REKURRENS FOLYAMATOK ÁLTAL SZÁRMAZTATOTT MÁSODLAGOS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1954. december 17-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Tekintsük a $0 < t$ időpontokra értelmezett

(1) $$\eta(t) = \sum_{0 < t_n \leqq t} f(t - t_n, \chi_n)$$

valószínűségi függvényt, ahol a $\{t_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ időpontok valamilyen véletlen törvénynek alávetett valószínűségi változók és a $\{\chi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ paraméterek egymástól és a t_n-ektől is független, egyforma eloszlású valószínűségi változók. A χ_n változók közös eloszlásfüggvényét jelölje

$$P(\chi_n \leqq x) = H(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Legyen továbbá $f(u, x)$ egy előre megadott kétváltozós függvény.

A fenti típusú sztochasztikus folyamatokkal már korábbi [1] és [2] dolgozatunkban is foglalkoztunk. Az [1] dolgozatban azt a speciális esetet vizsgáltuk, midőn a $\{t_n\}$ időpontok Poisson-folyamatban előforduló események időpontjaival egyeznek meg. A [2] dolgozatban pedig ezt a folyamatot abban az esetben tettük vizsgálat tárgyává, midőn a $\{t_n\}$ időpontok ún. *rekurrens sztochasztikus folyamatot* alkotnak. Ez alatt azt értjük, hogy a $\{t_n\}$ sorozatban a $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots; t_0 = 0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók. A [2] dolgozatban azonban csupán arra a speciális esetre szorítkoztunk, midőn

(2) $$f(u, x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } u < 0 \text{ vagy } x < 0, \\ x e^{-\alpha u} & \text{ha } u \geqq 0 \text{ és } x \geqq 0, \end{cases}$$

és α pozitív állandó.

Jelenlegi dolgozatunk a [2] dolgozat továbbfejlesztése arra az esetre, midőn az $f(u, x)$ függvény tetszőleges alakú. Dolgozatunkban mindvégig fel fogjuk tenni, hogy $f(u, x) = 0$, ha $u < 0$, bár ez nem jelent lényeges megszorítást. Továbbá [2]-höz hasonlóan most is feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ időpontsorozat *rekurrens sztochasztikus folyamatot* alkot, azaz a $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots; t_0 = 0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók. A $\{\xi_n\}$ változók közös eloszlásfüggvényét jelölje

$$P(\xi_n \leqq x) = G(x) \qquad (n = 1, 2. \ldots).$$

A $\{\xi_n\}$ változók pozitivitásából következik, hogy $G(0) = 0$.

13*

Az említett folyamatok különösen fontos szerepet játszanak a részecskeszámlálók elméletében, elektroncsövek anódáramingadozásának tárgyalásánál, híradástechnikában fellépő átviteli kérdéseknél és egyéb fizikai problémáknál. A gyakorlati alkalmazásoknál főleg a stacionárius eset bír fontossággal, azaz végtelen hosszú ideje tartó folyamat esetén kialakult egyensúlyi állapot. Ezért bevezetjük a következő valószínűségi függvényt is:

$$\eta^*(t) = \sum_{-\infty < t_n \leq t} f(t - t_n, \chi_n), \tag{3}$$

ahol most az összegezés mindazon t_n időpontokra ki van terjesztve, amelyek t időpont előtt fordultak elő. Most azt tesszük fel, hogy a $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ időkülönbségek egymástól független, egyforma eloszlású pozitív valószínűségi változók, közös $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ki fogjuk mutatni, hogy az $\eta^*(t)$ folyamat általános feltételek mellett létezik.

Könnyen belátható, hogy ha az $\eta(t)$ folyamat $t \to \infty$ esetén meghatározott sztochasztikus viselkedést mutat, úgy ilyen esetekben az $\eta^*(t)$ folyamat minden véges t időpontban ugyanazt a sztochasztikus viselkedést mutatja.

A következőkben először $\eta(t)$ eloszlásának és momentumainak meghatározásával foglalkozunk. Feltételeket adunk arra vonatkozólag, hogy a momentumok határértékei $t \to \infty$ esetén mikor léteznek és megadjuk a határértékeket. Ezután az $\eta^*(t)$ folyamat létezésének kérdésével foglalkozunk és megadjuk az $\eta^*(t)$ folyamat korrelációs függvényét, amelynek ismeretében A. JA. HINCSIN [3] munkája alapján könnyen elvégezhető az $\eta^*(t)$ folyamat harmonikus analízise. Megjegyezzük, hogy [2] dolgozatunkban a (2) alatti függvényre sem tudtuk elvégezni a megfelelő $\eta^*(t)$ folyamat harmonikus analízisét, ugyanis ehhez szükséges lett volna az $\eta^*(t)$ folyamat viselkedését (2)-nél általánosabb jelek esetén is ismerni. Most ezt pótlólag elvégezzük.

Bevezetjük a következő jelöléseket: Az $\eta(t)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelölje

$$P(\eta(t) \leq x) = F(t, x). \tag{4}$$

Ha létezik $\lim\limits_{t \to \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény, úgy $\eta^*(t)$-nek minden t-re létezik eloszlásfüggvénye, éspedig fennáll, hogy

$$P(\eta^*(t) \leq x) = F^*(x). \tag{5}$$

Legyen továbbá $\eta(t)$ változó karakterisztikus függvénye

$$\Phi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d_x F(t, x) \tag{6}$$

és amennyiben $F^*(x)$ határeloszlás létezik,

$$\Phi^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dF^*(x). \tag{7}$$

Jelölje továbbá az $\eta(t)$ változó k-adik momentumát $M_k(t)$, azaz legyen

$$M_k(t) = M\{(\eta(t))^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d_x F(t, x). \tag{8}$$

Speciálisan, az $\eta(t)$ változó várható értékét $M(t)$-vel és szórásnégyzetét $D^2(t)$-vel fogjuk jelölni, azaz $M(t) = M_1(t)$ és $D^2(t) = M_2(t) - [M_1(t)]^2$. Legyen továbbá $M_k = \lim_{t\to\infty} M_k(t)$ és speciálisan $M = \lim_{t\to\infty} M(t)$ és $D^2 = \lim_{t\to\infty} D^2(t)$.

1. §. Az $\eta(t)$ folyamat vizsgálata

1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy majdnem minden t-re létezik*

$$\varphi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(t, x)} \, dH(x) \tag{9}$$

integrál. Ekkor $\Phi(t, \omega)$ meghatározására a következő integrálegyenlet szolgál:

$$\Phi(t, \omega) = \int_0^t \Phi(t-x, \omega)\, \varphi(t-x, \omega)\, dG(x) + 1 - G(t). \tag{10}$$

BIZONYÍTÁS: A (9) integrál mindenesetre létezik, ha $f(t, x)$, x-ben Borel-mérhető. A (10) integrálegyenlet fennállása úgy látható be, hogy $\eta(t)$ (1) kifejezésében különválasztjuk a t_1 időpontnak megfelelő tagot. Ekkor azon feltétel mellett, hogy $t_1 = x$ fennáll:

$$\eta(t \mid t_1 = x) = \begin{cases} f(t-x, \chi_1) + \bar{\eta}(t-x) & \text{ha } x \leq t \\ 0 & \text{ha } x > t. \end{cases} \tag{11}$$

Itt $\bar{\eta}(t-x)$ valószínűségi változó független $f(t-x, \chi_1)$-től és eloszlása megegyezik $\eta(t-x)$ eloszlásával. Ennek figyelembevételével $\eta(t \mid t_1 = x)$ karakterisztikus függvénye:

$$\begin{cases} \Phi(t-x, \omega)\, \varphi(t-x, \omega) & \text{ha } x \leq t \\ 1 & \text{ha } x > t \end{cases} \tag{12}$$

és a feltétel nélküli $\eta(t)$ karakterisztikus függvényét $\Phi(t, \omega)$-t úgy nyerjük, hogy ezt $dG(x)$ szerint integráljuk $0 \leq x < \infty$ értékekre.

Megjegyezzük, hogy ha $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, \omega) = \Phi^*(\omega)$ határérték létezik és $\Phi^*(\omega)$ az $\omega = 0$ helyen folytonos, úgy $\lim_{t\to\infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlás is létezik és $F^*(x)$ karakterisztikus függvénye $\Phi^*(\omega)$, melynek ismeretében $F^*(x)$ egyértelműen meghatározható (P. LÉVY és H. CRAMÉR tétele).

A (10) integrálegyenlet megoldására sokszor célszerű $\Psi(t, \omega) = \Phi(t, \omega)\, \varphi(t, \omega)$ függvényt bevezetni. Erre vonatkozóan a következő integrálegyenlet lesz érvényes:

$$\Psi(t,\omega)=\varphi(t,\omega)\left[\int_0^t \Psi(t-x,\omega)\,d\,G(x)+1-G(t)\right]. \tag{13}$$

A (10) illetve (13) egyenlet sajnos általános esetben nem oldható meg és így minden speciális eset külön tárgyalást igényel.

Mivel $F(t,x)$ általános meghatározása nem vihető véghez, ezért egyelőre beérjük $\eta(t)$ várható értékének, szórásnégyzetének és momentumainak meghatározásával.

Bevezetjük a következő jelöléseket. Legyen a $(0,t)$ időintervallumban előforduló $\{t_n\}$ események várható száma $m(t)$, azaz

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t), \tag{14}$$

ahol $G_n(t)$ jelöli a $G(t)$ eloszlásfüggvény önmagával való n-szeres konvolucióját. Legyenek továbbá

$$\lambda_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t,x)]^j\,d\,H(x), \qquad (j=0,1,2,\ldots), \tag{15}$$

amennyiben ezek léteznek.

Most a következő tételeket bizonyítjuk be:

2. TÉTEL: *Az* $M\{\eta(t)\}=M(t)$ *várható értékre fennáll, hogy*

$$M(t)=\int_0^t \lambda_1(t-x)\,d\,m(x). \tag{16}$$

Továbbá, ha $G(x)$ *nem rácsos eloszlásfüggvény, átlaga*

$$\vartheta=\int_0^{\infty} x\,d\,G(x) \tag{17}$$

véges és $\lim_{t\to\infty} t\lambda_1(t)=0$, *úgy fennáll*

$$\lim_{t\to\infty} M(t)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(t)\,dt, \tag{18}$$

feltéve, hogy a jobboldal létezik.

BIZONYÍTÁS: Mint ismeretes, valószínűségi változók összegének a várható értéke egyenlő az egyes tagok várható értékeinek összegével, így tehát

$$M\{\eta(t)\}=\sum_{n=1}^{\infty} M\{f(t-t_n,\chi_n)\} \tag{19}$$

és itt

$$M\{f(t-t_n,\chi_n)\}=\int_0^t \lambda_1(t-x)\,d\,G_n(x). \tag{20}$$

A (16) kifejezés innen (14) tekintetbevételével adódik.

A tétel második felének bizonyítására hivatkozunk D. BLACKWELL [4] és J. L. DOOB [5] dolgozataira, amelyben kimutatták, hogy ha $G(x)$ nem rácsos eloszlás, úgy tetszőleges $h>0$-ra fennáll a következő határérték:

$$\lim_{t\to\infty}[m(t+h)-m(t)]=\frac{h}{\vartheta}. \tag{21}$$

Ha $M(t)$-t a következő alakban írjuk fel:

$$M(t)=\int_0^{t/2}\lambda_1(t-x)\,dm(x)+\int_{t/2}^{t}\lambda_1(t-x)\,dm(x), \tag{22}$$

úgy a (21) felhasználásával kimutatható, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t/2}^{t}\lambda_1(t-x)\,dm(x)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(x)\,dx, \tag{23}$$

továbbá feltételünk következtében tetszőleges kicsiny $\varepsilon>0$ mellett elegendő nagy t-re fennáll, hogy $|t\lambda_1(t)|<\varepsilon$, úgy, hogy t elegendő nagyra választásával elérhető, hogy

$$\left|\int_0^{t/2}\lambda_1(t-x)\,dm(x)\right|\leqq\varepsilon\frac{m(t/2)}{t/2}. \tag{24}$$

Mivel $\lim_{t\to\infty}m(t)/t=1/\vartheta$, következőleg (22) jobboldalán az első kifejezés zérushoz tart, ha $t\to\infty$. Így ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy kiindulhattunk volna az $M(t)$-re könnyen beláthatóan fennálló

$$M(t)=\int_0^{t}[\lambda_1(t-x)+M(t-x)]\,dG(x) \tag{25}$$

integrálegyenletből is, amikor is természetesen ugyanazon eredményre jutottunk volna.

3. TÉTEL: *A $D^2\{\eta(t)\}=D^2(t)$ szórásnégyzetre fennáll, hogy*

$$D^2(t)=\int_0^{t}[\lambda_2(t-x)+2\lambda_1(t-x)M(t-x)]\,dm(x)-[M(t)]^2. \tag{26}$$

Továbbá, ha $G(x)$ nem rácsos eloszlásfüggvény, átlaga $\vartheta<\infty$, $\lim_{t\to\infty}t\lambda_1(t)=0$ és $\lim_{t\to\infty}t\lambda_2(t)=0$, úgy fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}D^2(t)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}[\lambda_2(t)+2\lambda_1(t)M(t)]\,dt-\left(\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(t)\,dt\right)^2, \tag{27}$$

amennyiben a szóban forgó integrálok léteznek.

Bizonyítás: A feltételes szórásnégyzetre vonatkozó ismert tétel szerint könnyen belátható, hogy $D^2(t)$-re fennáll a következő összefüggés:

$$D^2(t) = \int_0^t D^2(t-x)\,dG(x) + \tag{28}$$
$$+ \int_0^t [(M(t-x))^2 + 2\lambda_1(t-x)M(t-x) + \lambda_2(t-x)]\,dG(x) - [M(t)]^2.$$

Ez $D^2(t)$-re nézve jól ismert Volterra-típusú integrálegyenlet. Célszerűbb most $D^2(t) + [M(t)]^2$ függvényt tekinteni ismeretlennek. Az erre vonatkozó megoldás, mint ismeretes:

$$D^2(t) + [M(t)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t [\lambda_2(t-x) + 2\lambda_1(t-x)M(t-x)]\,dG_n(x). \tag{29}$$

(29)-ből $m(t)$ (14) alatti kifejezésének figyelembevételével adódik a bizonyítandó (26) képlet.

A (27) határérték bizonyítása pontosan úgy történik, mint (18) bizonyítása.

4. Tétel: *Az $M\{(\eta(t))^k\} = M_k(t)$, k-adik momentumra fennáll, hogy*

$$M_k(t) = \int_0^t \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} M_j(t-x)\lambda_{k-j}(t-x)\,dm(x). \tag{30}$$

Továbbá, ha $G(x)$ nem rácsos eloszlásfüggvény, átlaga $\vartheta < \infty$ és fennáll $\lim_{t\to\infty} t\lambda_j(t) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k$-ra), úgy

$$\lim_{t\to\infty} M_k(t) = \frac{1}{\vartheta} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \int_0^{\infty} M_j(t)\lambda_{k-j}(t)\,dt, \tag{31}$$

feltéve, hogy a jobboldalon álló integrálok léteznek.

Bizonyítás: Képezzük (10) mindkét oldalának k-adik deriváltját ω szerint és tegyünk $\omega = 0$-t, vagy a feltételes momentumokra vonatkozó ismert formulák szerint felírhatjuk, hogy

$$M_k(t) = \int_0^t \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M_j(t-x)\lambda_{k-j}(t-x)\,dG(x). \tag{32}$$

Ha már $M_1(t), M_2(t), \ldots, M_{k-1}(t)$ ismeretes, úgy (32) $M_k(t)$ számára ismert típusú Volterra-féle integrálegyenlet, amelynek megoldása a (30) explicit alakban írható fel. A (31) határérték létezése (21) alapján mutatható ki.

2. §. Az $\eta^*(t)$ folyamat vizsgálata

Mindenekelőtt azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy milyen feltételek mellett létezik $\eta^*(t)$ sztochasztikus folyamat. Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

5. TÉTEL: *Ha $G(x)$ nem rácsos eloszlás és átlaga ϑ véges, továbbá*

$$\int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty |f(t,x)|\, dH(x) \right| dt < \infty, \tag{33}$$

úgy az $\eta^*(t)$ folyamat 1 *valószínűséggel létezik.*

BIZONYÍTÁS: t időponttól visszafelé haladva, az időtengelyt osszuk be h hosszúságú szakaszokra. Ekkor $\eta^*(t)$ úgy tekinthető, mint az egyes

$$(t-nh, t-(n-1)h) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

időszakaszokban bekövetkező események által létrehozott jelek t időpontban mért amplitudóinak összege. Jelölje az egyes szakaszok által szolgáltatott adalékokat rendre η_n $(n=1,2,\ldots)$ valószínűségi változó, úgy $\eta^*(t)=\eta_1+\eta_2+\cdots$ $\cdots+\eta_n+\cdots$. Arra nézve, hogy ez a sor 1 valószínűséggel konvergáljon, szükséges és elegendő a következő feltétel teljesülése:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} P\{|\eta_n+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon;\ \nu=1,2,\ldots,p\}=1. \tag{34}$$

Most bebizonyítjuk, hogy a tett feltevések mellett (34) fennáll és így $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n$ sor 1 valószínűséggel konvergens. Nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\begin{aligned} P\{|\eta_n+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon;\ \nu=1,2,\ldots,p\} &\geqq \\ P\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|<\varepsilon\}&. \end{aligned} \tag{35}$$

A jobboldalra MARKOV, pozitív valószínűségi változókra vonatkozó, ismert tételét alkalmazva, a következő becslést nyerjük:

$$P\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|<\varepsilon\}\geqq 1-\frac{M\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|\}}{\varepsilon}. \tag{36}$$

Most továbbá felírhatjuk, hogy

$$M\{|\eta_n|\}\leqq\frac{1}{\vartheta}\int_{(n-1)h}^{nh}\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(u,x)|\, dH(x)\right| du. \tag{37}$$

Ez a következőképpen látható be: Először is a $(t-nh, t-(n-1)h)$ intervallumban kezdődő jelek t időpontban felvett értékei összegének abszolút értékét nem csökkentjük, ha a tagok abszolút értékeinek összegét vesszük, azaz $|f(u,x)|$ időbeli lefolyású jelekkel számolunk. Másodszor a mondott feltételek mellett D. BLACKWELL [4] és J. L. DOOB [5] tétele szerint fennáll, hogy tetszőleges u hosszúságú intervallumban előforduló események várható száma u/ϑ. Most, (35), (36) és (37) szerint felírható, hogy

$$P\{|\eta_n+\eta_{n+1}+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon;\nu=1,2,\ldots,p\}\geqq \tag{38}$$
$$\geqq 1-\frac{1}{\varepsilon\vartheta}\int_{(n-1)h}^{(n+p)h}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(u,x)|\,dH(x)\right]du.$$

Most ha $p\to\infty$, $n\to\infty$ és $\varepsilon\to 0$, úgy (38) jobboldala (33) véges voltára való tekintettel 1-hez tart és definíció szerint (38) baloldala: $P\{\ldots\}\leqq 1$, azaz (34) fennáll, amit bizonyítani kívántunk.

Ha az $\eta^*(t)$ folyamat létezik, úgy $P(\eta^*(t)\leqq x)=F^*(x)$ eloszlásfüggvény is létezik és erre nyilvánvalóan fennáll, hogy $F^*(x)=\lim\limits_{t\to\infty}F(t,x)$. Hasonlóan kaphatók meg $\eta^*(t)$ momentumai is $F(t,x)$ momentumainak határértékeként. Így kimondhatjuk, hogy olyan feltételek mellett, amelyekre (18) és (27) határérték fennáll, $\eta^*(t)$-nek létezik várható értéke és szórásnégyzete, éspedig

$$M=M\{\eta^*(t)\}=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(t)\,dt, \tag{39}$$

$$D^2=D^2\{\eta^*(t)\}=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}[\lambda_2(t)+2\lambda_1(t)M(t)]\,dt-\left(\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(t)\,dt\right)^2, \tag{40}$$

továbbá, ha (31) létezik, úgy fennáll

$$M_k=M\{(\eta^*(t))^k\}=\frac{1}{\vartheta}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\int_0^{\infty}M_j(t)\lambda_{k-j}(t)\,dt. \tag{41}$$

Ezen formulák a fizikai irodalomban jól ismert N. CAMPBELL-féle formulák messzemenő általánosításai. N. CAMPBELL [6] és [7] munkáiban csupán az átlagot és a szórást adta meg speciális esetben. Eredményeit E. N. ROWLAND [8], A. JA. HINCSIN [9], S. O. RICE [10] és mások általánosították Poisson-folyamat által származtatott speciális folyamatokra. A mostani (41) formula ezen képleteket tovább általánosítja rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos folyamatokra.

Ha (18) és (27) határértékek léteznek, úgy azt mondjuk, hogy az $\eta(t)$ folyamat $t\to\infty$ esetén egyensúlyi állapothoz közeledik és a határfolyamat, $\eta^*(t)$, tágabb értelemben stacionárius.

Most az $\eta^*(t)$ folyamat korrelációs függvényét kívánjuk meghatározni. Ezt a következőképpen definiáljuk:

$$R(\tau)=\frac{M\{\eta^*(t)\eta^*(t-\tau)\}-M^2}{D^2}. \tag{42}$$

6. TÉTEL: *Ha az $\eta^*(t)$ folyamat D^2 szórásnégyzete létezik, úgy minden τ-ra létezik az $R(\tau)$ korrelációs függvény, amelyre fennáll, hogy*

$$R(\tau)=\frac{1}{\vartheta D^2}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(t,x)f(t-\tau,x)\,dH(x)\right]dt+ \tag{43}$$

$$+\frac{1}{\vartheta D^2}\int_0^\infty[\lambda_1(t)M(t-\tau)+\lambda_1(t-\tau)M(t)]\,dt-\frac{M^2}{D^2}.$$

BIZONYÍTÁS: Vezessünk be egy új folyamatot a következőképpen: $\theta^*(t)=$ $=\eta^*(t)+\eta^*(t-\tau)$. Ez a folyamat csupán abban különbözik az $\eta^*(t)$ folyamattól, hogy egy jel időbeli lefolyását nem $f(u,x)$, hanem $g(u,x)=f(u,x)+$ $+f(u-\tau,x)$ írja le. Itt feltesszük, hogy $\tau>0$, bár meggondolásaink valamennyi τ értékre érvényesek, ugyanis $R(\tau)$ páros függvény. Most a valószínűségi változók összegére vonatkozó szórásnégyzet alapján felírhatjuk, hogy

$$D^2\{\theta^*(t)\}=D^2\{\eta^*(t)\}+D^2\{\eta^*(t-\tau)\}+2D\{\eta^*(t)\}D\{\eta^*(t-\tau)\}R(\tau), \tag{44}$$

azaz

$$D^2\{\theta^*(t)\}=2D^2[1+R(\tau)]. \tag{45}$$

Viszont $D^2\{\theta^*(t)\}$ a (40) formula alapján meghatározható, ha azt $f(u,x)$ helyett $g(u,x)=f(u,x)+f(u-\tau,x)$ alakú jelekre alkalmazzuk. Így végül (45) segítségével kiszámítható $R(\tau)$, amelyet (43) képlet állít elő.

MEGJEGYZÉS: Ha bevezetjük a következő függvényt:

$$\lambda_{11}(\tau)=\int_0^\infty\lambda_1(t)\lambda_1(t+\tau)\,dt, \tag{46}$$

amely τ-nak páros függvénye, úgy D^2 kiszámításánál sokszor célszerű a következő helyettesítést elvégezni:

$$\int_0^\infty\lambda_1(t)M(t)\,dt=\int_0^\infty\lambda_{11}(t)\,dm(t) \tag{47}$$

és $R(\tau)$ kiszámításánál pedig

$$\int_0^\infty[\lambda_1(t)M(t-\tau)+\lambda_1(t-\tau)M(t)]\,dt=\int_0^\infty[\lambda_{11}(t+\tau)+\lambda_{11}(t-\tau)]\,dm(t) \tag{48}$$

helyettesítéssel élni.

Megjegyezzük továbbá, hogy az $m(t)$ átlagfüggvény a következő Volterra-típusú integrálegyenlet segítségével is meghatározható:

$$m(t)=G(t)+\int_0^t m(t-x)\,dG(x), \tag{49}$$

amely például Laplace—Stieltjes transzformáció segítségével könnyen meg-oldható, ugyanis $\Re(s) > 0$-ra

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}, \tag{50}$$

ahol

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dG(x). \tag{51}$$

PÉLDA: Legyen

$$f(u,x) = \begin{cases} xe^{-\alpha u} & \text{ha } u \geqq 0,\ x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } u < 0 \text{ vagy } x < 0, \end{cases} \tag{52}$$

és $M\{\chi_n\} = \mu$, $D^2\{\chi_n\} = \sigma^2$, továbbá vezessük be a következő jelölést:

$$\beta = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dG(x), \tag{53}$$

úgy $\lambda_1(t) = \mu e^{-\alpha t}$, $\lambda_2(t) = (\sigma^2+\mu^2)e^{-2\alpha t}$ és $\lambda_{11}(\tau) = \dfrac{\mu^2}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$. Ekkor

$$\int_0^\infty \lambda_{11}(t)\,dm(t) = \frac{\mu^2}{2\alpha}\,\frac{\beta}{1-\beta} \tag{54}$$

és (40) szerint

$$D^2 = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\alpha\vartheta} + \frac{\mu^2}{\alpha\vartheta}\,\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\mu^2}{\alpha^2\vartheta^2}. \tag{55}$$

$R(\tau)$-ra pedig (43) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} + \frac{\mu^2}{2\alpha\vartheta D^2}\Bigg[e^{-\alpha|\tau|}\int_0^{|\tau|} e^{\alpha x}\,dm(x) + \\ + e^{\alpha|\tau|}\int_{|\tau|}^\infty e^{-\alpha x}\,dm(x) - \frac{\beta e^{-\alpha|\tau|}}{1-\beta} - \frac{1-e^{-\alpha|\tau|}}{\alpha\vartheta}\Bigg]. \end{aligned} \tag{56}$$

Itt most $R(\tau)$ függ $m(t)$ speciális alakjától. Ha az alapul vett folyamat Poisson-féle, azaz $m(t) = t/\vartheta$, úgy

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \tag{57}$$

függetlenül a $H(x)$ eloszlásfüggvény speciális alakjától.

Ha az $\eta^*(t)$ folyamat $R(\tau)$ korrelációs függvénye ismeretes, úgy az $F(\omega)$ spektrális eloszlásfüggvénye is meghatározható A. JA. HINCSIN [3] tétele alapján, amely szerint fennáll:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^\infty \cos\omega\tau\,dF(\omega). \tag{58}$$

Ha speciálisan $R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$, úgy

$$F'(\omega)=\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}. \tag{59}$$

Az $F(\omega)$ spektrális eloszlásfüggvény fizikai jelentéséről még szólnunk kell néhány szót. Ezt legjobban a következő példán szemléltethetjük. Ha $\eta^*(t)$-t áramnak tekintjük és egységnyi ellenálláson vezetjük keresztül, úgy a leadott átlagteljesítmény

$$\lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{T}\int_0^T(\eta^*(t))^2dt\right\}=M^2+D^2 \tag{60}$$

és ennek a $(0,\omega)$ frekvenciasávra eső része $M^2+D^2[F(\omega)-F(-\omega)]$. (Itt ω körfrekvenciát jelent, azaz $\omega=2\pi f$, ahol f a közönséges frekvenciát jelöli.)

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] Takács L., Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól. *MTA III. Oszt. Közl.*, 4 (1954), 473—504.

[2] Takács L., Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. *MTA III. Oszt. Közl.*, 4 (1954), 571—587.

[3] A. Khintchine, Korrelationstheorie der stationär stochastischen Prozesse. *Math. Annalen* **109** (1934), 604—610.

[4] D. Blackwell, A renewall theorem. *Duke Math. Journ.* **15** (1948), 145—151.

[5] J. L. Doob, Renewal theory from the point of view of the theory of probability. *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 422—438.

[6] N. Campbell, The study of discontinuous phenomena. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* **15** (1909), 117—137.

[7] N. Campbell, Discontinuities in light emission. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **15** (1909), 310—328.

[8] E. N. Rowland, The theory of the mean square variation of a function formed by adding known functions with random phases, and applications to the theories of the shot effect and of light. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32** (1936), 580—597.

[9] A. Khintchine, Theorie des abklingenden Spontaneffektes. *Bull. Acad. Sci. URSS Ser. Math.* 3 (1938), 312—323; *Zentralblatt für Math.*, **19** (1939), 224.

[10] S. O. Rice, Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell. System Technical Journal*, **23** (1944), 282—332; 24 (1945), 45—156.