A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS NÉHÁNY ÚJ EREDMÉNYÉRŐL

JORDAN KÁROLY lev. tag

I.*

POISSON formulája $\psi(m, x)=\frac{m^x}{x!}e^{-m}$, melyben egy rendelkezésre álló paraméter van m és amelyben az x változó $0, 1, 2, 3, \ldots$ értékeket vehet fel, alkalmas nem folytonos változójú függvények megközelítésére (egyenlő közök esetén), de tekintettel arra, hogy csak egy paramétert tartalmaz ritkán ad elegendő pontosságot. Ez késztetett arra 1926-ban, hogy a formulát általánosítsam, úgy hogy benne tetszőleges számú paraméter lehessen és ennek folytán a kívánt pontosságot megadhassa, továbbá, hogy a paraméterek könnyen kiszámíthatók legyenek.

Az általánosított formula a következő volt

$$f(x)=[a_0G_0+a_1G_1(x)+a_2G_2(x)+\cdots+a_nG_n(x)]\,\psi(m, x),$$

ahol $G_s(x)$ oly s-edfokú polinom, amely ortogonális oly értelemben, hogy

$$\sum_{x=0}^{\infty} G_\nu G_\mu \psi=0 \text{ ha } \nu\neq\mu.$$

$$G_s(x)=\frac{s!}{m^s}\sum_{i=0}^{s+1}(-1)^i\frac{m^i}{i!}\binom{x}{s-i},$$

továbbá

$$\sum_{x=0}^{\infty} G_s^2(x)\psi(x)=\frac{s!}{m^s}.$$

Ez értekezésben a differenciaszámításnak megfelelően, az összegekbe az alsó határ be van értve, a felső nem.

Ha az $f(x)$ függvénnyel kivánunk megközelíteni adott észleléseket a momentumok elve szerint, akkor az ortogonalitás révén az a_s paramétereket legegyszerűbben a megközelítendő $y(x)$ észlelési adatok faktorális momentumai segélyével az alábbi szimbolikus formula adja

$$a_s=\frac{1}{s!}(\mathfrak{M}-m)^s,$$

amelyben a binom kifejtésénél $\mathfrak{M}^i$ helyett $\mathfrak{M}_i$ irandó, $i=0$ esetén is; továbbá $\mathfrak{M}_i=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\ldots(x-i+1)\cdot y(x)$, és $m=\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_0$ az x változó átlaga.

* Az I. rész képezte az 1954 szeptember 27-iki Jósvafőn tartott előadást.

A G_s polinomoknak érdekes matematikai tulajdonságaik vannak, pl.

$$\underset{x}{\triangle} G_s(x) = \frac{s}{m} G_{s-1}(x)$$

következőleg

$$\sum_{x=a}^{b} G_s(x) = \frac{m}{s+1} [G_{s+1}(b) - G_{s+1}(a)]$$

továbbá

$$\triangle G_s(x) \psi(m, x) = -G_{s+1}(x+1) \psi(m, x+1)$$

és ebből

$$\sum_{x=a}^{b} G_s(x) \psi(m, x) = G_{s-1}(a-1) \psi(m, a-1) - G_{s-1}(b-1) \psi(m, b-1).$$

Ez a képlet megadja az $f(x)$ függvény összegét, például $F(x < x_1)$-et:

$$F(x < x_1) = a_0[1 - I(\bar{u}, \bar{p})] - \sum_{s=1}^{n+1} a_{s-1} G_{s-1}(x_1 - 1) \psi(x_1 - 1)$$

E formulában $I(\bar{u}, \bar{p})$ a nem-teljes gamma függvény viszonya a teljes függvényhez, továbbá $\bar{u} = m/\sqrt{x_1}$ és $\bar{p} = x_1 - 1$.

Ezek után felmerült az a probléma, hogy hasonlóan járjunk el folytonos változós függvény, POISSON formulájával való megközelítésénél is; általánosítva a formulát, melyet most

$$\varphi = \varphi(p, x) = \frac{x^p e^{-x}}{\Gamma(p+1)}$$

alakban írunk. Legyen az általánosított függvény a következő:

(2) $$f(x) = [a_0 Q_0 + a_1 Q_1 + \cdots + a_n Q_n] \varphi(p, x),$$

melyben $Q_s = Q_s(x)$ s-edfokú polinom, mely úgy van meghatározva, hogy e polinomok ortogonálisak legyenek $\varphi(p, x)$-re vonatkoztatva a $0, \infty$ közben, vagyis, ha $\nu \neq \mu$ akkor

$$\int_0^\infty Q_\nu Q_\mu \varphi \, dx = 0.$$

Ebből kiindulva a Q_s polinomok meghatározása a következő eredményre vezetett

$$Q_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s+1} (-1)^\nu \binom{p+s}{\nu} \frac{x^{s-\nu}}{(s-\nu)!} \quad *$$

* Utólag Takács Lajos figyelmeztetett a $Q_s(x)$ polinomok és a Laguerre polinomok közötti összefüggésre. Ha a $Q_s(x)$ polinomot megszorozzuk $-s!$-sal és ha benne a p paramétert nullával tesszük egyenlővé, megkapjuk a LAGUERRE polinomot. (J. LENSE: Reihenentwicklungen der mathematischen Physik. Berlin W. 1953.)

Partikuláris értékek:

$$Q_0=1, \quad Q_1=x-(p+1), \quad Q_2=\frac{x^2}{2!}-(p+2)x+\binom{p+2}{2}$$

$$Q_3=\frac{x^3}{3!}-\binom{p+3}{1}\frac{x^2}{2!}+\binom{p+3}{2}x+\binom{p+3}{3}$$

és

$$\int_0^\infty Q_s^2\varphi\,dx=\binom{p+s}{s}.$$

Az a_s paramétereket a momentumok elvének megfelelően határozzuk meg az $y(x)$ függvény momentumai segélyével; a számítás az ortogonalitás következtében egyszerű. Legyen M_i az i-edfokú momentuma $y(x)$-nek

$$M_i=\int_0^\infty x^i y(x)dx$$

A számítás eredményét, miután s és ν nem negatív egész számok, a következőképp írhatjuk:

$$a_s=\sum_{\nu=0}^{s+1}(-1)^\nu\frac{\binom{p+s}{\nu}M_{s-\nu}}{\binom{p+s}{s}(s-\nu)!}=\sum_{\nu=0}^{s+1}\frac{(-1)^\nu\binom{s}{\nu}M_{s-\nu}}{\Gamma(p+s-\nu+1)}\cdot\Gamma(p+1).$$

Az a_s paraméterek meghatározása után célszerű a (2) képletet x hatványai szerint átrendezni, ekkor

$$f(x)=\sum_{s=0}^{n+1}C_{ns}\frac{x^s}{s!}\varphi(p,x)=\sum_{s=0}^{n+1}C_{ns}\binom{p+s}{s}\varphi(p+s,x), \tag{3}$$

ahol

$$C_{ns}=\sum_{\nu=0}^{n-s+1}(-i)^\nu\binom{p+s+\nu}{\nu}a_{s+\nu}$$

$\varphi(p+s,x)$ értékét pedig táblázatból vesszük ki.

Ezáltal fölöslegessé válik táblázatok szerkesztése a polinomok értékeire, ami nagy munkával jár és különben is célszerűtlen, a (2) formulában például n interpolációra volna szükség. 1921-ben én is közöltem hasonló esetben táblázatokat a Proceedings of the London Mathematical Society-ben. Azért tartom ezt szükségesnek fölemlíteni, mert például FISHER, Statisztikai Táblázataiban még ma is közöl másféle ortogonális polinomokra táblázatokat. Ha a paramétereket meghatároztuk, akkor az eredményt átrendezzük folytonos változó esetén x hatványai szerint, mint a jelen esetben vagy pl. Hermite polinomoknál; nem folytonos változó esetén pedig $\binom{x}{s}$ szerint, mint például ortogonális polinomoknál vagy az említett G_s polinomoknál.

A (3) függvényből könnyen megkapjuk annak integrálját $x=0$-tól $x=x_1$-ig, ugyanis

$$\int_0^{x_1} \varphi(p+s, x)dx = I(\bar{u}, p+s), \quad \text{ahol} \quad \bar{u} = x_1 \sqrt{p+s+1}.$$

Következőleg

$$F(x < x_1) = \sum_{s=0}^{n+1} C_{ns} \binom{p+s}{s} I(\bar{u}, p+s).$$

Az $I(\bar{u}, p+s)$ értékét a nem-teljes gamma függvény táblázata adja.

II.*

Dacára annak, hogy PASCAL, FERMAT és HUYGENS szép eredményeket értek el a valószínűségszámítás terén, annak igazi megalapítójául mégis JACOBUS BERNOULLI-t kell tekinteni.

NICOLAS STRUYCK, 1716-ban megjelent valószínűségszámítási könyvének előszavában azt mondja: „Nem szükséges bizonyítani e számítások hasznosságát és előnyösségét; de azért nem merünk azoknak oly nagy jelentőséget tulajdonítani mint azt JACOB BERNOULLI tette, hanem jobbnak látjuk, csatlakozni HUYGENS szavaihoz, melyek szerint ha valaki kissé elmélyed a dolgokba, látni fogja, hogy nem csupán játékról van szó, hanem mély és érdekes elvekről." LEIBNITZ még tovább ment, kétségbe vonva BERNOULLI okoskodásának helyességét.

Az utókor azonban BERNOULLI-nak adott igazat, még magasabbra becsülve eredményeit, melyeket húsz évi munkával ért el, mint ő maga. BERNOULLI formulája, mely ν kedvező eset valószínűségét adja n észlelésnél, ha a tünemény valószínűsége minden észlelésnél p marad, és amelyből a nagyszámok törvényét állapította meg, a következő:

$$P(\nu) = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}, \quad \text{ahol} \quad q = 1 - p. \tag{4}$$

Ezt a továbbiakban *Bernoulli függvényének* fogjuk nevezni. Ebből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a kedvező eset kevesebbszer forduljon elő mint λ

$$P(\nu < \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} P(\nu) \tag{5}$$

Ez a formula is BERNOULLI-tól származik. A (4) képlet numerikus számításra igen alkalmas; ma már nagy n esetén is, ugyanis vannak táblázatok $\log x!$-ra $x = 3000$-ig.**

* A II. tárgyát a Magyar Tudományos Akadémián 1954. november 26-án tartott előadás képezi.

** F. J. DUARTE, Nouvelles tables de $\log n!$ à 33 décimales. Genève, 1927.

Ellenben az (5) formula, ha λ nagy, számításra igen hosszadalmas. Ki lehet ugyan mutatni, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} P(\nu) = \int_0^q \frac{t^{n-\lambda}(1-t)^{\lambda-1}}{B(n+1-\lambda, \lambda)} dt = I_q(n+1-\lambda, \lambda), \tag{6}$$

vagyis ki lehet fejezni az (5) valószínűséget egy nem-teljes beta függvény és a megfelelő teljes függvény viszonyával. A nehézség abban áll, hogy a nem-teljes beta függvény táblázata, tekintve hogy három változós táblázat szükségképp csak kis számokig terjedhet. Ha λ és $n-\lambda$ kisebbek mint 51, akkor a táblázat megadja a (6) valószínűséget. Ellenkező esetben ki kellene számítani a nem-teljes beta függvényt; miután azonban azt csak $\Sigma P(\nu)$-höz hasonló összegezéssel tudjuk kiszámítani, tehát a (6) formulának íly esetekben gyakorlati jelentősége nincsen. Tulajdonképpen, egész számú argumentumok esetén a nem-teljes beta függvényt BERNOULLI (5) formulája adja. Régen törekszenek az (5) valószínűséget valamely zárt formulával kifejezni, mert az egyúttal a nem-teljes beta függvény kiszámítására is szolgálna.

BERNOULLI függvényének valamely s-edfokú polinomra $f_s(\nu)$ vonatkoztatott teljes momentumát

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} f_s(\nu) P(\nu)$$

könnyen megtudjuk határozni; a legegyszerűbb eljárás a polinomot binomiális együtthatók sorába, NEWTON sorba rendezni, amidőn a függvény momentumát kifejezhetjük a BERNOULLI függvény *binomiális momentumaival*

$$B_i = \binom{n}{i} p^i.$$

Az $f_s(\nu)$ momentumok között a legfontosabbak a binomiálisokon kívül a ν kedvező esetek, továbbá a $\xi = \nu - np$ eltérések hatvány momentumai. Ezeket a binomiális momentumok segélyével határozhatjuk meg; de van egy másik jó eljárás is; ugyanis kifejezhetjük, úgy a kedvező esetek, mint az eltérések hatvány momentumait a THIELE féle félinvariánsokkal. A BERNOULLI függvény e félinvariansaira az alábbi egyszerű formulát vezettem le; az s-edfokú félinvarians:

$$\lambda_s = n \sum_{i=0}^{s} (-1)^i i! \, p^{i+1} \mathfrak{S}_s^{i+1},$$

ahol $\mathfrak{S}_s^{i+1}$ a másodfajú STIRLING féle szám. Végeredményben a BERNOULLI függvény teljes momentumainak kiszámításánál semmi nehézség sincsen. A Stirling számok a valószínűség számításban nagy szerepet játszanak. Például a BERNOULLI probléma egyik általánosításánál, ha minden észlelésnél m esemény egyike fordulhat elő, $1/m$ valószínűséggel, akkor annak a valószínűsége hogy n észlelésnél minden esemény legalább egyszer forduljon elő (POINCARÉ tételének egy általánosítása)

$$P = \frac{m!}{m^n} \mathfrak{S}_n^m .$$

Azonban gyakran szükség van a *nem-teljes momentumokra* is. A BERNOULLI függvény nulladrendű nem-teljes momentumát (5), már tárgyaltuk. RAGNAR FRISCH-nek sikerült 1924-ben a BERNOULLI függvénynek $\xi = \nu - np$ eltérésekre vonatkoztatott nem-teljes momentumát meghatározni:

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} (\nu - np) P(\nu) = -q\lambda P(\lambda). \tag{7}$$

RAGNAR FRISCH fontos eredménye után felmerült az a gondolat, hogy meg kellene határozni a BERNOULLI függvénynek egy magasabb fokú nem-teljes momentumát, mert az módot nyújthatna a függvény többi nem-teljes momentumának meghatározására. Tudtommal ez eddig nem sikerült. Ennek folytán valószínűségszámítási könyvem kéziratának revidiálásánál elhatároztam, hogy e kérdést a differenciaszámítás szempontjából vizsgálom meg.

A (7) formulából következik, hogy $\xi P(\nu)$ inverz differenciája $-q\nu P(\nu)$ tehát

$$\Delta^{-1} (\nu - np) P(\nu) = -q\nu P(\nu). \tag{8}$$

Ennélfogva ha a határokat a jobboldali mennyiségbe behelyettesítjük, megkapjuk a baloldali mennyiségek összegét az alsó határtól a felsőig, az utóbbi nincsen az összegbe beleértve. E formula értelmében, ha BERNOULLI függvényét (ν-np)-vel szorozzuk, akkor a szorzat inverz differenciája egyenlő BERNOULLI függvényének egy másik elsőfokú polinomali szorzatával. Megvizsgálandó, hogy magasabb fokú polinomok esetén fenn áll e hasonló reláció, továbbá, hogy milyen polinomok között.

Legyen $\varphi(\nu)$ egy tetszőleges polinom, melynek konstans tagja hiányzik. Rendezzük a polinomot NEWTON sorba és határozzuk meg a $\binom{\nu}{s} P(\nu)$ tag inverz differenciáját, a szorzatok inverz differenciájának képletével. Ha a szorzatot a következő módon írjuk,

$$\frac{1}{s} \Delta^{-1} \binom{\nu-1}{s-1} \cdot \nu P(\nu)$$

egyszerű számítás a következő eredményre vezet:

$$\Delta^{-1} \left[\binom{\nu}{s+1} P(\nu) \right] = -q \binom{\nu}{s+1} P(\nu) + \frac{(n-s)p}{(s+1)} \Delta^{-1} \left[\binom{\nu}{s} P(\nu) \right].$$

Ha bevezetjük a következő jelölést $f(s) = \Delta^{-1} \binom{\nu}{s} P(\nu)$, akkor az

$$f(s+1) - \frac{(n-s)p}{s+1} f(s) = -q \binom{\nu}{s+1} P(\nu) \tag{9}$$

elsőrendű, változós koefficiensű, teljes differencia egyenletre jutunk, melyet pozitív egész számú s-ekre a klasszikus módon megoldunk. Az eredmény, ha $f(s)$ és $f(0)$ helyett ismét visszatérünk az előző jelölésre

$$(10) \qquad \Delta^{-1}\left[\binom{\nu}{s}-\binom{n}{s}p^s\right]P(\nu)=-qP(\nu)\sum_{i=0}^{s}\binom{\nu}{s-i}\binom{n-s+i}{i}p^i\Big/\binom{s}{i}.$$

Miután az egyenlet jobb oldala zérus $\nu=0$ és $\nu=n+1$ esetén tehát a baloldali mennyiség teljes momentuma nulla.

Ha a műveletet a NEWTON sor minden tagján elvégezzük, arra a következtetésre jutunk, hogy csak ha a Δ^{-1} jel alatti mennyiség teljes momentuma nulla, csak akkor fejezhetjük ki annak inverz differenciáját és ennélfogva nemteljes momentumát, a BERNOULLI függvény egy polinommal való szorzatával. Ez a polinom ugyanolyan fokszámú lesz, mint a Δ^{-1} jel alatti. Íly módon hosszú sorozatát kapjuk a BERNOULLI függvény nem-teljes momentumainak, melyeket a BERNOULLI függvénynek egy polinommal való szorzata ad. RAGNAR FRISCH eredménye is ezek közé tartozik.

Ha χ_s-vel jelöljük a kedvező esetek s-edrendű binomiális függvényének eltérését aritmetikai várhatóságuktól, $\chi_s=\binom{\nu}{s}-\binom{n}{s}p^s$ akkor a (10) formula egyszerűen megadja azok nem-teljes momentumát a

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda}\chi_s P(\nu)$$

összeget; de a $\binom{\nu}{s}P(\nu)$ mennyiség inverz differenciáját már nem fejezhetjük ki íly módon; ekkor ugyanis a (10) formulában a jobb oldalra kerül

$$\binom{n}{s}p^s\Delta^{-1}P(\nu)=\binom{n}{s}p^sI_q(n+1-\nu,\nu).$$

Leggyakrabban a $\xi=\nu-np$ eltérések, továbbá a ν kedvező esetek száma hatványainak nem-teljes momentumaira van szükség. Ezeket is megkaphatjuk a (10) képlettel, ha a ξ^k illetve ν^k hatványokat kifejezzük a $\binom{\nu}{i}$ együtthatókkal $i=0,1,2,\ldots,k$-ra.

De ha alacsony fokszámról van szó, akkor azokat egyszerűbb közvetlenül meghatározni. Például ha ξ^2 esetén a $\Delta^{-1}\ \xi\cdot\xi P(\nu)$ szorzaton végezünk parciális összegezést, végül a

$$\Delta^{-1}[\xi^2-npq]P(\nu)=q\nu(p-\xi)P(\nu)$$

eredményt érjük el. Hasonlóan kapjuk:

$$\Delta^{-1}[\xi^3-npq(q-p)]P(\nu)=-q\nu[(p-\xi)^2+(2n-1)pq]P(\nu).$$

Ezek után már csak a BERNOULLI függvény inverz differenciájának más, számításra alkalmasabb módon való kifejezése volna hátra. Ennek a lehetősége megmaradt, csupán az van kizárva, hogy azt a BERNOULLI függvénynek valamely polinommal való szorzatával érjük el. E kérdéssel való foglalkozás melegen ajánlható.