyiben eredetileg nem az), úgy, hogy az általa definiált függvény általános rekurzív függvénynek bizonyul.

Azt a tényt, hogy ez valóban mindig így van, természetesen addig nem lehet szabatosan bebizonyítani, amíg szabatosan nem definiáljuk, mit értünk olyan aritmetikai függvényen, amelynek értékét bármely adott helyen, a függvény definíciója alapján, véges számú lépésben ki lehet számítani, röviden: „kiszámítható" függvényen. A kiszámítható függvény fogalmának többen is javasolták egy-egy definícióját (l. pl. CHURCH [1], TURING [1], MARKOV [1]); e definíciók bármelyike alapján valóban sikerült is megmutatni, hogy a kérdéses definíció értelmében kiszámítható függvények osztálya azonos az általános rekurzív függvények osztályával (l. KLEENE [2], ill. TURING [2]; MARKOV szóbeli közlése szerint ez az ő definíciójára is áll). E definíciók mindegyike olyan, hogy lerögzíti az aritmetikai függvények definiálásának egy módját; mindegyik esetén világos, hogy a kérdéses módon definiált függvények értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani. Azonban a kiszámítható függvény fogalmának egyik definíciója esetén sem ölel fel a lerögzített függvénydefiniálás-mód *minden* olyan függvénydefiníciót, amelynek alapján a definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, úgy, hogy a kiszámítható függvény fogalmának mindegyik definíciója azon a sejtésen alapul, hogy minden olyan függvénydefiníció, amelynek alapján a definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, *visszavezethető* egy, a kérdéses függvénydefiniálás-mód alá tartozó definícióra. E sejtések egyike sem plauzibilisebb, mint az a sejtés, hogy minden olyan függvénydefiníció, amelynek alapján a definiált függvény értékét bármely adott helyen ki lehet számítani, visszavezethető általános rekurzióval való definícióra; legegyszerűbb tehát a kiszámítható függvény fogalmát úgy definiálni, hogy éppen az általános rekurzív függvényeket értjük kiszámítható függvényeken.

Természetesen ez esetben is, éppúgy, mint a kiszámítható függvény fogalmának többi javasolt definíciója esetében, fennáll az a kétely, vajon nem

[17] Lásd pl. KLEENE [1], Definition 2*b*, 731. oldal.

sikerül-e egyszer majd olyan függvénydefiníciót találni, amelyről nyilvánvaló, hogy az általa definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, de amelyet mégsem lehet általános rekurzióval való definícióra (vagy a kiszámítható függvény fogalmának többi javasolt definíciójában szereplő megfelelő függvénydefiniálás-módra) visszavezetni, mert az általa definiált függvény nem általános rekurzív függvény. Ezt a kételyt a kiszámítható függvény fogalmának semmiféle újabb definíciója sem tudná eloszlatni, hiszen minden definíció elhatárolás, márpedig a kiszámítható függvény fogalmának a lényegéhez tartozik hozzá, hogy nem tűr semmiféle elhatárolást: akármilyen függvénydefiníciót, amelynek alapján az általa definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, kiszámítható függvény definíciójának kell tekintenünk, akár közé esik az elhatárolt függvénydefiníciók közé, akár nem. Így a kiszámítható függvény fogalmának bármely szabatosan definiált fogalmát csak többé-kevésbé plauzibilisnak tarthatjuk, de véglegesnek nem.

Annak a definíciónak plauzibilitása, amely szerint az általános rekurzív függvényeket értjük kiszámítható függvényeken, más szóval annak a sejtésnek a plauzibilitása, hogy minden olyan függvénydefiníció, amelynek alapján az általa definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, visszavezethető általános rekurzióval való definícióra, éppen az általános rekurzióval való definíció fogalmának fentemlített merészen általános voltán alapul s így csak emelkedik, ha meg tudjuk mutatni, hogy e fogalom még további kínálkozó általánosításai sem vezetnek bővebb függvényosztályhoz.

Így pl. mindenekelőtt arra lehet gondolni, hogy felesleges kikötés az általános rekurzív definíció fogalmának definíciójában, hogy a függvényegyenletrendszer *minden* benne szereplő függvény értékeit meghatározza, hiszen ha csak egyes benne szereplő függvények értékeit határozza meg egy függvényegyenletrendszer, a többiét nem[18], akkor is ki lehet azon függvények értékét

[18] Pl. az

$$\begin{cases} a(0) = 0', \\ a(0') = 0, \\ h(0) = 0, \\ h(x') = a(h(x)), \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer *egyáltalában* nem határozza meg $a(2)$ értékét (azaz nincs $a(0'') = m$ alakú triviális következménye (nem triviális sincs), ahol m nemnegatív egész szám); az

$$\begin{cases} a(0) = 0', \\ a(0') = 0, \\ a(0'') = 0, \\ a(0'') = 0', \\ h(0) = 0, \\ h(x') = a(h(x)), \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer pedig nem határozza meg $a(2)$ értékét *egyértelműen* (mert $a(0'') = 0$ is, $a(0'') = 0'$ is triviális következménye). A h függvény értékeit azonban mégis mindkét egyenletrendszer (egyértelműen) meghatározza: a $h(0) = 0$, $h(0') = 0'$, $h(0'') = 0$, $h(0''') = 0'$, bármely adott helyen véges számú lépésben számítani a függvényegyenletrendszer alapján, amelyeknek értékeit a függvényegyenletrendszer meghatározza. Könnyen meg lehet azonban mutatni, hogy azon aritmetikai függvények osztálya, amelyekhez van olyan függvényegyenletrendszer, amely a *kérdéses* függvény értékeit meghatározza, a többi benne szereplő függvényét esetleg nem, azonos az általános rekurzív függvények osztályával[19].

Másrészt arra lehet gondolni, hogy amilyen merészen általános az általános rekurzív definíció fogalma abból a szempontból, hogy nem kíván meg semmit sem a függvényegyenletrendszer alakjáról, annyira speciális abból a szempontból, hogy azt kívánja meg, hogy a függvényegyenletrendszer a benne szereplő függvényeknek (vagy egy részüknek) értékeit olyan értelemben határozza meg, hogy azok az egyenletek, amelyek megmondják, hogy egy-egy helyen mi e függvények értéke, *a fent definiált értelemben* legyenek a függvényegyenletrendszer triviális következményei. Valóban, mint már rámutattunk, valamely függvényegyenletrendszernek ugyanolyan joggal még más következményeit is nevezhetnők triviális következményeinek. Pl. a specializáláson és valamely egyenlet alkalmazásán kívül még megengedhetnők a következő „triviális" lépéseket is a triviális következmény fogalmának definíciójában: $K=K$ alakú egyenlet felírását; számváltozók helyébe tetszőleges kifejezések helyettesítését; valamely egyenlet bal- és jobboldalának felcserélését[20]. Meg

$h(0''')=0$, $h(0'''')=0',\ldots$ egyenletek mind triviális következményei mindkét egyenletrendszernek, más $h(n)=m$ alakú egyenlet azonban, ahol n és m számok, nem. Az így definiált

$$h(x)=\begin{cases}0, \text{ ha } x \text{ páros}\\ 1, \text{ ha } x \text{ páratlan}\end{cases}$$

függvény primitív rekurzív függvény; azonban könnyű olyan függvényegyenletrendszert is megadni, amely valamely általános rekurzív, de nem primitív rekurzív függvény értékeit határozza meg, de más, benne szereplő függvény értékeit nem.

[19] PÉTER RÓZSA [2] könyvének 130—131. oldalán így definiálja az általános rekurzív függvény fogalmát.

[20] Ez azt jelenti, hogy a triviális következmény fogalmának definícióját a következőképpen módosíthatnók. Valamely R függvényegyenletrendszer 0-adrendű triviális következményein értjük R egyenleteit, továbbá bármely $K=K$ alakú egyenletet, ahol K tetszőleges kifejezés. Ha már tudjuk, mit jelent az, hogy egy függvényegyenlet valamely függvényegyenletrendszernek n-edrendű vagy alacsonyabbrendű triviális következménye, akkor valamely R függvényegyenletrendszer $n+1$-edrendű triviális következményein az olyan függvényegyenleteket értjük, amelyek vagy R valamely n-edrendű triviális következményéből úgy keletkeznek, hogy bizonyos benne szereplő számváltozók helyébe, mindenütt, ahol előfordulnak, tetszőleges kifejezéseket (nem feltétlenül számokat) helyettesítünk, azonban ugyanazon számváltozó helyébe mindenütt, ahol előfordul, ugyanezt a kifejezést, vagy R valamely n-edrendű triviális következményéből bal- és jobboldalának felcserélésével keletkeznek, vagy pedig R két legfeljebb n-edrendű triviális következményéből, amelyek közül legalább az egyik pontosan n-edrendű triviális következménye R-nek, úgy keletkeznek, hogy az egyikre alkalmazzuk a másikat. Egy függvényegyenletet akkor nevezünk valamely R függvényegyenletrendszer triviális következményének, ha van olyan n nemnegatív egész szám, hogy a kérdéses függvényegyenlet R-nek n-edrendű triviális következménye.

lehet azonban mutatni, hogy ha az általános rekurzív függvény fogalmát szószerint úgy definiálnók, mint fentebb, azonban a definícióban azon, hogy egy-egy függvényegyenletrendszer valamely függvény értékeit meghatározza, annyiban értenénk mást, hogy e fogalom definíciójában a triviális következmény fogalmát a fent említett módosított értelemben értenők, akkor sem jutnánk az általános rekurzív függvény más (bővebb) fogalmához.

Ez igaz a triviális következmény fogalmának említett (közelfekvő) általánosításaira, de még mindig fennmarad az a kétely, nem lehet-e a triviális következmény fogalmát (értelmes módon) úgy általánosítani, hogy ezáltal már megváltozzék (kibővüljön) az általános rekurzív függvény fogalma. Ezt a kételyt eloszlatná, ha meg lehetne mutatni, hogy az általános rekurzív függvény fogalma akkor sem bővül, ha annak definíciójában, hogy mit értünk azon, hogy egy függvényegyenletrendszer valamely függvény értékeit meghatározza, a triviális következmény fogalmát a következmény általános fogalmával pótolnók, vagyis akkor mondanók, hogy valamely függvényegyenletrendszer valamely benne szereplő **f** függvény értékeit meghatározza, ha tetszőleges $n_1, n_2, \ldots, n_r$ nemnegatív egész számokhoz, ahol r az **f** funktor argumentumszáma, egy és csak egy olyan m nemnegatív egész szám van, hogy az $\mathbf{f}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = m$ egyenlet következménye R-nek. Ez (adott $n_1, n_2, \ldots, n_r$ és m esetén) azt jelenti, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amely **f** helyébe téve (bizonyos, az R-ben előforduló esetleges további funktorok helyébe teendő aritmetikai függvényekkel együtt) kielégíti az R függvényegyenletrendszert, az $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyen az m értéket veszi fel[21]. Az, hogy $n_1, n_2, \ldots, n_r$ bármely értékére van olyan m, amelyre ez áll, azt jelenti, hogy csak egy olyan aritmetikai függvény létezhetik, amely **f** helyébe téve (bizonyos esetleges további aritmetikai függvényekkel együtt) kielégíti az R függvényegyenletrendszert (mert bármely két olyan függvény, amely kielégíti, bármely helyen ugyanazt az értéket veszi fel). Ennélfogva az a kérdés, hogy a triviális következmény fogalmát a következmény általános fogalmával pótolva nem bővül-e az általános rekurzív függvény fogalma, a következőképpen is fogalmazható.

Tegyük fel, hogy valamely R függvényegyenletrendszernek van megoldása, továbbá, hogy bármely megoldásrendszerében valamely, az R-ben előforduló **f** *funktor helyébe egy és ugyanaz az aritmetikai függvény kerül. Igaz-e, hogy akkor ez a függvény általános rekurzív függvény?*

Ez az a probléma, amelyet SCHRÖTER felvetett. Meg fogom mutatni, hogy e problémára negatív a válasz, mégpedig azért, mert *van olyan függ-*

[21] Ha az R függvényegyenletrendszernek egyáltalában van megoldása, akkor világos, hogy adott $n_1, n_2, \ldots, n_r$ számokhoz *legfeljebb egy* ilyen m szám létezhetik. Fordítva, ha adott $n_1, n_2, \ldots, n_r$ számokhoz csak egy ilyen m van, akkor van az R függvényegyenletrendszernek megoldása, mert ha nem volna, akkor megállapodásunk szerint bármely függvényegyenletet, így pl. az $f(n_1, n_2, \ldots, n_r) = 0$ és az $f(n_1, n_2, \ldots, n_r) = 0'$ egyenletet is, R következményének tekintenők.

vényegyenletrendszer, amelynek egy és csak egy megoldásrendszere van, de e megoldásrendszerben szereplő függvények közül az egyik nem általános rekurzív függvény.

3. *Néhány tétel általános rekurzív függvényekről.* A kimondott tétel bizonyításához szükségem lesz arra, hogy bizonyos aritmetikai függvények általános rekurzív függvények. Ennek bizonyítására természetesen nem elég megmutatni, hogy e függvények értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, hanem meg kellene adni egy-egy általános rekurzív definíciójukat. Ahol ez könnyen lehetséges, ott meg is teszem; ahol azonban nehéz meggondolásokat igényelne, ott megelégszem annak beláttatásával, hogy a kérdéses függvények értéke bármely adott helyen a definiálatlan, heurisztikus értelemben véges számú lépésben kiszámítható; általános rekurzív voltuk KLEENE [1] cikkében szabatosan be van bizonyítva.

Így pl. az

$$a(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x=0,\\ 0, & \text{ha } x\neq 0,\end{cases}$$

$$b(x,y)=\begin{cases}0, & \text{ha } x=y,\\ 1, & \text{ha } x\neq y,\end{cases}$$

$$c(x,y)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\geqq y,\\ 1, & \text{ha } x<y,\end{cases}$$

$$d(x,y,z)=xyz$$

függvényekről minden további nélkül evidens, hogy bármely adott helyen véges számú lépésben ki tudjuk számítani az értéküket (hiszen bármely adott nemnegatív egész számról véges számú lépésben el tudjuk dönteni, 0-e vagy nem; bármely két adott nemnegatív egész számról véges számú lépésben el tudjuk dönteni, egyenlők-e vagy nem, vagy pedig, hogy az első nagyobb vagy egyenlő-e, mint a második, vagy kisebb; három adott nemnegatív egész számnak véges számú lépésben ki tudjuk számítani a szorzatát). Ahhoz azonban, hogy szabatosan bebizonyítsuk, hogy ezek általános rekurzív függvények, meg kell adni egy-egy általános rekurzív definíciójukat, mint ahogy fentebb meg is adtuk (ti. az A, B, C ill. P' függvényegyenletrendszereket).

Világos az is, hogy ha f kétváltozós általános rekurzív függvény, akkor az f függvénnyel együtt a

$$g(x,y)=\prod_{z<y} f(x,z)$$

egyenlettel definiált g függvény értékét is bármely adott helyen ki tudjuk számítani véges számú lépésben. Ahhoz azonban, hogy bebizonyítsuk, hogy f-fel együtt g is általános rekurzív függvény, meg kell adni g egy általános rekurzív definícióját (f egy általános rekurzív definíciója segítségével). Ez könnyen lehetséges; ha ugyanis R olyan függvényegyenletrendszer, amely a benne szereplő függvényeknek, többek között az f függvénynek értékeit meghatározza, s amelyben az f_1, f_2 és g funktorok nem fordulnak elő[22], akkor az az R' egyenletrendszer, amely R-ből a P egyenletrendszer egyenleteinek, valamint a

$$g(x, 0) = 0',$$
$$g(x, y') = f_2(g(x, y), f(x, y))$$

függvényegyenleteknek hozzávételével keletkezik, meghatározza g értékeit. Valóban, mint már tudjuk, a P egyenletrendszer meghatározza az $f_1(x, y) = x + y$ és $f_2(x, y) = xy$ függvények értékeit. Legyen k és n két tetszőleges nemnegatív egész szám; akkor van olyan m nemnegatív egész szám, hogy a $g(k, n) = m$ egyenlet triviális következménye R'-nek. Ez áll, ha $n = 0$; ugyanis a $g(k, 0) = 0'$ egyenlet R' utolsó előtti egyenletéből specializálással keletkezik. Ha már n-re áll az állításunk, akkor áll n'-re is. Ugyanis a

$$g(k, n') = f_2(g(k, n), f(k, n))$$

egyenlet R' utolsó egyenletéből specializálással keletkezik. Ha már most m, m_1 és m_2 olyan nemnegatív egész számok, hogy a $g(k, n) = m$, $f(k, n) = m_1$ és $f_2(m, m_1) = m_2$ egyenletek R' triviális következményei (márpedig ilyen m szám az indukciós feltevés, ilyen m_1 ill. m_2 szám pedig amiatt létezik, mert az R ill. P egyenletrendszer meghatározza az f ill. f_2 függvény értékeit), akkor a $g(k, n') = f_2(g(k, n), f(k, n))$ egyenletből a $g(k, n) = m$ egyenlet alkalmazásával a $g(k, n') = f_2(m, f(k, n))$ egyenlet, ebből az $f(k, n) = m_1$ egyenlet alkalmazásával a $g(k, n') = f_2(m, m_1)$ egyenlet, végül ebből az $f_2(m, m_1) = m_2$ egyenlet alkalmazásával a $g(k, n') = m_2$ egyenlet adódik. Az, hogy adott k és n számokhoz csak egy olyan m szám van, amelyre a $g(k, n) = m$ egyenlet triviális következménye R'-nek, adódik abból, hogy az f, $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = xy$ és $g(x, y) = \prod_{z < y} f(x, z)$ függvények kielégítik az R' függvényegyenletrendszert[23].

A **2.** pont végén kimondott állítás azt is magában foglalja, hogy *van* olyan aritmetikai függvény, amely nem általános rekurzív függvény. Ez ismeretes és könnyen belátható. Ugyanis az összes függvényegyenletek halmaza megszámlálható; hiszen minden függvényegyenlet — alakját tekintve — a 0 konstansból, a számváltozókból, a $'$ jelből, a funktorokból, az $=$ jelből és a

[22] Ezt könnyű elérni: ha az f_1, f_2 vagy a g funktor előfordul benne, akkor ezt más (ugyancsak 2 argumentumszámú) funktorra változtatjuk.

[23] A bizonyítás azt is mutatja, hogy ha f primitív rekurzív függvény, akkor g is az (lásd pl. PÉTER RÓZSA [2], 7. oldal); mert ha R primitív rekurzióval való definíció, akkor R' is nyilván az. Hasonlóan adódik, hogy ha f általános, ill. primitív rekurzív függvény, akkor a $g_1(x, y) = \sum_{x < y} f(x, y)$ egyenlettel definiált g_1 függvény is az (primitív rekurzív f esetén lásd pl. PÉTER RÓZSA [2], 6. oldal).

(,) és , írásjelekből álló véges sorozat, márpedig megszámlálhatóan végtelen sok elemből megszámlálhatóan végtelen sok véges sorozat képezhető. Ebből következik az is, hogy az összes függvényegyenletrendszerek (azaz függvényegyenletekből álló véges halmazok) halmaza is megszámlálható; ugyanis megszámlálhatóan végtelen halmaznak megszámlálhatóan végtelen sok véges részhalmaza van. Ennélfogva általános rekurzív definíció is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok van; hogy van végtelen sok, azt könnyű megmutatni. Egy-egy általános rekurzív definíció több általános rekurzív függvényt is definiálhat, de mindenesetre csak véges számút (mert csak véges számú funktor fordulhat elő benne); ennélfogva legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok (és, mint könnyű látni, valóban megszámlálhatóan végtelen sok) általános rekurzív függvény van. Ezzel szemben az összes aritmetikai függvények halmaza nem megszámlálható; tehát van olyan aritmetikai függvény, amely nem általános rekurzív függvény.

Ha sikerülne az összes általános rekurzív függvények halmazát *effektíve* megszámlálni, azaz úgy rendezni sorozatba, hogy bármely n természetes számhoz véges számú lépésben meg lehessen állapítani, melyik a sorozat n-edik tagja (pl. úgy, hogy megadjuk, melyik függvényegyenletrendszer definiálja és abban melyik funktorral van jelölve), akkor az átlós módszer segítségével máris lehetne ellenpéldát találni arra a sejtésre, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amelynek értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, általános rekurzív függvény. Ez esetben ugyanis könnyen (ti. a többváltozós általános rekurzív függvények elhagyásával) megkaphatnók az összes *egyváltozós* általános rekurzív függvények egy

$$h_0, h_1, h_2, \ldots$$

effektív megszámlálását. De ekkor a

$$h_\omega(x) = h_x(x) + 1$$

egyenlettel definiált h_ω függvény értékét bármely adott n helyen véges számú lépésben ki tudnók számítani (mert véges számú lépésben meg tudnók állapítani, melyik a h_n függvény; minthogy ez általános rekurzív függvény, további véges számú lépésben ki lehetne számítani értékét az n helyen, vagyis a $h_n(n)$ számot és így a $h_\omega(n) = h_n(n) + 1$ értéket is véges számú lépésben ki lehetne számítani). Mégsem lehet h_ω általános rekurzív függvény, különben azonos volna valamelyik h_n-nel, holott az n helyen más (ti. 1-gyel nagyobb) értéket vesz fel, mint az.

Azonban a fenti meggondolás alapján nem sikerül az összes általános rekurzív függvények halmazát effektíve megszámlálni[24]. Az összes függvény-

[24] Ha igaz az a sejtés, hogy az olyan aritmetikai függvények osztálya, amelyek értéke bármely adott helyen véges számú lépésben kiszámítható, azonos az általános rekurzív függvények osztályával, akkor, mint éppen bebizonyítottuk, nem is lehet effektíve megszámlálni az általános rekurzív függvények halmazát.

egyenletek halmazát még sikerül: ehhez nem kell mást tenni, mint az öszszes, a fent felsorolt jelekből álló véges sorozatok halmazát valamelyik, a halmazelméletben szokásos módon effektíve megszámlálni, majd az így kapott sorozatnak elhagyni azokat a tagjait, amelyek nem függvényegyenletek. (Hogy egy adott, a fent felsorolt jelekből álló véges sorozat függvényegyenlet-e, azt könnyű véges számú lépésben eldönteni.) Legyen $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ az összes függvényegyenletek így kapott sorozatbarendezése. Ebből, a halmazelméletben szokásos módok bármelyike segítségével megkaphatjuk az $\{E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots\}$ halmaz összes véges részhalmazai, vagyis az összes függvényegyenletrendszerek valamely $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ effektív megszámlálását. Ahhoz azonban, hogy ebből megkapjuk az összes általános rekurzív függvények halmazának egy effektív megszámlálását, mindenekelőtt el kellene hagyni $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ közül azokat, amelyek nem általános rekurzív definíciók (aztán a megmaradt általános rekurziv definíciók mindegyikét az általa definiált általános rekurzív függvények (véges) sorozatával pótolni). Ily módon azonban nem jutunk az összes általános rekurzív definíciók (és velük az összes általános rekurzív függvények) *effektív* megszámlálásához, mert nem ismeretes olyan módszer, amelynek segítségével véges számú lépésben el lehetne dönteni egy függvényegyenletrendszerről, hogy általános rekurzív definíció-e[25]. Már pedig ahhoz, hogy az $R_0, R_1, \ldots. R_n, \ldots$ sorozatból az olyan függvényegyenletrendszerek elhagyásával keletkező sorozat n-edik tagját meghatározzuk, amelyek nem általános rekurzív definíciók, sorra el kellene döntenünk R_0-ról, R_1-ről, R_2-ről, ... hogy általános rekurzív definíció-e, míg az első n olyant meg nem találjuk közülük, amelyik az.

Ezen úgy próbálhatunk segíteni, hogy az $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ sorozatból nem válogatjuk ki azokat a függvényegyenletrendszereket, amelyek általános rekurzív függvény definíciói, hanem e sorozat mindegyik tagját, tehát minden függvényegyenletrendszert, egy vagy több függvény definíciójának tekintjük (annyiénak, ahány funktor előfordul benne). Csakhogy ezek a függvények általában nem minden helyen vannak értelmezve és általában többértékűek. Ti. ha R valamely tetszőleges függvényegyenletrendszer és $\mathfrak{f}$ valamely R-ben előforduló funktor, akkor R-et úgy tekinthetjük, mint (esetleges egyéb, az R-ben előforduló többi funktornak megfelelő függvénnyel együtt) annak a függvénynek a definícióját, amely azokon és csak azokon az $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyeken van értelmezve, amelyekhez van olyan m nemnegatív egész szám, hogy az $\mathfrak{f}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = m$ egyenlet triviális következménye R-nek (itt természetesen r az $\mathfrak{f}$ funktor argumentumszáma, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ pedig tetszőleges nemnegatív egész számok); éspedig úgy, hogy minden ilyen $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyen mindezeket az m értékeket vegye fel és csak ezeket. Egyszerűség kedvéért célszerű

[25] Ez a meggondolás azt is mutatja, hogy ha igaz az előző lábjegyzetben említett sejtés, akkor nincs is ilyen módszer.

minden egyes függvényegyenletet e függvények közül *egyetlen egy* függvény definíciójának tekinteni, pl. azénak, amely az R-ben előforduló funktorok közül azzal van jelölve, amely a funktorok valamely rögzített, pl. az $f, g, h, a, b, c, d, f_1, g_1, h_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_2, g_2, h_2, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots$ effektív sorozatbarendezésében a *legkésőbbi*. (Ez nem megszorítás, hiszen ha valamely függvényt valamely függvényegyenlettel akarunk definiálni, akkor mindig jelölhetjük a kérdéses sorozatbarendezésben későbbi funktorral, mint a többi, a függvényegyenletrendszerben előforduló funktor.) A továbbiakban tehát, ha valamely R függvényegyenletrendszer által definiált függvényről beszélünk, azt a függvényt értjük rajta, amelynek értéke bármely $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyen minden olyan m szám, hogy az $\mathfrak{f}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = m$ egyenlet triviális következménye R-nek, ha pedig nincs ilyen m, akkor nincs értelmezve az $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyen; itt $\mathfrak{f}$ az R-ben előforduló funktorok közül a legkésőbbi (a funktorok rögzített sorozatbarendezésében), r pedig az $\mathfrak{f}$ funktor argumentumszáma.

Az átlós módszer szempontjából csak azok a függvényegyenletrendszerek érdekelnek bennünket, amelyek *egyváltozós* függvényt definiálnak, tehát a bennük előforduló funktorok közül a legkésőbbinek argumentumszáma 1. Minthogy bármely függvényegyenletrendszerről véges számú lépésben el tudjuk dönteni, melyik a benne előforduló funktorok közül a legkésőbbi és mi annak az argumentumszáma, ezért az összes függvényegyenletrendszerek $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ effektív megszámlálásából azon függvényegyenletrendszerek elhagyásával, amelyek többváltozós függvényt definiálnak, az egyváltozós függvényt definiáló függvényegyenletrendszerek $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ effektív megszámlálásához jutunk. Ha az ezek által sorra definiált egyváltozós függvényekre alkalmaznók az átlós módszert, olyan függvényhez jutnánk, amely ugyan nem fordul elő közöttük, de nincs mindenütt értelmezve és többértékű. (Az átlós módszert kissé módosítva kellene alkalmaznunk, mert az, hogy egy többértékű függvény valamely helyen két különböző értéket vesz fel, nem ellentmondás.) Hogy az átlós módszerrel mindenütt értelmezett és egyértékű aritmetikai függvényhez jussunk, az $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ függvényegyenletrendszerek mindegyikéhez hozzá kell rendelnünk egy-egy mindenütt értelmezett egyértékű egyváltozós aritmetikai függvényt. Evégett az $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ függvényegyenletrendszerek által definiált függvényeket úgy kell módosítanunk, hogy az azokon a helyeken felvett értékeik közül, ahol több értéket vesznek fel, egy-egy határozott értéket kiválasztunk, azokon a helyeken pedig, ahol nincsenek értelmezve, valahogyan értelmezzük őket. Az így kapott függvényekre alkalmazva az átlós módszert, nem jutunk ugyan ellenpéldához arra a sejtésre, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amelynek bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani az értékét, általános rekurzív függvény, de példát kapunk olyan aritmetikai függvényre, amely nem általános rekurzív függvény, bár nagyon egyszerű módon keletkezik egy általános rekurzív függvényből.

Az R_n' függvényegyenletrendszer által definiált többértékű, nem mindenütt értelmezett függvénynek egyértékűvé tételére a legegyszerűbb módnak az kínálkozik, hogy olyan x helyen, ahol e függvény több m értéket vesz fel, válasszuk ki ezen értékek közül a *legkisebbiket*. Azonban egyszerűbb (valamely általános rekurzív függvényből egyszerűbb módon keletkező) példához jutunk nem általános rekurzív függvényre, ha ezen m értékek közül nem a legkisebbiket választjuk ki, hanem azt, amelyre nézve az $\mathbf{f}(x)=m$ egyenlet, ahol $\mathbf{f}$ a megfelelő funktor, a *legelső* helyen fordul elő az R_n' függvényegyenletrendszer triviális következményei között e triviális következmények valamely megszámlálásában. A továbbiak szempontjából döntő lesz, hogy ez a megszámlálás is választható *effektívnek* (ez biztosítja majd, hogy az átlós módszer szolgáltatta függvény, ha nem is lesz minden adott helyen véges számú lépésben kiszámítható az értéke, egyszerű módon keletkezik valamely általános rekurzív függvényből).

Valamely adott R függvényegyenletrendszer összes triviális következményeit legegyszerűbben úgy lehetne megszámlálni, hogy az összes függvényegyenletek $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ sorozatából elhagyjuk azokat a függvényegyenleteket, amelyek nem triviális következményei R-nek. Így azonban nem kapnánk *effektív* megszámlálást, mert nem ismeretes olyan módszer, amellyel bármely adott függvényegyenletről véges számú lépésben el lehetne dönteni, triviális következménye-e R-nek vagy nem[26]. Mégis lehetséges az R függvényegyenletrendszer összes triviális következményeinek effektív megszámlálása, pl. a következőképpen. Mindenekelőtt sorra effektíve megszámláljuk az R-nek 0-adrendű, elsőrendű, másodrendű,... triviális következményeit; ha valamely n-re csak véges számú n-edrendű triviális következménye van, mint pl. $n=0$ esetén biztosan, akkor ez úgy értendő, hogy olyan végtelen sorozatot állítunk elő, (amelyiknek bármely tagját véges számú lépésben meg tudjuk határozni, ha adva van, hányadik tagról van szó és) amelyben R bármelyik n-edrendű triviális következménye *legalább egyszer* előfordul és más függvényegyenlet nem fordul elő. A 0-adrendű triviális következmények effektív megszámlálása könnyű, hiszen csak véges számú van belőlük. Ha már az R függvényegyenletrendszer n-edrendű és alacsonyabbrendű triviális következményeinek effektív megszámlálása megtörtént, akkor az $n+1$-edrendű triviális következményeinek effektív megszámlálása a halmazelméletből ismert módon annak felhasználásával történhetik, hogy R minden n-edrendű triviális következményéből legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok[27] $n+1$-edrendű triviális következménye keletkezik specializálással, mert véges számú számváltozó fordul elő benne és mindegyik helyébe megszámlálhatóan végtelen sok számot helyette-

[26] Meg lehet mutatni, hogy ha a már többször említett sejtés igaz, akkor nincs is minden R függvényegyenletrendszerhez ilyen módszer.

[27] Ha nem fordul elő benne számváltozó, akkor egy sem.

síthetünk, továbbá bármely, R-nek két legfeljebb n-edrendű triviális következményéből álló rendezett párból R-nek csak véges számú $n+1$-edrendű triviális következménye keletkezik alkalmazással[28], mert a pár második komponensének baloldala csak véges számú helyen fordulhat elő a pár első komponensében, és minden helyen csak kétféle dolog történhetik vele: vagy változatlan marad, vagy a pár második komponensének jobboldalával pótoljuk. Végül az R függvényegyenletrendszer 0-adrendű, elsőrendű, másodrendű,... triviális következményeinek így kapott effektív megszámlálásából a halmazelméletből ismert módon előállíthatjuk R összes triviális következményeinek egy $T_0(R), T_1(R), \ldots, T_n(R), \ldots$ effektív megszámlálását.

Rendeljük már most bármely olyan R függvényegyenletrendszerhez, amelyben előforduló legkésőbbi $\mathbf{h}$ funktor argumentumszáma 1, a következő egyváltozós, mindenütt értelmezett, egyértékű aritmetikai függvényt. Ha az R függvényegyenletrendszer által definiált függvény értelmezve van valamely nemnegatív egész k helyen, azaz van olyan m szám, hogy a $\mathbf{h}(k)=m$ egyenlet triviális következménye R-nek, akkor értsük az R-hez hozzárendelt függvénynek a k helyen felvett értékén ezen m-ek közül azt, amelyre a $\mathbf{h}(k)=m$ egyenlet a *legelső* helyen fordul elő az R triviális következményei között ezeknek $T_0(R), T_1(R), \ldots, T_n(R), \ldots$ sorozatbarendezésében. Ha az R függvényegyenletrendszer által definiált függvény nincs értelmezve a k helyen, azaz nincs olyan m szám, hogy a $\mathbf{h}(k)=m$ egyenlet triviális következménye R-nek, akkor értsük az R-hez hozzárendelt függvénynek a k helyen felvett értékén a 0 számot. Ha R általános rekurzív definíció, akkor az íly módon az R-hez rendelt függvény éppen az R által definiált (általános rekurzív) függvény; ez utóbbi ugyanis bármely k helyen értelmezve van és R bármely $\mathbf{h}(k)=m$ alakú triviális következményének, ahol m szám, tehát a $T_0(R), T_1(R), \ldots, T_n(R), \ldots$ sorozatbarendezésben a legelsőnek is, ugyanaz a jobboldala, mégpedig éppen az R által definiált függvény értéke a k helyen.

Legyen már most az $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ függvényegyenletrendszerhez íly módon hozzárendelt függvény sorra $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ és legyen ismét

$$h_\omega(x)=h_x(x)+1.$$

Akkor h_ω nem fordulhat elő $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ között, hiszen $n=0,1,2,\ldots$ esetén más (ti. 1-gyel nagyobb) értéket vesz fel az n helyen, mint h_n. Ennélfogva h_ω nem lehet általános rekurzív függvény, mert ha az volna, akkor volna olyan R általános rekurzív definíciója, amelyben h_ω (a funktorok rögzített sorozatbarendezésében) későbbi funktorral van jelölve, mint az R-ben előforduló többi funktor, és ez előfordulna $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ között; de akkor h_ω az előző bekezdés végén tett megjegyzés szerint az ehhez hozzárendelt függvény volna, tehát előfordulna $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ között.

[28] Ha a pár egyik komponense sem n-edrendű triviális következménye R-nek, akkor egy sem.

Az így kapott h_ω nem általános rekurzív függvény definícióját röviden így írhatjuk fel:

$$h_\omega(x)=\begin{cases} m+1, & \text{ha } T_0(R'_x), T_1(R'_x),\dots, T_n(R'_x),\dots \text{ közül az első olyan egyenletnek, amelynek baloldalán } \mathbf{h}(x) \text{ áll, ahol } \mathbf{h} \text{ az } R'_x \text{ függvényegyenletrendszerben előforduló funktorok közül a legkésőbbi, jobboldalán pedig valamely szám, amennyiben van köztük ilyen egyenlet, éppen } m \text{ áll a jobboldalán,}\\ 1, & \text{ha } T_0(R'_x), T_1(R'_x),\dots, T_n(R'_x),\dots \text{ között nincs olyan egyenlet, amelynek baloldalán } \mathbf{h}(x) \text{ áll, jobboldalán pedig valamely szám, ahol } \mathbf{h} \text{ az } R'_x \text{ függvényegyenletrendszerben előforduló funktorok közül a legkésőbbi.}\end{cases}$$

Ezt a bonyolult definíciót a következő módon tagolva áttekinthetőbb alakra hozhatjuk. Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha a } T_y(R'_x) \text{ függvényegyenlet baloldalán } \mathbf{h}(x) \text{ áll, ahol } \mathbf{h} \text{ az } R'_x \text{ függvényegyenletrendszerben előforduló funktorok közül a legkésőbbi, jobboldalán pedig valamely szám áll,}\\ 1 & \text{különben;}\end{cases}$$

$$g_1(x,y)=\begin{cases} m+1, & \text{ha } f(x,y)=0 \text{ és a } T_y(R'_x) \text{ függvényegyenlet jobboldalán az } m \text{ szám áll,}\\ 1, & \text{ha } f(x,y)\neq 0;\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} \text{a legkisebb olyan } y \text{ nemnegatív egész szám, amelyre } f(x,y)=0, \text{ ha van ilyen } y,\\ 0, \text{ ha nincs olyan } y, \text{ amelyre } f(x,y)=0.\end{cases}$$

Akkor

$$h_\omega(x)=g_1(x, h(x)).$$

Legyen ugyanis $\mathbf{h}$ az R'_x függvényegyenletrendszerben előforduló legkésőbbi funktor. Ha $T_0(R'_x), T_1(R'_x), T_2(R'_x),\dots$ közül valamelyiknek a baloldalán $\mathbf{h}(x)$ áll, a jobboldalán pedig valamely szám, akkor legyen $T_y(R'_x)$ az első ilyen és álljon $T_y(R'_x)$ jobboldalán m. Akkor $f(x,y)=0$ és y a legkisebb olyan nemnegatív egész szám, amelyre ez áll, tehát $y=h(x)$; és $g_1(x,h(x))=$ $=g_1(x,y)=m+1$. Ha pedig $T_0(R'_x), T_1(R'_x), T_2(R'_x),\dots$ közül egyik sem olyan, hogy a baloldalán $\mathbf{h}(x)$ áll, jobboldalán pedig valamely szám, akkor a definíció szerint bármely y-ra $f(x,y)=1$, tehát $g_1(x,y)=1$, továbbá $h(x)=0$; tehát többek között $g_1(x,h(x))=g_1(x,0)=1$.

Már most világos, hogy az f és g_1 függvények értékét bármely adott (k,n) helyen véges számú lépésben ki lehet számítani. Ha ugyanis k és n adva vannak, akkor véges számú lépésben meg tudjuk állapítani, melyik az R'_k függvényegyenletrendszer, melyik az utolsó, benne előforduló $\mathbf{h}$ funktor;

továbbá, hogy melyik a $T_n(R'_k)$ függvényegyenlet, vajon $\mathbf{h}(k)$ áll-e a baloldalán, a jobboldalán pedig szám-e és ha igen, melyik ez a szám. Ebből sejthető, de mint már említettem, szabatosan be is bizonyítható, hogy f és g_1 általános rekurzív függvények[29].

Azt viszont már tudjuk, hogy h_ω nem általános rekurzív függvény. Ebből következik, hogy h sem lehet az. Valóban, ha az lenne, legyen R_1 és R_2 egy-egy olyan általános rekurzív definíció, amely (többek között) g_1 ill. h értékeit meghatározza, mégpedig olyan, hogy R_1-ben a h funktor, R_2-ben a g_1 funktor ne forduljon elő. Legyen $\mathbf{h}$ most valamely olyan 1 argumentumszámú funktor, amely sem R_1-ben, sem R_2-ben nem fordul elő. Akkor az az R_3 függvényegyenletrendszer, amely R_1 és R_2 egyenleteiből és a

$$\mathbf{h}(x) = g_1(x, h(x))$$

egyenletből áll, nyilván meghatározná a benne szereplő függvények értékeit, tehát általános rekurzív definíció lenne; és pedig (többek között) a $\mathbf{h} = h_\omega$ függvény értékeit határozza meg, ami lehetetlen, mert h_ω nem általános rekurzív függvény.

Ebből nemcsak az adódik, hogy van olyan aritmetikai függvény, amely nem általános rekurzív függvény, hanem a következő, a továbbiak szempontjából fontos tény is: *Van olyan kétváltozós f általános rekurzív függvény, hogy a következőképpen definiált h függvény:*

$$h(x) = \begin{cases} \text{a legkisebb olyan } y \text{ nemnegatív egész szám, amelyre } f(x,y)=0, \\ \quad \text{ha van ilyen } y, \\ 0, \text{ ha nincs ilyen } y, \end{cases}$$

nem általános rekurzív függvény[30].

[29] Lásd Kleene [1], 734—738. oldal. (Kleene jelölései szerint — a $\mathbf{h}$ funktor választását illető lényegtelen eltéréstől eltekintve — $f(x,y)$ a $T_1(x,x,y)$ reláció karakterisztikus függvénye, $g_1(x,y) = (1-f(x,y))\,\mathrm{Val}(H(x,y))+1$.)

[30] Lásd Kleene [1], 741. oldal (XIV. tétel). — A h függvény nem szolgáltat ellenpéldát arra a sejtésre, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amelynek értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani a definíciója alapján, általános rekurzív függvény. Ugyanis a h függvény definíciója nem ad módot arra, hogy bármely adott n nemnegatív egész helyen véges számú lépésben kiszámítsuk a $h(n)$ értéket. Ehhez ugyanis mindenekelőtt el kellene dönteni, van-e olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $f(n,y)=0$. Ha *van* ilyen, az véges számú lépésben kiderül (pl. úgy, hogy sorra kipróbáljuk, $y=0,1,2,\ldots$ ilyen szám-e, amíg ilyen számot nem találunk); de ha *nincs* ilyen, akkor ez általában csak *végtelen sok* lépés után (ti. *valamennyi* y nemnegatív egész szám kipróbálása után) derül ki, hacsak nem tudjuk *bebizonyítani*, hogy nincs ilyen y szám. Amennyiben igaz az a sejtés, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amelynek értékeit bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, általános rekurzív függvény, akkor kell lennie olyan n nemnegatív egész számnak, amelyre *nincs* olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $f(n,y)=0$, de azt, hogy nincs ilyen, nem lehet (véges számú lépésben) bebizonyítani. Ez a tény nagyon valószínűtlenné teszi a szóbanforgó sejtés igazságát.

4. *Schröter problémájának megoldása.* Ennek alapján bebizonyíthatjuk a 2. pont végén kimondott állítást[31]. Legyen ugyanis R az f függvény valamely általános rekurzív definíciója; szükség esetén jelölésváltozással elérhetjük, hogy az a, b, c, d, f_1, f_2, g és h funktorok egyike se forduljon elő benne. Vegyük hozzá R-hez mindenekelőtt az A, B, C és P' függvényegyenletrendszerek egyenleteit; az így kapott R' függvényegyenletrendszernek egy és csak egy megoldásrendszere van, mégpedig az, amely a fenti f, a, b, c, d, f_1 és f_2 függvényekből áll (az esetleges többi, az R függvényegyenletrendszerben előforduló funktoroknak megfelelő bizonyos további általános rekurzív függvényekkel együtt).

Már most a h függvénynek az f függvény segítségével való fenti definícióját átalakíthatjuk úgy, hogy az a, b, c, d és f_2 függvények segítségével függvényegyenletrendszer alakjában lehessen írni. Valóban, legyen x és y két tetszőleges nemnegatív egész szám. Akkor vagy van olyan y-nál kisebb x nemnegatív egész szám, hogy $f(x, z) = 0$, vagyis $\prod_{z<y} f(x, z) = 0$, vagy ha nincs, akkor vagy $h(x) \geqq y$, mégpedig, amennyiben $f(x, y) = 0$, akkor $h(x) = y$, vagy pedig $h(x) = 0$ (ti. ha $z \geqq y$ esetén is $f(x, z) \neq 0$). Jelöljük most a $\prod_{z<y} f(x, z)$ általános rekurzív függvényt $g(x, y)$-nal; akkor tehát egyrészt vagy $g(x, y) = 0$, vagy (amennyiben $g(x, y) \neq 0$,) $f(x, y) \neq 0$, vagy pedig (amennyiben $g(x, y) \neq 0$ és $f(x, y) = 0$,) $h(x) = y$, másrészt vagy $g(x, y) = 0$, vagy (amennyiben $g(x, y) \neq$ $\neq 0$,) $h(x) \geqq y$, vagy pedig $h(x) = 0$. Az $f(x, y) \neq 0$ egyenlőtlenség az $a(f(x, y)) = 0$, a $h(x) = y$ egyenlőség a $b(h(x), y) = 0$, a $h(x) \geqq y$ egyenlőtlenség pedig a $c(h(x), y) = 0$ egyenlet alakjában írható; tehát egyrészt $g(x, y)$, $a(f(x, y))$ és $b(h(x), y)$ közül, másrészt $g(x, y)$, $c(h(x), y)$ és $h(x)$ közül valamelyik biztosan 0. Vagyis x és y minden értékére

$$g(x, y)\, a(f(x, y))\, b(h(x), y) = 0$$

és

$$g(x, y)\, c(h(x), y)\, h(x) = 0.$$

Más szóval, a $g(x, y) = \prod_{z<y} f(x, z)$ és a h függvények az f, a, b, c, d és f_2 függvényekkel együtt kielégítik a

$$g(x, 0) = 0', \tag{1}$$

$$g(x, y') = f_2(g(x, y), f(x, y)), \tag{2}$$

$$d(g(x, y), a(f(x, y)), b(h(x), y)) = 0 \tag{3}$$

és

$$d(g(x, y), c(h(x), y), h(x)) = 0 \tag{4}$$

függvényegyenleteket is.

[31] E bizonyítást egyidejűleg beküldtem közlés végett a berlini *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* c. folyóiratnak.

Vegyük hozzá ezeket az R' függvényegyenletrendszerhez; megmutatjuk, hogy az így kapott R'' függvényegyenletrendszernek csak egy megoldásrendszere van. Valóban, az R' függvényegyenletrendszernek, mint már mondtuk, nem tesznek eleget más függvények, mint a fenti f, a, b, c, d, f_1, f_2 függvények (és az esetleges többi, az R függvényegyenletrendszerben szereplő függvények). Azt is láttuk, hogy az R' függvényegyenletrendszer az (1) és (2) egyenletekkel együtt általános rekurzív definíciót alkot és így a g függvényt is egyértelműen meghatározza. Tehát csak azt kell még megmutatnunk, hogy a (3) és (4) egyenletek a h függvényt is egyértelműen definiálják. Valóban, ha (3) és (4) teljesül, akkor x és y bármely (nemnegatív egész) értékére egyrészt vagy $g(x,y)=0$, vagy $a(f(x,y))=0$, vagy $b(h(x),y)=0$, másrészt vagy $g(x,y)=0$, vagy $c(h(x),y)=0$, vagy $h(x)=0$. Ha már most valamely x számhoz van olyan z nemnegatív egész szám, hogy $f(x,z)=0$, akkor legyen y a legkisebb ilyen szám; akkor $f(x,y)=0$, de $z<y$ esetén $f(x,z)\neq 0$, tehát sem $g(x,y)=\prod_{z<y} f(x,z)=0$ nem állhat, sem $a(f(x,y))=0$; tehát akkor $b(h(x),y)=0$, vagyis $h(x)=y$. Ha pedig nincs olyan z, hogy $f(x,z)=0$, akkor bármely y-ra $g(x,y)=\prod_{z<y} f(x,z)\neq 0$; tehát akkor bármely y-ra vagy $c(h(x),y)=0$, vagyis $h(x)\geqq y$, vagy $h(x)=0$. De $h(x)\geqq y$ nem állhat bármely y-ra, tehát ebben az esetben $h(x)=0$; más szóval, $h(x)$ mindkét esetben csak a fent definiált h függvénynek az x helyen felvett értéke lehet. Minthogy ez a h függvény nem általános rekurzív függvény, ezért ezzel a **2.** pont végén kimondott állítás be van bizonyítva.

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete.

IRODALOM

W. Ackermann [1], Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Mathematische Annalen,* **99** (1928), 118—133.

A. Church [1], An unsolvable problem in elementary number theory, *American Journal of Mathematics,* **58** (1936), 345—363.

S. C. Kleene [1], General recursive functions of natural numbers, *Mathematische Annalen,* **112** (1936), 727—742.

[2], λ-definability and recursiveness, *Duke Mathematical Journal,* **2** (1936), 340—353.

A. Марков [1], Теория алгорифмов, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1950. aug. 27—szept. 2), Budapest, 1952, 191—203.

R. Péter [1], Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, *Mathematische Annalen,* **111** (1935), 42—60.

[2], *Rekursive Funktionen,* Budapest, 1951.

A. M. Turing [1], On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society,* (2) **42** (1937), 230—265, (2) 43 (1937), 544—546.

[2], Computability and λ-definability, *The Journal of Symbolic Logic,* **2** (1937), 153—163.