KÖRSZERŰ TARTOMÁNYOK KONFORM LEKÉPEZÉSÉRŐL

KŐVÁRI TAMÁS

1. FRÈCHET-től származik két görbe eltérésének következő definíciója: legyen C_1, C_2 két zárt Jordan görbe, és $Q = \varphi(P)$ a C_1-nek, a C_2-re való kölcsönösen egyértelmű, folytonos leképezése. Legyen d_φ a $\varphi(P)$ és P pontok távolságának maximuma, ha P befutja a C_1 görbét. Tekintsük az összes fenti tulajdonságú $\varphi(P)$ leképezéseket. Ekkor a

$$d(C_1, C_2) = \inf d_\varphi$$

számot a C_1 és C_2 görbék „eltérésé"-nek nevezzük.

Legyen $z^* = g_n(z)$ a C_1 görbe belsejét a $C_2^{(n)}$ görbe belsejére konform leképező analitikus függvény, amely egy belső pontot és egy azon átmenő irányt fixen hagy. Minthogy nyilvánvalóan

$$d(C_1, C_2^{(n)}) \leqq \max_{z \in C_1} |g_n(z) - z|$$

tehát ahhoz, hogy $g_n(z)$ a C_1 görbe által határolt, zárt tartományban egyenletesen konvergáljon z-hez, szükséges, hogy

$$\lim_{n=\infty} d(C_1, C_2^{(n)}) = 0$$

legyen. RADÓ kimutatta (Acta litterarum ac stientiarum, Szeged 1.), hogy az előbbi feltétel egyúttal elégséges is.

A jelen cikkben azt vizsgáljuk, hogyan lehet pontos becsléssé élesíteni Radó tételét, ha feltesszük, hogy a C_1 görbe analitikus. A következő tételt fogjuk bizonyítani:

I. TÉTEL. *Legyen C_1 egy zárt analitikus görbe, C_2 egy hozzá — Frèchet-féle értelemben — közeli zárt Jordan görbe. Legyen a két görbe Frèchet-féle eltérése:*

$$d(C_1, C_2) = \varepsilon.$$

Legyen $z^* = g(z)$ a C_1 görbe belsejét a C_2 görbe belsejére konform leképező analitikus függvény, amely egy belső z_0 pontot, s egy azon átmenő irányt fixen tart. Ekkor

$$|g(z) - z| < A\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}, \tag{*}$$

ahol A csak a C_1 görbétől függő állandó. Ez a becslés nem javítható, tehát $\log \frac{1}{\varepsilon}$ nem helyettesíthető $\frac{1}{\varepsilon}$ semmilyen lassabban növekvő függvényével.

A I. tétel általánosítja L. BIEBERBACH* és S. E. WARSHAWSKI** idevágó eredményeit, bár az utóbbi eredményeit nem tartalmazza. Mindketten ugyanis a C_2 görbére további erős megszorításokat tesznek, amelyek, mint a I. tétel mutatja, nem szükségesek ahhoz, hogy $g(z)-z$ kicsi legyen.

2. Először, szemléletesség kedvéért a következő gyengébb tételt bizonyítjuk:

II. TÉTEL. *Legyen C_1 egy az origóra csillagszerű, zárt Jordan görbe, amely az*

$$1-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon$$

körgyűrűben fekszik. Legyen $z=f(\zeta)$ a $|\zeta|<1$-et a C belsejére konform leképező függvény, amely az

$$f(0)=0; \quad f'(0)>0$$

módon van normálva. Ekkor $|\zeta|\leqq 1$-ben, ha ε elég kicsi

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}-1\right|<13\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Az eredmény pontos, az állandótól eltekintve, nem javítható.

BIZONYÍTÁS. Minthogy C Jordan görbe, ismert tétel alapján $f(\zeta)$ (illetve inverze) folytonos a $|\zeta|\leqq 1$-ben (illetve a C által határolt zárt tartományban). A feltevés alapján $|\zeta|=1$-en:

$$1-\varepsilon<\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|<1+\varepsilon.$$

RIESZ M. ismert tétele alapján, ha $u+iv$ a $|\zeta|\leqq 1$-ben reguláris, és $u(0)=0$,

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} u^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq 2p\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} v^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

A tételt alkalmazzuk $i\log\frac{f(\zeta)}{\zeta}$ azon $|\zeta|\leqq 1$-ben egyértékű, reguláris ágára, amelyre $\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|_{\zeta=0}=\log f'(0)$ valós ($f(\zeta)$ schlichtsége miatt ugyanis $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$-nak $|\zeta|\leqq 1$-ben nincs zérushelye). Ekkor nyerjük, hogy

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\arg\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right)^{2n}d\varphi\right\}^{\frac{1}{2n}}\leqq 4n\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\log^{2n}|f(\zeta)|\,d\varphi\right\}^{\frac{1}{2n}}.$$

* „Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche" *Sitzungsberichte der Preussischen Akadémie der Wissenschaften*, 1924. A cikk egyébként — egy hibás példára támaszkodva — azt a téves állítást is tartalmazza, hogy a (*) formula jobboldalán nem állhat ε-nak $^1/_2$-nél magasabb hatványa.

** On conformal mapping nearly circular region. *Proceedings of American Mathematical Society* 1950.

Tehát $\arg f(e^{i\varphi}) = \vartheta(\varphi)$; $\psi(\varphi) = \vartheta(\varphi) - \varphi$ jelöléssel, figyelembe véve, hogy $\varepsilon < \varepsilon_0$-ra

$$-\frac{5}{4}\varepsilon < \log(1-\varepsilon) < \log|f(\zeta)| < \log(1+\varepsilon) < \varepsilon$$

fennáll a

I. LEMMA:

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \psi^{2n}(\varphi)\,d\varphi\right\}^{\frac{1}{2n}} \leqq 5n\varepsilon.$$

Minthogy a csillagszerűség miatt $\varphi_2 > \varphi_1$ esetén $\vartheta(\varphi_2) \geqq \vartheta(\varphi_1)$, innen adódik a

II. LEMMA: $\varphi_1 < \varphi_2$ esetén

$$\psi(\varphi_2) - \psi(\varphi_1) \geqq -(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Végül fennáll a

III. LEMMA:

$$|\psi| < 12\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Érje el ugyanis $|\psi|$ a φ_0 pontban maximumát. Legyen $\psi(\varphi_0) = \delta > 0$ (a $\psi(\varphi_0) < 0$ eset hasonló módon tárgyalható.) A II. lemma alapján

$$\psi(\varphi_0 + t) > \psi(\varphi_0) - t = \delta - t.$$

Tehát

$$\int_0^{2\pi} \psi^{2n}\,d\varphi > \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\delta} \psi^{2n}\,d\varphi > \int_0^{\delta} (\delta - t)^{2n}\,dt = \frac{\delta^{2n+1}}{2n+1}.$$

Tehát a I. lemma alapján

$$\frac{1}{2\pi(2n+1)}\,\delta^{2n+1} \leqq (5n\varepsilon)^{2n}$$

$$\delta = \max|\psi| \leqq \sqrt[2n+1]{2\pi(2n+1)}\,5n\cdot\varepsilon^{1-\frac{1}{2n+1}} < 6n\varepsilon^{1-\frac{1}{2n+1}}$$

ha $n > n_0$. Legyen $n = \left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Ekkor $\varepsilon < \varepsilon_0$-*ra*

$$\max|\psi| < 7\log\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot e^{\log\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]+3}} < 7\sqrt{e}\,\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon} < 12\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon},$$

amivel a III. lemmát igazoltuk.

A III. lemmából azonnal adódik a tételünk, hiszen $|\zeta| = 1$-en

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta} - 1\right| = \left||f(e^{i\varphi})|e^{i\psi} - 1\right| < \varepsilon + |\psi| < 13\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$$

és $|\zeta| \leqq 1$-re ugyanez, a maximum elvből adódik.

Hogy a II. tétel (és vele a I. tétel) nem javítható, azt a következő egyszerű példa mutatja:

$$f(\zeta)=\zeta\left\{1+\frac{\varepsilon i}{2}\log\frac{1}{1+\varepsilon-\zeta}\right\},$$

ahol a logaritmus azon ágáról van szó, amely $0<\zeta<1$-re valós. Ugyanis $|\zeta|\leqq 1$-ben

$$\operatorname{Re}\left(\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)=\operatorname{Re}\left\{\frac{\varepsilon i}{2}\frac{\zeta}{1+\varepsilon-\zeta}\frac{1}{1+\frac{\varepsilon i}{2}\log\frac{1}{1+\varepsilon-\zeta}}\right\}\geqq$$

$$\geqq 1-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\pi}{4}\right)}>0$$

miatt a $|\zeta|=1$ képe csillagszerű, és ezért $f(\zeta)$ a $|\zeta|\leqq 1$-ben schlicht. Továbbá $|\zeta|=1$-re:

$$|f(\zeta)|^2=\left|1+\frac{\varepsilon i}{2}\log\frac{1}{1+\varepsilon-\zeta}\right|^2=\left\{1+\frac{\varepsilon}{2}\arg(1+\varepsilon-\zeta)\right\}^2+\frac{\varepsilon^2}{4}\log^2\frac{1}{(1+\varepsilon-\zeta)}=$$

$$=1+\varepsilon\arg(1+\varepsilon-\zeta)+\frac{\varepsilon^2}{4}\left\{\arg^2(1+\varepsilon-\zeta)+\log^2\frac{1}{(1+\varepsilon-\zeta)}\right\}$$

$$\big||f(\zeta)|-1\big|\leqq\big||f(\zeta)|^2-1\big|\leqq\varepsilon\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon^2}{4}\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\log^2\frac{1}{\varepsilon}\right\}<\varepsilon,\text{ ha } \varepsilon<\varepsilon_0.$$

Másrészt

$$|f(1)-1|=\frac{\varepsilon}{2}\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Most rátérünk a I. tétel azon speciális esetének bizonyítására, amikor a C_1 görbe kör. Ugyanis az általános eset erre redukálható.

III. TÉTEL: *Legyen K az egységkör, C egy hozzá — Frèchet-féle értelemben — közeli zárt Jordan görbe. Legyen*

$$d(K,C)=\varepsilon.$$

Legyen $z=f(\zeta)$ a II. tételben definiált függvény. Ekkor a II. tétel állítása változatlanul érvényes.

A feltevés alapján egyfelől a K egységkör pontjai $(K: z=e^{i\theta})$, másfelől a C pontjai között megadható egy olyan

$$z=e^{i\theta}\rightarrow z(\theta)\in C$$

kölcsönösen egyértelmű, folytonos megfeleltetés, hogy a megfelelő pontok távolságai kisebbek 1,01 ε-nál, azaz

$$|z(\theta)-e^{i\theta}|<1{,}01\,\varepsilon.$$

A bizonyítás teljesen hasonlóan fut a II. tételéhez, csupán a II. lemmát kell a gyengített feltételeknek megfelelően a következővel helyettesíteni:

II.* LEMMA: $\varphi_1 < \varphi_2$-re

$$\psi(\varphi_2)-\psi(\varphi_1) > -(\varphi_2-\varphi_1)-9\varepsilon.$$

Legyen ugyanis $z_1 = e^{i\theta_1}$ ill. $z_2 = e^{i\theta_2}$ a $z_1 = f(e^{i\varphi_1}) = r_1 e^{i\vartheta_1}$, ill. $z_2 = f(e^{i\varphi_2}) = r_2 e^{i\vartheta_2}$-nek megfelelő pontok ($z_1 = z(\theta_1)$, $z_2 = z(\theta_2)$). A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű és folytonos, tehát monoton és így $\theta_2 > \theta_1$. Másrészt

$$\underline{z}_1 - z_1 = e^{i\theta_1} - r_1 e^{i\vartheta_1} = (e^{i\theta_1} - e^{i\vartheta_1}) + e^{i\vartheta_1}(1-r_1),$$

ahonnan

$$|\theta_1 - \vartheta_1| < 2|e^{i\theta_1} - e^{i\vartheta_1}| < 2|z_1 - z_1| + 2|1-\pi_1| < 4{,}04\,\varepsilon.$$

Ugyanígy

$$|\theta_2 - \vartheta_2| < 4{,}04\,\varepsilon.$$

Tehát valóban

$$\psi(\varphi_2)-\psi(\varphi_1) = \vartheta_2 - \varphi_2 - \vartheta_1 + \varphi_1 > (\theta_2 - 4{,}1\,\varepsilon) - (\theta_1 + 4{,}1\,\varepsilon) - (\varphi_2-\varphi_1) >$$
$$> -(\varphi_2-\varphi_1) - 9\varepsilon.$$

A III. lemma ebből nehézség nélkül nyerhető, hiszen a levezetésében csupán annyi változik, hogy δ helyébe $\delta - 9\varepsilon$ lép.

3. Most már aránylag egyszerűen bizonyíthatjuk a I. tételt. Legyen a C_1, illetve C_2 görbe paraméteres egyenlete: $z(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1, z(0) = z(1))$, illetve $\bar{z}(t)$. A feltevés alapján a két görbe pontjai között megadható egy olyan kölcsönösen egyértelmű, folytonos megfeleltetés, hogy a megfelelő pontok távolságai kisebbek $1{,}01\,\varepsilon$-nál. A paraméter megválasztható úgy, hogy a megfelelő pontok azonos paraméter értékhez tartozzanak. Legyen $z = f(\zeta)$; $\bar{z} = \bar{f}(\zeta)$ a $|\zeta| < 1$-et a C_1, illetve C_2 belsejére konform leképező függvények, amelyek az

$$f(0) = z_0, \quad f'(0) > 0$$
$$\bar{f}(0) = z_0, \quad \bar{f}'(0) > 0$$

módon vannak normálva.

Minthogy C_1 analitikus, $z = f(\zeta)$ analitikusan folytatható az egységkörön keresztül. $f'(\zeta)$-nak sem $|\zeta| < 1$-ben nem lehet gyöke, mert itt $f(\zeta)$ schlicht, sem a $|\zeta| = 1$-en, mert ennek C_1 képe analitikus. Tehát van egy olyan $|\zeta| \leqq 1 + \eta$ zárt körlemez $(\eta > 0)$, amelyben $f'(\zeta) \neq 0$ és így

$$0 < m \leqq |f'(\zeta)| \leqq M.$$

Ha ε elég kicsi, C_2 teljesen benne fekszik az $f((1+\eta)e^{i\varphi})$ görbe által határolt tartományban. Legyen

$$\zeta(t) = f^{-1}(z(t)), \ (|\zeta(t)| = 1); \quad \text{és} \quad \bar{\Gamma}\ a: \bar{\zeta}(t) = f^{-1}(\bar{z}(t))$$

görbe. Ekkor

$$|\bar{\zeta}(t) - \zeta(t)| \leqq |\bar{z}(t) - z(t)| \max \left| \frac{d}{dz} f^{-1}(z) \right| \leqq 1{,}01 \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon_1.$$

Tehát a III. tételt a $C = \bar{\Gamma}$ görbére alkalmazva:

$$|f^{-1}(\bar{f}(\zeta)) - \zeta| < 14 \frac{\varepsilon}{m} \log \frac{m}{1{,}01\,\varepsilon} < 15 \frac{\varepsilon}{m} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

ha $\varepsilon < \varepsilon_0$, és $|\zeta| < 1$

$$|\bar{f}(\zeta) - f(\zeta)| < \max |f'(\zeta)| f^{-1}(\bar{f}(\zeta)) - \zeta| < 15 \frac{M}{m} \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$$

$\zeta = f^{-1}(z)$-t helyettesítve és figyelembe véve, hogy $\bar{f}(f^{-1}(z)) = g(z)$, nyerjük, hogy a C görbe belsejében:

$$|g(z) - z| < 15 \frac{M}{m} \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{ha } \varepsilon < \varepsilon_0$$

amivel a I. tételt bebizonyítottuk.

4. A I. tételt kiegészítik a következő tételek:

IV. TÉTEL: *A I. tétel érvényben marad, ha C_1-től csak a simaságot követeljük meg, viszont C_2-ről feltesszük, hogy a C_1 belsejében van.*

V. TÉTEL: *Ha a IV. tételben C_1-ről csak szakaszonként simaságot tételezünk fel, akkor is állítható, hogy*

$$|g(z) - z| < B\varepsilon^{\delta},$$

ahol B és $\delta > 0$ csak a C_1-től függő állandók. Ez utóbbi két tétel bizonyítása elég természetes, ezért nem részletezzük.