AZ ELKEVEREDÉS VIZSGÁLATA VÍZFOLYÁSOKBAN A TÖMEGÁRAMVONALAK HASZNÁLATÁVAL

SOMLYÓDY LÁSZLÓ*

[Beérkezett 1975. március 25-én]

A dolgozat valamely vízfolyásba permanensen bevezetett passzív, oldott szennyezőanyag elkeveredésének vizsgálatával foglalkozik. A sebességteret ismertnek tételezi fel, és a jelenséget leíró turbulens diffúziós egyenletet a függélymenti integrálátlagok bevezetésével alkalmazza áramvonalakból és azokra merőleges nívóvonalakból álló koordinátarendszerben. Az áramvonalak analógiájaként definiálja a tömegáram állandó görbéket (tömegáramvonalakat). Ezek használatával az eredeti differenciálegyenlet két — a numerikus számítás szempontjából igen egyszerűen kezelhető — egyenletre bomlik. Ismerteti a fenti görbék néhány jellegzetességét, majd a koncentrációeloszlás számításával, illetve a fordított feladatnak, a diszperziós tényezőknek nyomjelzős mérésből történő meghatározásával foglalkozik.

Jelölések

x, y, z	Descartes-i koordináták [m]
s, b, z	Jobbsodrású, görbevonalú ortogonális koordinátarendszer; s az áramvonalirányú, b a rá merőleges koordináta [m]
H_s, H_b	Lamé-féle tényezők
b_m	a tömegáram állandó vonal koordinátája [m]
B	szélesség [m]
h	mélység [m]
v_s, v_b, v_z	sebességek a megfelelő irányokban [m s^{-1}]
c	koncentráció [kg m^{-3}]
$D, D', D^*, \tilde{D}^*$	diffúziós és diszperziós tényezők [m^2 s^{-1}]
$q(b)$	vízhozam-eloszlás [m^3 s^{-1}]
$\dot{m}(b)$	tömegáram-eloszlás [kg s^{-1}]
$\bar{a}$	(a) mennyiség időbeli átlaga
a'	(a) mennyiség ingadozása
$\tilde{a}$	(a) mennyiség függélymenti integrálátlaga
a^*	(a) mennyiségnek $\tilde{a}$-tól való eltérése

Bevezetés

Valamely vízfolyásba bevezetett passzív, oldott anyag elkeveredését turbulens áramlás esetében a Reynolds-féle mozgásegyenlet és a turbulens diffúziós egyenlet írja le.

* Dr. Somlyódy László, 1125 Budapest, Szamóca u. 6/B.

Bár az ilyen feladatok megoldása a hatékony vízminőségszabályozás szempontjából elengedhetetlen, ismereteink mégis hiányosak.

Nehézséget jelent, hogy a térbeli sebességeloszlás számítása ma még nem lehetséges, de a helyszínen történő kimérése is komoly nehézségekbe ütközik. Hasonlóan gondot okoz a diffúziós tényezők meghatározása — amelyekről igen keveset tudunk —, továbbá a diffúziós egyenlet megoldása. Ez zárt alakban csak néhány különleges esetben ismert.

Így a kutatók általában egy-egy részfeladat megoldására szorítkoznak.

Jelen munkában a permanens elkeveredés esetével foglalkozunk. A sebességteret ismertnek tekintjük, és a jelenséget áramvonal irányú és rá merőleges trajektóriákból álló koordinátarendszerben szemléljük (1. fejezet). Feltételezzük, hogy a bevezetés sűrűség- és sebességkülönbség nélkül történik.

Definiáljuk a *tömegáramvonalakat*, vagy más szóval *tömegáram állandó vonalakat* (azon vonalakat, amelyek mentén a tömegáram nem változik; 2. fejezet). Az ezekkel nyert egyenletek numerikusan egyszerűen kezelhetők mind a koncentrációeloszlás (3. fejezet), mind a diszperziós tényezők meghatározására (4. fejezet).

A módszer a függélymenti integrálátlagok bevezetése által adott korlátokon belül tetszőleges vízfolyásra alkalmazható.

1. A leíró egyenlet mélység mentén vett integrálátlaga görbevonalú koordinátarendszerben

Egy vízfolyásba permanensen bevezetett passzív, oldott anyag (valamilyen szennyezőanyag) térbeli eloszlását az (s, b, z) jobbsodrású, görbevonalú ortogonális koordinátarendszerben a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}(H_b\bar{v}_s\bar{c}) + \frac{\partial}{\partial b}(H_s\bar{v}_b\bar{c}) + \frac{\partial}{\partial z}(H_sH_b\bar{v}_z\bar{c}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(-H_b\overline{v_s'c'}) + \frac{\partial}{\partial b}(-H_s\overline{v_b'c'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-H_sH_b\overline{v_z'c'}) \end{aligned} \tag{1}$$

turbulens diffúziós egyenlet [1] megoldása adja, ahol a felülvonás időbeli átlagot jelent, a vesszős tagok pedig a pulzációk.

Az (s, b, z) rendszert a későbbiekben pontosan definiáljuk, most csupán annyit említünk, hogy s és b a szabad felszín érintősíkjában levő „áramvonal"-, illetve rá merőleges irányú görbevonalú koordináta, z pedig s és b síkjára merőleges egyenesvonalú koordináta. Az egyenletben szereplő H_s, H_b mennyiségek a Lamé-féle tényezők [2]

$$H_s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}, \qquad H_b = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2}.$$

Itt x, y Descartes-i koordináták.

Az (1) egyenlet megoldása a perem, a peremfeltételek (az áramlást határoló felületek mentén a koncentráció normális irányú deriváltja zérus), a sebességtér és a jobb oldalon szereplő korrelációk ismeretében lehetséges. Utóbbiak helyére szokás a Boussinesq-féle feltevéssel a D_s, D_b, D_z turbulens diffúziós tényezők bevezetése [3].

Az eddigi tapasztalatok alapján a z menti változások — a vízfolyások geometriai arányaiból következően (szélesség $\gg$ mélység) — gyorsan kiegyenlítődnek [4]. Ez lehetőséget ad a feladat leegyszerűsítésére oly módon, hogy nem (1) pontos megoldását keressük, hanem azt, amely a mélység mentén, átlagban elégíti ki az egyenletet.

Integráljuk tehát az (1) összefüggést a felszíntől a fenékig, majd a Leibnitz-féle szabály alkalmazásával cseréljük fel az integrálás és differenciálás sorrendjét [5]. Ekkor — figyelembe véve a felszínre és fenékre vonatkozó feltételeket (a sebesség és koncentráció normális irányú deriváltjának zérus voltát [4]) — a

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^h H_b \bar{v}_s \bar{c} dz + \frac{\partial}{\partial b}\int_0^h H_s \bar{v}_b \bar{c} dz = \frac{\partial}{\partial s}\int_0^h - H_b \overline{v_s' c'} dz + \frac{\partial}{\partial b}\int_0^h - H_s \overline{v_b' c'} dz \qquad (2)$$

egyenlet adódik (v és c időbeli átlagainál a felülvonást a továbbiakban elhagyjuk). Itt

$$\partial H_s/\partial z = \partial H_b/\partial z = 0$$

és a

$$c = c + c^*, \quad v_s = \tilde{v}_s + v_s^*, \quad v_b = \tilde{v}_b + v_b^*$$

összefüggések bevezetésével (hullámos felülvonással a függélymenti integrálátlagot jelöljük) a (2) egyetlet a

$$\frac{\partial}{\partial s}(H_b h \tilde{v}_s \tilde{c}) + \frac{\partial}{\partial b}(H_s h \tilde{v}_b \tilde{c}) = \frac{\partial}{\partial s}\left[H_b \int_0^h (-\overline{v_s' c'} - v_s^* c^*) dz\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial b}\left[H_s \int_0^h (-\overline{v_b' c'} - v_b^* c^*) dz\right] \qquad (2a)$$

alakot veszi fel.

Az s és b irányokat rögzítsük most oly módon, hogy a bal oldal második tagja eltűnjék. Ez akkor következik be, ha a

$$H_s h \tilde{v}_b = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial b}(H_s h \tilde{v}_b) = 0$$

feltételek teljesülnek. Azaz az s iránynak — a kontinuitási egyenlet értelmében (feltesszük, hogy $\partial v/\partial t = 0$) — a z mentén is görbült áramfelület kiegyenlítésével nyert felület és a szabad felszín metszésvonalaként kiadódott áramvonal érintőirányával kell megegyeznie [6].

Minthogy a sebességteret adott feladat esetében — általában helyszíni mérésből — már előre ismerjük, az (s, b) koordinátarendszer a leírt módon megválasztható és ezzel a fenti egyszerűsítés elérhető.

Tekintsük most a (2a) egyenlet jobboldalát és vezessük be az alábbi „Fick-törvényeket":

$$-\int_0^h (\overline{v_s' c'} + v_s^* c^*) dz = \frac{1}{H_s}(D_s + D_s') \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} h, \tag{3a}$$

$$-\int_0^h (\overline{v_b' c'} + v_b^* c^*) dz = \frac{1}{H_b} D_b \frac{\partial \tilde{c}}{\partial b} h - \widetilde{v_b^* c^*} h = \frac{1}{H_b}(D_b + D_b') \frac{\partial \tilde{c}}{\partial b} h. \tag{3b}$$

Ezekkel

$$\frac{\partial}{\partial s}(H_b h \tilde{v}_s \tilde{c}) = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{H_b}{H_s} h (D_s + D_s') \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}\right] + \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{H_s}{H_b} h (D_b + D_b') \frac{\partial \tilde{c}}{\partial b}\right]. \tag{4}$$

Itt

$D_s^* = D_s + D_s'$ a hosszirányú,
$D_b^* = D_b + D_b'$ pedig a keresztirányú diszperziós tényező.

Az első tagok a turbulencia hatását, a második tagok az össz konvektív hatásoknak az átlagtól való eltérését veszik figyelembe. D_s, D_b pozitív számok, és TAYLOR, továbbá ELDER nyomán D_s^* is az [7, 8]. D_b^* azonban a szekundér áramlások és az ezzel összefüggő anyagtranszport, valamint a turbulens anyagátvitel jellegétől függően negatív is lehet. Ekkor a keresztirányú diszperzió fogalmának bevezetése értelmét veszíti, és célszerű megkísérelni a (3b) kifejezés első sorát használni (teljesen általános módszert természetesen a háromdimenziós tárgyalásmód adna, ehhez azonban ismereteink ma még nem elégségesek).

D_s', illetve D_b' eltűnik, ha

$$c^* = 0;$$

$$v_s^* = 0, \; v_b^* = 0;$$

vagy ha a

$$\int_0^h v_s^* c^* dz = 0, \quad \int_0^h v_b^* c^* dz = 0$$

feltételek teljesülnek.

Ezek, és a $\partial\tilde{c}/\partial s$ derivált nagyságrendje miatt a

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{H_b}{H_s}\, h\, D_s^* \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}\right] \cong 0$$

feltevéssel szokás élni, mely a szennyezőanyag-forrás közvetlen környezetét leszámítva az irodalom szerint jó közelítéssel teljesül [4]. Megjegyzendő, hogy a hosszirányú diszperzió fogalmának bevezetése gyakran szükségtelen, ekkor (4) — a D_s-et tartalmazó tag elhanyagolásával (ez nyílt felszínű, egyenes laboratóriumi csatornában végzett makroturbulencia-mérések szerint jó közelítéssel megtehető [6]) — a

$$\frac{\partial}{\partial s}(H_b h \widetilde{v_s c}) = \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{H_s}{H_b}\, h\, D_b^* \frac{\partial \tilde{c}}{\partial b}\right] \tag{4a}$$

alakot veszi fel.

Megemlítendő, hogy a (3a) összefüggéssel megadott D_s^* eltér az igen gyakran alkalmazott egydimenziós írásmódban szereplő D_L hosszirányú diszperziós tényezőtől [9, 10].

Az egydimenziós alak és D_L a (4) egyenlet b irányú, vízfolyás két széle közötti integrálásával származtatható.

2. Tömegáram állandó vonalak (tömegáramvonalak)

Szemléljük ismét az elkeveredést az előbbi koordináta-rendszerben. Ennek b = konst. vonalaira, illetve az ezeken átfektetett, az (s, b) síkra merőleges felületekre az jellemző, hogy azokon, z mentén, összességében nincs folyadékátáramlás.

Hasonlóan értelmezhetők olyan vonalak (illetve felületek), amelyeken nincsen anyagátáramlás.

Ezek a tömegáramvonalak (1. ábra). Meghatározásukhoz írjuk fel a $d_s s$ és $d_b b_m$ ívelemeken átfektetett, a felszínre merőleges felületeken átmenő tömegáramok időbeli átlagát, melyek az anyagmegmaradás törvényeinek megfelelően egymással egyenlőek.

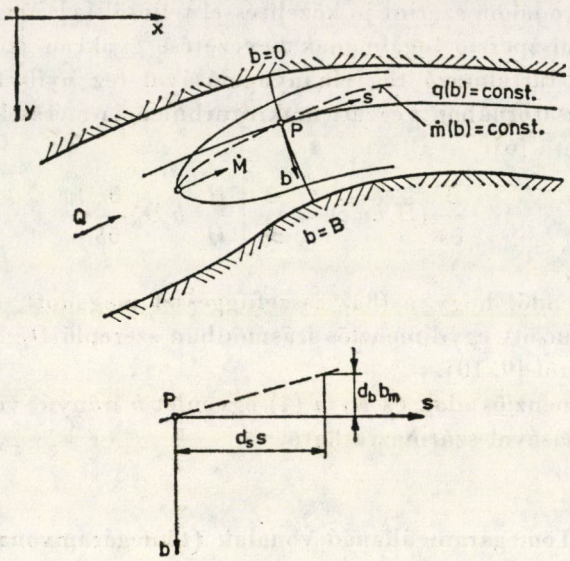
A szokásos jelölésekkel

$$\int_0^h (v_b c + \overline{v_b' c'})\, dz H_s ds =$$

$$= \int_0^h \overline{\left(v_s + v_s' + \frac{\partial(v_s + v_s')}{\partial s} ds\right)\left(c + c' + \frac{\partial(c + c')}{\partial s} ds\right)} dz \left(H_b + \frac{\partial H_b}{\partial s} ds\right) db_m .$$

Némi átalakítással, a másodrendűen kicsiny mennyiségek elhanyagolásával, a függélymenti integrálátlagok és a (3a, b) összefüggések bevezetésével

$$-\frac{H_s}{H_b}(D_b+D_b')\frac{\partial\tilde{c}}{\partial b}\,h\,ds=\left[\widetilde{v_s c}hH_b-\frac{H_b}{H_s}D_s\frac{\partial\tilde{c}}{\partial s}\,h\right]db_m=$$
$$=\left[\tilde{v}_s\tilde{c}hH_b-\frac{H_b}{H_s}(D_s+D_s')\frac{\partial\tilde{c}}{\partial s}\,h\right]db_m\,. \tag{6}$$



1. ábra

Innen a tömegáram állandó görbe (ez természetesen időbeli átlagként értelmezendő) egyenlete az áramvonal-nívóvonal koordinátarendszerben:

$$\frac{ds}{\left[\widetilde{v_s c}-\frac{1}{H_s}D_s\frac{\partial\tilde{c}}{\partial s}\right]h\,H_b}+\frac{db_m}{\frac{H_s}{H_b}(D_b+D_b')\frac{\partial\tilde{c}}{\partial b}\,h}=0\,. \tag{7}$$

A kapott kifejezés analóg a síkáramlás áramvonalainak differenciálegyenletével.

Az áramvonalak és az $\dot{m}(b)=$ konst. vonalak által bezárt szög tangensére (feltével, hogy (7) első tagjának nevezője zérustól különböző) (7)-ből a következő összefüggés adódik:

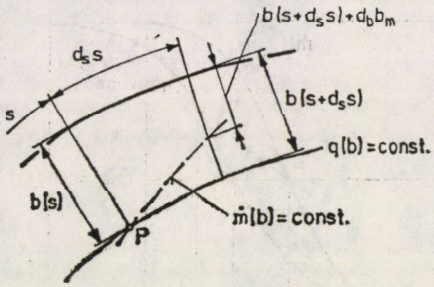
$$\frac{db_m}{ds}=-\frac{H_s}{H_b}\frac{(D_b+D_b')\frac{\partial\tilde{c}}{\partial b}}{\widetilde{v_s c}H_b-\frac{H_b}{H_s}D_s\frac{\partial\tilde{c}}{\partial s}}\,, \tag{8}$$

vagy (3b) első egyenlőségével

$$\frac{db_m}{ds} = -\frac{H_s}{H_b}\,\frac{D_b\dfrac{\partial\tilde{c}}{\partial b} - \widetilde{v_b^* c^*}H_b}{\widetilde{v_s c}\,H_b - \dfrac{H_b}{H_s}D_s\dfrac{\partial\tilde{c}}{\partial s}}. \tag{8a}$$

A fenti képletekben az előzőeknek megfelelően $\widetilde{v_s c}$ helyébe $\tilde{v}_s\tilde{c} - D_s/H_s \cdot \partial\tilde{c}/\partial^s$ kerülhet; de a D_s és D_s'-t tartalmazó tagokat a legtöbb esetben elhanyagoljuk.

Valamely feladat megoldásához (8) önmagában nem elégséges, hiszen $\tilde{c}$ mellett db_m/ds is ismeretlen.



2. ábra

A második egyenlet azt fejezi ki, hogy a tömegáram áramvonalmenti megváltozása egyenlő a db_m ívelemen átáramolt anyagmennyiséggel.

Az egyenlet a következőképpen vezethető le.

Tekintsünk két, egymástól $d_s s$ távolságra levő trajektóriaelemet és a $q(b) =$ konst. áramvonalat (2. ábra).

A tömegárameloszlások legyenek a 3. ábra szerintiek.

A tömegáram állandó görbét $d\dot{m} = 0$ jellemzi. Azaz

$$d\dot{m} = \frac{\partial\dot{m}}{\partial s}ds + \frac{\partial\dot{m}}{\partial b}db_m = 0,$$

ahol az első tag az 1., a második pedig a 2. vonal menti megváltozás.

Innen

$$\frac{db_m}{ds} = -\frac{\partial\dot{m}/\partial s}{\partial\dot{m}/\partial b}. \tag{9}$$

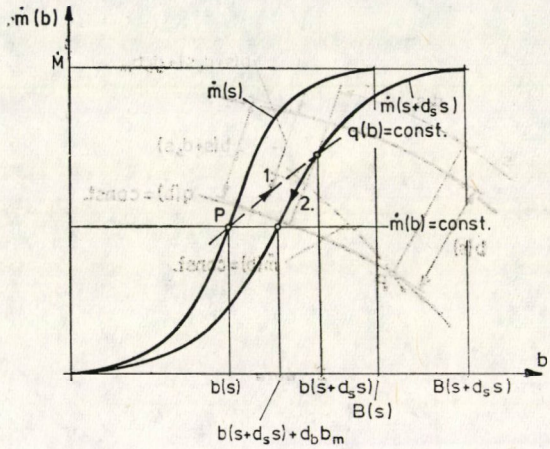
Az időben átlagolt tömegáram

$$\dot{m} = \int_0^b \widetilde{v_s} chH_b db - \int_0^b \frac{H_b}{H_s} D_s \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} hdb\,,$$

mellyel a (9) kifejezés

$$\frac{db_m}{ds} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial s}\displaystyle\int_0^b \widetilde{v_s} chH_b db - \dfrac{\partial}{\partial s}\displaystyle\int_0^b \frac{H_b}{H_s} D_s \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} hdb}{\widetilde{v_s} chH_b - \dfrac{H_b}{H_s} D_s \dfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s} h} \tag{10}$$

alakú lesz.



3. ábra

Az így nyert és a (8) összefüggés egybevetése az eredeti (4) egyenletet adja. Tehát a (4) differenciálegyenletet a tömegáramvonalak bevezetésével két egyenlettel helyettesítjük. Ezek alkalmazása, ha zárt alakú megoldást keresnénk, nem feltétlenül jelentene egyszerűsítést; azonban a numerikus használatuk — mint az látható lesz — lényegesen könnyebb.

2.1. *A db_m/ds derivált és a tömegáramgörbék néhány sajátossága*

A (8) egyenletből indulunk ki, s feltesszük, hogy $(D_b + D_b') > 0$. Minthogy a $b = 0$ és $b = B$ helyeken a peremfeltétel

$$\left.\frac{\partial \tilde{c}}{\partial b}\right|_{b=0} = \left.\frac{\partial \tilde{c}}{\partial b}\right|_{b=B} = 0\,, \tag{11}$$

amiből

$$\left.\frac{db_m}{ds}\right|_{b=0} = \left.\frac{db_m}{ds}\right|_{b=B} = 0 \tag{12}$$

következik. A (8) egyenlet ui. ideális közeg áramlása esetén is fennáll, amikor is

$$\tilde{v}_s\,|_{b=0} \neq 0\,, \quad \tilde{v}_s\,|_{b=B} \neq 0\,,$$

és így a nevező zérustól különböző, azaz általánosan (11) csak (12) fennállása mellett teljesülhet (lásd (8)). Így (12) szerint a két partvonal nemcsak áramvonal, hanem egyben tömegáram állandó görbe is.

Ha a tartományon belül, valamely szelvény b helyén $\partial\tilde{c}/\partial b = 0$, ez szintén csak $db_m/ds = 0$ mellett lehetséges.

Egymás utáni szelvények ilyen jellegű pontjait összekötve, a kapott görbe (8), valamint (9) értelmében áram-, és egyúttal tömegáramvonal is (természetesen az összes $\dot{m}(b) =$ konst. görbe átmegy a bevezetési ponton).

Minthogy $\partial\tilde{c}/\partial b = 0$-nál maximumról van szó, a koncentrációcsúcsok a fenti áramvonal mentén helyezkednek el [ellenkező esetben (3b) második egyenletének értelmessége vitatható, l. 4. fejezet].

Az elmondottakból következik, hogy a vízfolyás két széle ($b = 0$, $b = B$) között a $db_m/ds = f(b)$ függvénynek — hacsak ez nem mindenütt zérus — legalább b egy helyén szükségszerűen szélsőértéke van. A szélsőérték (ha több van, a legnagyobb abszolútértékű) megadja a szelvényben lehetséges legnagyobb szétterülési szög tangensét.

A kiegyenlítődéshez közeledve $\partial\tilde{c}/\partial b$, és ezzel $db_m/ds \to 0$, a tömegáramgörbék egyre jobban tartanak az áramvonalakhoz.

Ezen görbék használatának előnye, hogy egyúttal geometriai képet is adnak az elkeveredés folyamatáról.

3. A koncentrációeloszlás számítása

A (8) és (10) egyenletek zárt alakú megoldása általában nem lehetséges, bár adott s mellett $db_m/ds = f(b)$ ismeretében $\tilde{c}(b)$ — a hosszirányú diszperzió elhanyagolásával — (8)-ból számítható. Ekkor ugyanis az egyenlet közönséges differenciálegyenletté egyszerűsödik, amelyben a változók szétválaszthatók.

A megoldás

$$\tilde{c}(b) = \tilde{c}(b_1)\exp\left[-\int_{b_1}^{b} \frac{H_b^2}{H_s}\,\frac{\tilde{v}_s}{D_b^*}\,\frac{db_m}{ds}\,db'\right], \tag{13}$$

ahol $c(b_1)$ a kontinuitási feltételből határozandó meg

$$\dot{M} = \tilde{c}(b_1)\int_0^B h\tilde{v}_s \exp\left[-\int_{b_1}^{b} \frac{H_b^2}{H_s}\,\frac{\tilde{v}_s}{D_b^*}\,\frac{db_m}{ds}\,db'\right] H_b db, \tag{14}$$

A b_1 pontot célszerű a bevezetési ponton átmenő áramvonalon felvenni. (13) és (14) kifejezésekkel pedig

$$\tilde{c}(b) = \frac{\dot{M}}{\int_0^B h\tilde{v}_s \exp\left[-\int_{b_1}^b \frac{H_b^2}{H_s}\frac{\tilde{v}_s}{D_b^*}\frac{db_m}{ds}\,db'\right] H_b db} \exp\left[-\int_{b_1}^b \frac{H_b^2}{H_s}\frac{\tilde{v}_s}{D_b^*}\frac{db_m}{ds}\,db'\right]. \tag{15}$$

Ez, ha $H_b = H_s = 1$, $\tilde{v}_s$, h, $D_b^* =$ konst. $b^* = b - b_1$, $b^*(b = 0) \to -\infty$, $b^*(b = B) \to +\infty$, s

$$\frac{db_m^*}{ds} = \frac{b^*}{2(s - s_1)}, \tag{16}$$

(azaz a tömegáram állandó vonalak s tengelyű parabolák)

$$\tilde{c}(s, b) = \frac{\dot{M}}{2h\sqrt{\pi D_b^* \tilde{v}_s (s - s_1)}} \exp\left[-\frac{\tilde{v}_s}{4D_b^*(s - s_1)} b^{*2}\right] \tag{15a}$$

alakú, mely az (s_1, b_1) pontból végtelen nagy térbe történő bevezetés ismert esetének felel meg. Ilyen megoldás azonban csak ritkán lehetséges. Ezért — általánosságban — az alábbi közelítő út követhető.

A perem, peremfeltételek, $\tilde{v}_s$ sebességeloszlás (ezzel az áramvonalak, nívóvonalak, H_s, H_b tényezők) és keresztirányú diszperziós tényezők adottak (a hosszirányút az egyszerűség kedvéért most elhanyagoljuk).

Ismert továbbá az $\dot{M}$ tömegáram, a bevezetés helye és módja. Utóbbival összefüggésben a számítás szempontjából két eset különböztethető meg.

Először feltételezzük, hogy a koncentráció valamely szelvényben (ez lehet a bevezetés helyén vagy alatta) véges hosszon ismert. Ekkor itt $db_m/ds(b)$l eloszlás (8)-ból máris számítható, s az $\dot{m}(b) =$ konst. görbét az érintőjével helyettesítve (ez a differenciákra történő áttérést jelenti), a következő szelvénybeli pontok kijelölhetők. Minthogy két szomszédos tömegáram állandó vonal között ugyanaz az anyagmennyiség áramlik, $\tilde{v}_s$, h ismeretében $\tilde{c}$, és ezzel az új szelvény $\tilde{c}(b)$ eloszlása könnyen meghatározható.

Az eljárást alkalmazva az egész tartományra, akoncentrációmező ismertté válik.

A második esetben a bevezetés nem véges hosszon történik (pontszerű bevezetés), így itt a koncentrációfüggvénynek szinguláris helye van, mely a numerikus megoldásnál nehézséget jelent. Amennyiben ezt sikerül áthidalni, és a forrás közelében valamely véges hosszon értelmezett koncentrációeloszlást meghatározni, az eljárás már azonos a fent leírttal.

Elképzelhető iterációs módszer is, melynek alapjául — a $db_m/ds = f(s, b)$ függvény valamilyen közelítéséből kiindulva — a (8) és (10) egyenletek szol-

gálnak. A konvergencia bizonyíthatóságának hiányában azonban célszerű más utat követni, s feltételezni, hogy a bevezetés kicsiny környezetében a szétterülés véletlen jellegű hatások eredménye. Ekkor a koncentrációeloszlás — hacsak a bevezetés nem a vízfolyás két széle közelében történik — a (15a) összefüggésnek megfelelően alakul. Parti, vagy parthoz közeli szennyező források esetében a tükrözési elv alkalmazásával adódó, a (15a) alattihoz hasonló megoldások alkalmazhatók [4, 11, 12].

Ily módon a véges hosszra való áttérés keresztülvihető, majd a teljes koncentrációmező számítható.

4. A diszperziós tényezőknek nyomjelzős mérésből történő meghatározása

Most a perem, a sebességek és a koncentrációmező ismert (utóbbi valamilyen nyomjelzős mérésből), és a (3a, b) összefüggésekkel definiált tényezőket kívánjuk megállapítani.

Ezek közül — $D_s^* \approx D_s'$ közelítéssel — a hosszirányú diszperziós tényező meghatározása csak akkor lehetséges, ha a $v_s(z)$, $c(z)$ eloszlások is ismertek. A számítás (3a) alapján egyszerűen történhetik.

Miután számunkra elsősorban D_b^* érdekes, az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $D_s^* \partial\tilde{c}/\partial s \cong 0$, egyébként az ismertetendő eljárás ezt a megkötést nem igényli.

A mérési adatokból először az $\dot{m}(b)$ eloszlásokat számítjuk ki, ezekből az $\dot{m}(b) =$ konst. görbék, majd a db_m/ds deriváltak egyszerűen származtathatók (utóbbiak a (10) egyenlet segítségével is meghatározhatók).

Feltételezve, hogy $D_b^* > 0$ $(D_b > D_b')$ és $\widetilde{v_s c}(db_m/ds)$, valamint $\partial\tilde{c}/\partial b$ zérushelyei megegyeznek [lásd (8)], továbbá feltételezve, hogy itt létezik a

$$\widetilde{v_s c} \frac{db_m}{ds} \Big/ \frac{\partial \tilde{c}}{\partial b}$$

véges határérték, D_b^* kifejezhető

$$D_b^*(s, b) = -\frac{H_b^2}{H_s} \frac{\dfrac{db_m}{ds} \widetilde{v_s c}}{\dfrac{\partial \tilde{c}}{\partial b}}, \tag{17}$$

és pontonként számítható.

Amennyiben a $\partial\tilde{c}/\partial b$ derivált képzését el akarjuk kerülni, ez D_b^* Taylor polinomos felvételével (17) átrendezésével egyszerűen elérhető.

Arra a kérdésre vonatkozóan, mennyire érdemes a diszperziós tényezőt a vizsgált áramlási térben változónak tekinteni, mind a mai napig nem vagyunk elégséges ismeretek birtokában.

Egyrészt a legtöbb módszer eleve $D_b^*(s, b) =$ konst. feltevéssel él (kivétel például HOLLEY eljárása [4], amely az $\dot{m}(b)$ eloszlások szórásnégyzetének hosszirányú változásából számítja $D_b^*(s)$-t), másrészt kérdéses, hogy a mérési és kiértékelési hibák mennyire terhelik az eredményként kiadódott változást.

A $D_b^*(s, b)$ függvény minél részletesebb meghatározását elsősorban a keresztirányú transzport — és az ebben szereplő különböző hatások [lásd (3b)] — jobb megismerése indokolja. Különösen akkor, ha ezen hatások szétválasztása is lehetővé válik. Erre a vizsgált tartomány bizonyos helyein lehetőség is nyílik. Ugyanis — mint azt a 2.1. szakaszban ismertettük — az adagolási ponton átmenő áramvonal- és tömegáramgörbe (melyen egyúttal a koncentrációmaximumok is elhelyezkednek) egybesik —, feltéve, hogy $D_b^* > 0$.

Vizsgáljunk most olyan esetet, amikor ez a feltevés nem teljesül. Ekkor D_b^* bevezetése nyilvánvalóan nem célszerű, ezért tekintsük a (8a) egyenletet.

Valamely rögzített s mellett két olyan hely található, amelyekre a $db_m/ds = 0$, illetve $\partial\tilde{c}/\partial b = 0$ feltétel teljesülése jellemző.

Az elsőből adódó b_1-nél

$$D_b(b_1)\frac{\partial\tilde{c}}{\partial b}(b_1) = \widetilde{v_b^* c^*}(b_1)H_b(b_1)\,, \tag{18}$$

a koncentrációcsúcs nem a közös $q(b)$=konst., $\dot{m}(b) =$ konst. vonalon helyezkedik el.

A második esetben (a korábbi közelítésekkel)

$$\widetilde{v_b^* c^*}(b_2) = \frac{H_b}{H_s}(b_2)\,\tilde{v}_s(b_2)\,\tilde{c}(b_2)\frac{db_m}{ds}(c_2)\,, \tag{19}$$

azaz a turbulenstől eltérő keresztirányú transzport a b_2 pontban számítható. Más b értékek mellett ez — és így a két anyagátviteli forma szétválasztása — csak különböző feltevésekkel, (18), (19) figyelembevételével lehetséges.

A (17) kifejezés tehát alkalmas lehet D_b^* szelvényen belüli változásának kiszámítására, (18) és (19) pedig a két különböző jellegű transzportra ad némi felvilágosítást.

Mindemellett szükséges olyan összefüggés megadása is, mellyel a szelvényre vonatkozó átlag D_b^* definiálható.

Ésszerű célkitűzés, hogy az átlaggal ($\widetilde{D}_b^*$) számolva a helyes tömegáram adódjék ki, azaz (14)-ből

$$\dot{M} = \tilde{c}(b_1)\int_0^B h\tilde{v}_s \exp\left[-\frac{1}{\widetilde{D}_b^*}\int_{b_1}^b \frac{H_b^2}{H_s}\tilde{v}_s\frac{db_m}{ds}db'\right]H_b db\,, \tag{14a}$$

s most $\tilde{c}(b_1)$ ismert. Innen $\widetilde{D}_b^*$ például iterációval kifejezhető. Hasonlóképpen lehetséges, hogy a $h\tilde{v}_s\tilde{c}$ elosztás szórásnégyzetének egyenlőségét írjuk elő, vagy

legkisebb négyzetes illeszkedést teljesítünk — mindkét esetben a mért és a (13) alapján számított értékek között.

IRODALOM

1. FUKUOKA, S.—SAYRE, W. W.: Longitudinal Dispersion in Sinuous Channels. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 99 No. HY 1. (Jan. 1973)
2. FARKAS, M.: Speciális függvények. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964
3. HINZE, J. O.: Turbulence. McGraw-Hill, London 1959
4. HOLLEY, E. R.—SIEMONS, J.—ABRAHAM, G.: Some Aspects of Analyzing Transverse Diffusion in Rivers. *Journal of Hydraulic Research* 10 (1972), no. 1
5. BRONSTEJN, J. N.—SZEMENGYEJEV, K. A.: Matematikai zsebkönyv. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974
6. SOMLYÓDY, L.: Turbulens diffúzió és diszperzió elméleti kérdéseivel kapcsolatos laboratóriumi vizsgálatok. *VITUKI jelentés*, 1974
7. TAYLOR, G. J.: Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly through a Tube. *Proc. Roy. Soc.* A. 212. (1953)
8. ELDER, J.W.: The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow. *Journal of Fluid Mechanics* 5 (1959)
9. STAROSOLSZKY, Ö.: Diffúzió és diszperzió a vízépítési hidraulikában. *Műszaki Tudomány*, 43 (1970)
10. STAROSOLSZKY, Ö.: On the Interpretation of the Longitudinal Dispersion Coefficient. *Fifteenth Congress of the IAHR*, Istambul 1973
11. SZEPESI, D.: Légszennyező anyagok turbulens diffúziójának meteorológiai föltételei Magyarországon. *Országos Meteorológiai Intézet Hivatalos Kiadványai* 32 (1967)
12. CZERNUSZENKO, W.: Mixing Processes in Wide Open Channels. *Journal of Hydrology* 19 (1973)

Examination of Mixing in Water Streams by using Mass Flux Gonstant Curves. The paper investigates the mixing of some passive, dissolved polluting matter, permanently released into some water stream. The velocity field is assumed to be known, and the governing turbulent diffusion equation is applied by introducing the depth integrated values in the coordinate system consisting of stream lines and of equipotential [lines normal to them. As an analogy to the stream lines, the lines of constant mass flux are defined. Using these, the original differential equation is decomposed into two equations very easy to handle in numerical calculations. Some characteristics of the curves are discussed; then the paper deals with the calculation of the concentration distribution and with the inverse problem, the determination of the dispersion coefficients by tracer measurements.

Untersuchung der Vermischung in Wasserläufen mit Hilfe der Massenstromlinien. Gegenstand der Arbeit ist die Untersuchung der Vermischung eines in irgendeinen Wasserlauf permanent eingeleiteten, passiven, gelösten Schmutzstoffes. Das Geschwindigkeitsfeld wird als bekannt angenommen und die die Erscheinung beschreibende turbulente Diffusionsgleichung wird durch Einführung der vertikalen Integraldurchschnitte in einem aus Stromlinien und den dazu senkrechten Niveaulinien bestehenden Koordinatensystem angewendet. Als Analogie der Stromlinien werden die Linien konstanten Massenstroms (die Massenstromlinien) definiert. Mit ihrer Hilfe wird die ursprüngliche DGl. in zwei — numerisch sehr einfach zu berechnende — Gleichungen zerlegt. Einige charakteristische Eigenschaften der obigen Kurven werden definiert und dann beschäftigt sich die Arbeit mit der Berechnung der Konzentrationsverteilung, bzw. mit der umgekehrten Aufgabe, der Bestimmung der Dispersionsfaktoren aus Farbenmessungen.