MATEMATIKA

A Nagy Szovjet Enciklopédia cikke

TARTALOM

I. A MATEMATIKA TÁRGYA; KAPCSOLATA MÁS TUDOMÁNYOKKAL ÉS A TECHNIKÁVAL

A matematika (görögül *ματηματιχη*, a *ματημα* — *ismeret, tudomány* szóból) a valóságos világ mennyiségi vonatkozásainak és térformáinak tudománya.

„A tiszta matematikának tárgyát a valóságos világ térformái és mennyiségi viszonylatai, tehát nagyon reális anyag alkotja. Hogy ez az anyag felette elvont alakban jelenik meg, az csak felületesen fedheti el a külső világból való eredetét. De hogy ezeket az alakokat és viszonylatokat a maguk tisztaságában vizsgálhassuk, teljesen el kell őket választanunk tartalmuktól és ezt, mint közömböst, félre kell tennünk..." (*Engels,* Anti-Dühring, Szikra-kiadás, Budapest, 1950, 39. o.). A matematika absztrakt volta azonban nem jelenti az anyagi valóságtól való elszakadását. A technika és a természettudomány kérdéseivel való szakadatlan kapcsolatban a matematika által vizsgált mennyiségi vonatkozások és térformák köre állandóan szélesedik, úgyhogy a matematika fenti definíciója mind gazdagabb tartalmat nyer. (L. erről alább, különösen a III. részt: A modern matematika.)

A matematika és a többi tudomány. A matematika alkalmazásai igen sokfélék. Elvileg a matematikai módszer alkalmazási köre korlátlan: az anyag mozgásának minden formája vizsgálható matematikailag. A matematikai módszer szerepe és jelentősége azonban a különböző esetekben különböző. A valóságos jelenségek teljes konkrétságát semmilyen meghatározott matematikai szkéma nem meríti ki teljesen; ennélfogva a konkrét jelenség megismerése során mindig két ellentétes tendencia harcol egymással: az egyik a vizsgált jelenségek formájának elkülönítése és e forma logikai analízise, a másik a megállapított formába bele nem férő mozzanatok feltárása és áttérés új, rugalmasabb, a jelenséget jobban átfogó formákra. Ha a jelenségek valamely körének vizsgálata alkalmával minden nehézség a második tendencia megvalósításában rejlik, minden lépés a jelenségek egy-egy minőségileg új oldalának figyelembevételével kapcsolatos, akkor a matematikai módszer háttérbe szorul; ebben az esetben a matematikai szkematizálás csak elhomályosíthatja a jelenségnek teljesen konkrét valóságban való dialektikus elemzését. Ha viszont a szóban forgó jelenséget annak viszonylag egyszerű és állandó alapvető formái nagy pontossággal és kielégítő teljességgel leírják, e rögzített formák keretén belül azonban már elég nehéz és bonyolult, speciális matematikai vizsgálatot, így különleges szimbolikus írásmódot és különleges megoldási algoritmust követelő problémák merülnek fel, akkor a matematikai módszer lesz az uralkodó.

A matematikai módszer hegemóniájának tipikus példája az égi mechanika,[1] s ezen belül a bolygók mozgásának tana. Az általános tömegvonzás matematikailag igen egyszerűen kifejezhető törvénye az idevágó jelenségeket majdnem teljesen meghatározza. Az általunk végezhető megfigyelések pontosságát tekintve — a Hold mozgását leíró elmélet kivételével — az égitestek „anyagi pontok"-kal helyettesíthetők, alakjuk és nagyságuk elhanyagolható. Az ily módon kapott probléma (n anyagi pontnak a tömegvonzás által keltett erők hatása alatt végzett mozgását leírni) megoldása már az $n=3$ esetben óriási nehézségekbe ütközik. Minden, e szkéma matematikai elemzése útján kapott eredmény viszont rendkívüli pontossággal teljesül a valóságban: a logikailag igen egyszerű szkéma jól tükrözi a jelenségek adott körét — a nehézségek mind a szkéma matematikai következményeinek levezetésével kapcsolatosak.

[1] L. az Enciklopédia Небесная механика c. cikkét.

A mechanikáról a fizikára áttérve a matematikai módszer szerepe még alig csökken, alkalmazásának nehézségei ellenben jelentékenyen megnövekednek. A fizikának úgyszólván nincs olyan területe, amely ne követelné meg igen fejlett matematikai apparátus alkalmazását; az alapvető nehézség azonban itt gyakran nem a matematikai elmélet kidolgozásában van, hanem az ehhez kiindulópontul szolgáló alapfeltevések megválasztásában és a matematikai úton kapott eredmények értelmezésében. Ebben az értelemben a modern kvantumfizika,[2] annak ellenére, hogy mélyreható, sajátos matematikai apparátust használ, kevésbé nevezhető a matematikai módszer uralkodási területének, mint a klasszikus fizika egyes részei (a klasszikus termodinamika, a klasszikus elektromosságtan stb.).

Több fizikai elmélet példáján megfigyelhető a matematikai módszernek az a képessége, hogy meg tudja ragadni még magát azt a folyamatot is, amikor a valóság megismerése egy következő magasabb, minőségileg új színtre emelkedik.

Klasszikus példa erre a diffúzió makroszkopikus, a diffundáló anyagot folytonos eloszlásúnak tekintő elméletének a statisztikus diffúzióelmélethez való viszonya, amely a diffundáló anyag egyes részecskéinek mozgásából indul ki. Az első elméletben a diffundáló anyag sűrűsége kielégít egy meghatározott parciális differenciálegyenletet. A diffúzióra vonatkozó különböző problémák megoldása e differenciálegyenlet megfelelő perem- és kezdeti feltételeket kielégítő megoldásainak meghatározására vezetődik vissza. A diffuzió folytonos elmélete igen nagy pontossággal visszaadja a jelenség valódi lefolyását, amíg a folyamatot a számunkra megszokott (makroszkopikus) térbeli és időbeli méretekben tekintjük. Kis térrészekre azonban (olyanokra, amelyek a diffundáló anyagnak csak kevés számú részecskéjét tartalmazzák) maga a sűrűség fogalma elveszíti határozott értelmét. A diffúzió statisztikus elmélete a diffundáló részecskéknek a diffundáló anyag molekuláitól származó lökések hatása alatti mikroszkopikus véletlen elmozdulásaiból indul ki. E mikroszkopikus elmozdulások pontos kvantitatív törvényszerűségeit nem ismerjük. A matematikai valószínűségszámítás azonban (azokból az általános feltevésekből kiindulva, hogy kicsiny időközök alatti elmozdulások is kicsinyek, és hogy egy részecske két egymásutáni időköz alatti elmozdulásai függetlenek egymástól) lehetővé teszi meghatározott kvantitatív következtetések levonását nagy (makroszkopikus) időközökre (megközelítőleg) meg tudjuk határozni a részecskék elmozdulásainak valószínűségi eloszlását. Mivel a diffundáló anyag részecskéinek száma igen nagy, az egyes részecskék elmozdulásainak valószínűségeloszlásai — feltéve, hogy az egyes részecskék elmozdulásai egymástól függetlenek — a diffundáló anyag egészének mozgására vonatkozólag teljesen határozott, már nem véletlen jellegű törvényszerűségekre vezetnek: ugyanazokra a differenciálegyenletekre, amelyeken a folytonos diffúzióelmélet alapul.

Ez a példa elég tipikus abban az értelemben, hogy véletlen jelenségek statisztikája segítségével a törvényszerűségek egyfajta körének (a példában: a diffundáló anyag egyes részecskéi mozgási törvényeinek) talaján gyakran keletkeznek más, minőségileg újfajta törvényszerűségek (a példában: a folytonos diffúzióelmélet differenciálegyenletei).

A biológiai tudományokban a matematikai módszer alárendelt szerepet játszik. Ha sikerül is biológiai jelenségek lefolyását matematikai képletekkel leírni, e képletek alkalmazhatósági köre igen korlátozott marad, a megfelelő

[2] L. az Enciklopédia Квантовая механика és Квантовая электродинамика c. cikkeit.

jelenségek valóságos menetét csak durván közelíti meg. Ennek magyarázata nem az, hogy a biológiai jelenségeket elvileg lehetetlen volna matematikailag vizsgálni, hanem az, hogy a biológiai jelenségek minőségileg igen sokfélék.

Még inkább átadja a helyét a matematikai módszer a jelenségek közvetlen, teljes konkrét bonyolultságukban való elemzésének a társadalomtudományokban. Itt különösen nagy annak a veszélye, hogy a jelenségek lefolyásának formáját absztrahálva figyelmen kívül hagyjuk olyan minőségileg új mozzanatok felhalmozódását, amelyek az egész folyamatnak döntően más irányt adnak. A társadalomtudományokban — ugyanúgy, mint a biológiában — a matematikának, mint segédtudománynak — matematikai statisztika — lényeges jelentősége marad. A társadalmi jelenségek végső elemzésében azonban a minőségileg sajátos mozzanatok minden egyes történelmi korszakban annyira uralkodóak, hogy a matematikai módszer háttérbe szorul.

A matematika és a technika. Az aritmetika és a geometria elemei, mint az az alábbi történeti áttekintésből látható, közvetlenül a gyakorlat által felvetett problémákból keletkeztek: később pedig a matematika új módszereinek és alapvető gondolatainak keletkezése a matematikai természettudományok (csillagászat, mechanika, fizika stb.) hatása alatt történik, amelyeknek fejlődése viszont ugyancsak a gyakorlat által felvetett problémákra vezethető vissza. A matematikának a technikával való *közvetlen* kapcsolata leginkább abban áll, hogy a már kész matematikai elméleteket alkalmazzák technikai problémák megoldására. Vannak azonban példák arra is, hogy új általános matematikai elméletek keletkezése közvetlenül a technikában felmerült feladatokra vezethető vissza. A legkisebb négyzetek módszere geodéziai munkák kapcsán keletkezett; sok új parciális differenciálegyenlet-típust technikai problémák kapcsán kezdtek először vizsgálni; a differenciálegyenletek megoldásának operátoros módszerei az elektrotechnika talaján nőttek ki, és így tovább. Legújabban elektrotechnikai problémák nyomán a valószínűségszámítás új fejezete jött létre: az információelmélet. A regulátorok és digitális matematikai gépek konstrukcióproblémái az algebra új részeinek kifejlődésére vezettek. Főként technikai szükségletek hatására keletkezett az ábrázoló geometria és a nomográfia. A differenciálegyenletek közelítő megoldási módszereinek fejlődésében az asztronómia szükségségletei mellett technikai problémák játszottak döntő szerepet. A parciális differenciálegyenletek és az integrálegyenletek közelítő megoldásának sok módszere tisztán a technikának köszönheti létrejöttét. A technikai problémák bonyolultabbá válása mind élesebben megköveteli, hogy a numerikus megoldások ténylegesen gyorsan megkaphatók legyenek. A numerikus számítás technikájával szemben egyébként az elméleti tudományok is mind nagyobb követelményeket támasztanak; ez még a természettudomány olyan fiatal ágaira is vonatkozik, mint amilyen pl. a geofizika. Ennek következtében a matematikai problémák numerikus megoldásának gépesítése mind nagyobb jelentőséghez jut. Itt maga a technika siet segítségére a matematikának: közvetlenül a számológépek, planiméterek és integráfok után megjelennek a harmonikus analizátorok, a differenciálegyenletek, lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldására szolgáló integrátorok és egyéb, különféle matematikai problémákat megoldó gépek. Minden ilyen gép csak a problémák szigorúan meghatározott körének megoldására alkalmas; új feladattípusok megoldására szolgáló új gépek szerkesztése csak tervszerű tudományos munkával lehetséges. A gépi számítás technikája a tudományos kutatás hatalmas segédeszköze.

II. A MATEMATIKA TÖRTÉNETE A XIX. SZÁZADIG

Az, hogy a matematika külön önálló tudomány, amelynek megvan a saját tárgya és módszere, csak megfelelő mennyiségű konkrét anyag felhalmozódása után válhatott tudatossá. Ez először az ókori Görögországban, az i. e. VI—V. században következett be. A matematika fejlődésének eddig tartó szakaszát a matematika keletkezési korszakának tekintjük, az i. e. VI—V. évszázadra tehetjük az elemi matematika korszakának kezdetét. E két időszak alatt a matematikai kutatás csaknem teljesen annak az igen csekély számú alapvető fogalomnak a területére szorítkozik, amely még a történelmi fejlődés igen korai szakaszain keletkezett és a gazdasági élet legegyszerűbb fogalmaival kapcsolatos, mint például: tárgyak megszámlálása, termékek mennyiségének, földdarabok területének megmérése, épületrészek méreteinek meghatározása, időmérés, kereskedelmi számítások stb. A mechanika és a fizika első lépései számára [Archimedes görög tudós (i. e. III. sz.) egyes, az infinitezimális számítás elemeinek ismeretét megkövetelő vizsgálataitól eltekintve] a matematikai alapfogalmak ez a csekély készlete még elegendő lehetett. Az egyetlen olyan tudomány, amely hosszú idővel a természeti jelenségek matematikai vizsgálatának XVII—XVIII. századbeli nagyarányú kibontakozása előtt sajátos, igen nagy követelményeket támasztott a matematikával szemben, a csillagászat volt; ez feltételezi — többek között — a trigonometria előzetes kifejlődését. Az általános és középiskolában tanított „elemi matematika" alapját máig is az a fogalomkészlet alkotja, amellyel a matematika a XVII. század elejéig dolgozott.

A XVII. században a természettudomány és a technika újonnan felmerült problémái arra késztetik a matematikusokat, hogy figyelmüket olyan új módszerek megalkotására összpontosítsák, amelyeknek segítségével a mozgás, a mennyiségek változásának folyamatai, a geometriai idomok transzformációi (vetítés stb. útján) matematikailag vizsgálhatók. A változó mennyiségeknek az analitikus geometriában való alkalmazásával (DESCARTES) és a differenciál- és integrálszámítás megteremtésével kezdetét veszi a változó mennyiségek matematikájának korszaka, amelyet — megállapodásszerű szóhasználattal — a „felsőbb matematika" korszakának is nevezhetünk. Egyébként természetesen sem ekkor, sem később nem állt meg az elemi matematika továbbfejlődése sem.

A matematika által vizsgált mennyiségi vonatkozások és térformák körének további bővülése folytán a XIX. század elején szükségessé vált, hogy a matematikusok tudatosítsák ezt a folyamatot és feladatul tűzzék maguk elé a mennyiségi vonatkozások és térformák eléggé általános szempontból tekintett lehetséges típusainak vizsgálatát. Ennek az iránynak első jelentős eredménye LOBACSEVSZKIJ orosz matematikus (később teljesen reális alkalmazást nyert) „elképzelt geometriá"-jának a felfedezése volt. Az ilyen jellegű vizsgálatok a matematika egész felépítésének olyan jelentős új vonásokat adtak, hogy a matematikában a XIX. és a XX. századot joggal tekinthetjük külön korszaknak, a modern matematika korszakának.

1. A matematika keletkezése

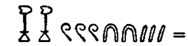
A tárgyak megszámlálása kapcsán a természetes számok aritmetikájának alapfogalmait már a művelődés legalsó fokain megalkotta az emberiség. Csupán a szóbeli számolás[3] már kidolgozott rendszere alapján keletkeztek a számolás írásbeli rendszerei és dolgozták ki a természetes számokkal való alapműveletek módszerét (az osztás elvégzése itt még sokáig nagy nehézségeket okozott). A mérés (gabona mennyisége, út hosszúsága stb.) szükségletei folytán megjelent a legegyszerűbb törtszámok neve és jelölése és kidolgozták a törtekkel való aritmetikai műveletek módszereit. Így halmozódott fel az az anyag, amelyből lassanként megszületett a legrégibb matematikai tudomány, az *aritmetika*.[4] A terület- és térfogatmérés, az építéstechnika szükségletei, később pedig a csillagászat a *geometria*[5] elemeinek megalkotására vezetnek. Mindez sok népnél legnagyobbrészt egymástól függetlenül, párhuzamosan történt. A további fejlődés szempontjából különös jelentőségű volt a matematikai ismereteknek Egyiptomban és Babilóniában való felhalmozódása. Babilóniában az aritmetikai számítások fejlett technikájának alapján megjelentek az algebra, a csillagászat problémái kapcsán pedig a trigonometria elemei is.

Egyiptom. Az ókori Egyiptomból fennmaradt matematikai szövegek legnagyobbrészt különálló feladatok megoldásának példáiból, vagy — legjobb esetben — a megoldásra szolgáló receptekből állnak; ezeket néha csak akkor lehet megérteni, ha elemezzük a szövegekben előforduló numerikus példákat. Azért kell különálló feladattípusok megoldására szolgáló receptekről beszélnünk, mert matematikai elmélet, amely általános tételek bizonyításait tartalmazta volna — úgy látszik, egyáltalán nem volt. Erre mutat például az, hogy a pontos és a közelítő megoldások egyformán voltak használatosak, anélkül, hogy bármi különbséget tettek volna köztük. Mindazonáltal az általuk ismert matematikai tények száma a magasszínvonalú építéstechnikának, a bonyolult földbirtokviszonyoknak, a pontos naptár

[3] L. az Enciklopédia Счисление c. cikkét.
[4] L. az Enciklopédia Аритметика c. cikkét.
[5] L. az Enciklopédia Геометрия c. cikkét.

szükségletének stb. megfelelőleg elég nagy volt. Az időszámításunk előtti második évezred első feléből fennmaradt papíruszok alapján az egyiptomi matematika akkori állapota a következőkkel jellemezhető:

Miután az egész számokkal való műveletek nehézségein már túljutottak (az e célra használt számrendszert a

 = 2323.

példa mutatja), a törtekkel való műveletekre megalkottak egy sajátságos, elég bonyolult, speciális kisegítő táblázatokat igénylő apparátust. Rendszeresen oldottak meg ismeretlen számok meghatározását kívánó feladatokat; az ilyeneket ma egyismeretlenes egyenletek alakjában írnánk fel. A geometria lényegében terület- és köbtartalomszámítási szabályokból állott. Helyesen ki tudták számítani a háromszög és a trapéz területét, a parallelepipedon és a négyzetalapú gúla köbtartalmát. Az egyiptomiak általunk ismert legmagasabb vívmánya ezen a téren a négyzetalapú csonkagúla mai írásmóddal

$$v = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

alakban kifejezhető köbtartalomképletének felfedezése volt. A kör területének és a henger, valamint a kúp köbtartalmának kiszámítására általuk használt szabályokban néha az igen durván közelítő $\pi = 3$, néha a jóval pontosabb $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$ érték szerepel.

Babilónia. Innen összehasonlíthatatlanul több, a matematikai fejlődés fokára következtetni engedő szöveg maradt fenn, mint Egyiptomból. A babilóniai *ékírású matematikai szövegek*[7] az időszámításunk előtti második évezredtől (a Hammurapi és a Kasszita-dinasztia korszaka) a görög matematika keletkezéséig és kifejlődéséig terjedő időszakot ölelik fel. De már a legelső ilyen szövegek a babilóniai matematika virágzásának korából valók; a későbbiek, néhány új mozzanat megjelenése ellenére is, egészükben inkább pangásról tanúskodnak. A Hammurapi-korszak Babilóniájában a vegyes tízes-hatvanas számrendszert használták, mely még a sumér korszakban fejlődött ki; ez a számrendszer már felhasználja a helyi érték elvét (ugyanazok a számjegyek ugyanannyi számú különböző 60-as számrendszerbeli helyi értéket jelentenek). Pl.

 $= 34 \cdot 60 + 25 = 2065.$

Hasonlóan jelölték a „hatvanadostörteket“ is. Ennélfogva az egész számokkal és a „hatvanadostörtekkel“ való műveleteket egyfajta szabályok szerint végezhették. Az osztást reciprok érték-táblázatok segítségével szorzásra vezették vissza. Későbbi szövegekben a reciprok értékek kiszámítását nyolc hatvanasszámrendszerbeli számjegyig végzik el. A reciprok értékek táblázatán kívül fennmaradtak még szorzótáblák, négyzet-, négyzetgyök- és köbgyöktáblázatok is. Sok gazdasági irat arról tanúskodik, hogy mindezeket az eszközöket használták is az udvartartások és a templomok bonyolult gazdasági ügyeiben. Széleskörű fejlődésnek indult a százalékszámítás is kölcsönügyletek kapcsán. Fennmaradt a Hammurapi-dinasztia idejéből sok olyan feladatok megoldásával foglalkozó szöveg is, amelyek — mai szempontból nézve — első-, másod-, sőt harmadfokú egyenletekre vezetnek. Van olyan feltevés, amely szerint az ilyen elvontabb tudományos érdeklődés, amely nem szorítkozott a gyakorlatban közvetlenül felhasználható recepturára és a feladatok megoldása kapcsán

[6] L. az Enciklopédia Папирусы математические c. cikkét.
[7] L. az Enciklopédia Клинописные математические текстй c. cikkét.

általános algebrai módszerek alkotására vezetett, az „irnokiskolákban" keletkezett, ahol a tanítványokat a gazdasági életben szükséges számolásra, könyvelésre készítették elő. Az ilyen szövegek később eltűnnek. A többjegyű számokkal való számolás technikája azonban — a pontosabb csillagászati módszereknek az i. e. első évezredbeli kifejlődésével kapcsolatban — továbbfejlődik. A csillagászat talaján jönnek létre az empirikus úton kapott összefüggések első nagyobb terjedelmű táblázatai; ezeket a függvényfogalom első megjelenési formájának tekinthetjük. A babilóniai ékírásos klasszikus matematikai hagyományok továbbfolytatódnak Asszíriában, a perzsa államban, sőt még a hellenisztikus korszakban is egészen az i. e. I. századig. A babiloni matematikának a geometria terén az egyiptomiakét túlhaladó eredményei közül meg kell említenünk a szögmérés kidolgozását és a trigonometria egyes csíráit, amelyek nyilván az asztronómia fejlődésével kapcsolatosak. A babilóniaiak már ismerték a Pythagoras-tételt.

2. Az elemi matematika korszaka

Csupán nagymennyiségű konkrét anyag — különféle aritmetikai számítási módok, terület- és köbtartalomszámítási szabályok stb. — felhalmozódása után jön létre a matematika, mint önálló tudomány, amelynek sajátos módszere van, s melynek alapfogalmai és alaptételei kellő általánossággal, rendszeresen tárgyalandók. Az aritmetikát és algebrát illetően lehetséges, hogy ez a folyamat már Babiloniában megkezdődött. Teljes mértékben azonban az új irányzat az ókori Görögországban alakult ki, ahol ez a matematikai tudomány alapjainak rendszeres és logikailag következetes felépítésében érte el tetőpontját. Az elemi geometria tárgyalásának az ókori görögök által megalkotott rendszere kétezer évre a matematikai elmélet deduktív felépítésének mintaképévé lett. Az aritmetikából lassanként kinő a számelmélet.[8] Megalkotják a mennyiségek[9] és a mérés rendszerbe foglalt elméletét. A valós szám[10] fogalmának kialakítása (a mennyiségek mérésének problémájával kapcsolatosan), mint azt alább látni fogjuk, igen hosszadalmas folyamatnak bizonyult. Ennek oka abban rejlik, hogy az irracionális és a negatív szám fogalma azok közé a bonyolultabb matematikai absztrakciók közé tartozik, amelyek a természetes számmal kapcsolatos fogalmaktól eltérőleg — nem gyökereznek szilárdan a tudományos fokot még el nem érő általános emberi tapasztalatban. Kezdők ezeket a fogalmakat még ma is, amikor reális tartalmuk és gyakorlati használhatóságuk már általánosan el van ismerve, sokszor csak nehézségek árán, rendszeres iskolai oktatás eredményeként sajátítják el. Természetes tehát, hogy megalkotásuk az emberiségtől nagy erőfeszítéseket követelt.

Az *algebrá*nak[11] mint betűszámtannak a megteremtése csak az említett kétezeréves időszak végén fejeződik be. Az ismeretlenekre speciális

[8] L. az Enciklopédia Чисел теория c. cikkét.
[9] L. az Enciklopédia Величина c. cikkét.
[10] L. az Enciklopédia Число c. cikkét.
[11] L. az Enciklopédia Алгебра c. cikkét.

jelöléseket vezetett be már DIOPHANTOS görög matematikus (valószínűleg III. század); rendszeresebben jelenik meg ugyanez Indiában a VII. században. Az egyenletek együtthatóinak betűkkel való jelölését azonban csak a XVI. században vezette be F. VIÈTE francia matematikus.

A geodézia és a csillagászat fejlődése már korán a *trigonometria* (mind a sík-, mind a gömbi trigonometria) részletes kidolgozására vezetett.

Az elemi matematika korszaka akkor ér véget, amikor (Nyugat-Európában a XVII. század elején) a matematikai érdeklődés súlypontja átkerül a változó mennyiségek matematikájának területére. Nyilvánvaló, hogy ezt az eseményt a matematika megelőző fejlődésének kellett előkészítenie. Már az ókori világ matematikájában alakulóban volt a függvényfogalom a trigonometrikus függvények vizsgálata és értéktáblázataik összeállítása kapcsán. De például a 0-tól $+\infty$-ig változó szögargumentum és az ilyen argumentum trigonometrikus függvényeinek fogalma csak a XVI. században jelenik meg (VIÈTE-nél). Görög matematikusok (különösen ARCHIMEDES) már megközelítették a végtelen kis mennyiségek analízisének alapgondolatait, ez a folyamat azonban nem fejlődik tovább, az ez irányú érdeklődés THOMAS BRADWARDINE angol és NICOLAUS CUSANUS német matematikus homályos kísérletei után (XIV., illetve XV. század) csak a XVI. század végén újul meg (S. STEVINUS flamand tudós). Így a XVII. századot megelőző egész időszak lényegében az elemi matematika korszaka.

E korszak kezdete (a görög, a hellenisztikus és a római matematika) a rabszolgatársadalom, második fele pedig a feudális társadalom idejére esik (Kínában, Indiában, Közép-Ázsiában, a Közelkeleten és Nyugat-Európában). A görög és a hellenisztikus matematika gyors felvirágzás után a rabszolgatársadalom viszonyai közt mind jobban elszakad a gyakorlattól, hatása alá kerül az idealista filozófia korlátozó tendenciáinak s végül is teljesen lehanyatlik. A középkorban a Kelet országaiban a nagy hidrotechnikai építkezések, a világkereskedelmi centrumok kifejlődése, a nagyszabású geodéziai munkák növekedő kísérletei és a kereskedőréteggel szorosan összenőtt hivatalnoki réteg gyakorlatibb törekvései kapcsán különösen nagy fejlődésnek indult a matematika számolással kapcsolatos része.

Az elemi matematika korszakának végén a nyugateurópai matematika fejlődésének ütemére hatással van a feudalizmus méhében keletkező új polgári társadalom kialakulásának folyamata. A reneszánsz korban (XV—XVI. század) gyorsan növekednek a mérnököknek, építészeknek, művészeknek, katonáknak, hajósoknak és geografusoknak a matematikával szemben támasztott igényei. Ugyanakkor az egyetemeken a szabadabb tudományos kritika és a tudományos verseny lehetőségei ösztönzést adnak, azelőtt megoldhatatlannak tűnő problémák megoldására, az elmélet bátrabb fejlesztésére.

Az ókori Görögország. Az ókori Görögországban a matematika fejlődése teljesen más irányt vett, mint Keleten. Noha a számítás technikája, az algebrai jellegű feladatok megoldásában való ügyesség és a csillagászat matematikai segédeszközeinek kidolgozása terén a görög matematika színvonala csak a hellenisztikus korszakban érte utól és múlta felül a babiloniaiét, az ókori Görögország matematikája már sokkal hamarabb a logikai fejlődés új szakaszába lépett. Itt találkozunk először pontos matematikai bizonyítás igényével, megtörténnek az első kísérletek a matematikai elmélet rendszeres felépítésére. A matematika — ugyanúgy, mint minden más tudományos és művészi tevékenység — többé nem személytelen, mint az ókori Kelet országaiban; most már névszerint ismert matematikusok művelik, akik matematikai munkákat hagynak hátra. (Ezek csak sokkal későbbi kommentátorok által megőrzött töredékekben maradtak fenn.) A matematikai tudomány jellegének ez a megváltozása azzal magyarázható, hogy a görög államok fejlettebb politikai-társadalmi és kulturális élete a dialektikát, a vitatkozás művészetét magas színvonalra emelte s szokásossá tette a kimondott állításnak az ellenféllel szemben való megvédését. A vallástól független filozófiai gondolkodás létrejötte folytán fellépett a természeti jelenségek ésszerű magyarázatának igénye, és ez új feladatok elé állította a matematikát.

Az aritmetika terén a görögök a föniciaiak tanítványainak vallották magukat, az ottani aritmetika magas fejlettségi fokát a föniciaiak kiterjedt kereskedelmével magyarázva; a görög geometria kezdetét pedig az első görög geométerek és filozófusok, Miletosi Thales (az i. e. VII. század végétől a VI. század közepéig) és Samosi Pythagoras (i. e. VI. sz.) egyiptomi utazásával köti össze a hagyomány. Pythagoras iskolájában az aritmetika a számolás egyszerű mesterségéből számelméletté nőtt. Meghatározták a legegyszerűbb számtani haladványok összegét [így az $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ összefüggést is], vizsgálták a számok oszthatóságát és a különböző (számtani, mértani, harmonikus) középértékeket. A számelmélet finomabb problémáit (például az ún. tökéletes számok meghatározását) Pythagoras iskolájában a számok közötti összefüggéseknek tulajdonított misztikus, mágikus jelentőséggel hozták kapcsolatba. Pythagoras geometriai tételével kapcsolatban megtalálták a „pythagorasi számok" (az $a^2+b^2=c^2$ összefüggést kielégítő számhármasok) végtelen sorozatának előállítási módját. A geometria területén a görög matematikusok az i. e. VI—V. században az egyiptomiak örökségének elsajátítása után ugyancsak az építőművészet, a földmérés és a hajózás legegyszerűbb problémái kapcsán felmerülő feladatokkal foglalkoztak. Ilyenek például a derékszögű háromszög befogói és átfogója közti összefüggés (amelyet a „Phytagoras-tétel" fejez ki), a hasonló idomok területének összefüggése, a kör négyszögesítése,[12] a szögharmadolás,[12] a kocka megkétszerezése.[12] Új azonban e feladatok tárgyalásmódja; ezt a tárgy bonyolultabbá válása tette szükségessé. A görög matematikusok nem elégszenek meg közelítő, tapasztalati úton talált megoldásokkal, hanem pontos bizonyítást keresnek, a probléma logikailag hiánytalan megoldását. Élő példája ennek az új irányzatnak a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenségének bizonyítása. Az időszámításunk előtti V. század közepén Görögország filozófiai és tudományos élete Athénben koncentrálódik; ide gyűlnek össze a tudósok a görög világ minden részéről. Itt dolgozik Eliszi Hippiász és Khioszi Hippokratész, Eliszi Hippiász — az elemi módszerek végigpróbálása után — i. e. 420 körül megoldja a szögharmadolás feladatát egy speciális transzcendens görbe, a kvadratrix[13] segítségével, amelyet azután Dinostratész (i. e. IV. század) a körnégyszögesítés feladatának megoldására használ fel. A geometria első rendszeres tankönyvét Khioszi Hippokratésznek tulajdonítják (az i. e. V. század közepe). Ebben az időben kétségtelenül volt már olyan kidolgozott geometriai rendszer, amely nem hagyott figyelmen kívül bizonyos logikai finomságokat, mint például a háromszögek egybevágósági eseteinek bizonyítása. Az anyag szerkezetének ésszerű megmagyarázására irányuló első — habár teljesen spekulatív — kísérleteknek a matematikában való visszatükröződése volt az i. e. V. század matematikájának minden bizonnyal legjelentősebb eredménye: az öt szabályos test felfedezése. Ez a felfede-

[12] L. az Enciklopédia Квадратура круга, Трисекция угла és Удвоение куба c. cikkeit.
[13] L. az Enciklopédia Квадратриса c. cikkét.

zés oly módon jött létre, hogy keresték azokat az ideális legegyszerűbb testeket, amelyek a világegyetem építőköveiül szolgálhatnak. Az i. e. V. és IV. század határán Demokritosz, a kiváló materialista filozófus, atomisztikus elgondolásokból kiindulva megalkot egy olyan köbtartalomszámítási módszert, amely később Archimedes kiindulópontja lesz a végtelen kicsiny mennyiségek módszerének kidolgozásában. Az i. e. IV. században Athén hatalmának hanyatlásával, a politikai reakció viszonyai közepette olyan korszak köszönt be, amelyben a matematika bizonyos mértékig az idealista filozófia korlátai közé szorul. Ebben az időben a számok tudományát szigorúan elkülönítik a „számolás mesterségétől", a geometriát pedig „a mérés mesterségétől". Az összemérhetetlen távolságok, területek és köbtartalmak létezésére hivatkozva Arisztotelész általában tiltja az aritmetikának a geometriára való alkalmazását. A geometriát szigorúan a körzővel és vonalzóval előállítható konstrukciókra korlátozzák; az ugyanebben az időben felmerült delosi problémának (kocka megkétszerezése) a megoldását a geometrián kívülállónak nyilvánítják, mert ez bonyolultabb szerkesztési eszközöket követel meg. Az i. e. IV. század matematikusai által elért konkrét eredmények közül a legjelentősebbeknek Knidosi Eudoxosz (az i. e. IV. század első fele) kutatásait tekinthetjük, melyek a geometria alapjainak logikai elemzését célzó irányzattal kapcsolatosak. Eudoxosz dolgozta ki az aránypárok elméletét és ő bizonyította be elsőnek a gúla köbtartalmáról szóló tételt (melyet az egyiptomiak tapasztalati tényként már az i. e. II. évezred elejétől fogva ismertek, l. fentebb). E bizonyítással kapcsolatban ő mondotta ki azt az Archimedes axiómájának is nevezett általános feltevést, amely az exhausztiós módszer alapját alkotja.[14] A matematika főáramlatai mellett meg kell még említenünk az i. e. IV. században Tarentuszi Arkhitoszt (az i. e. V. század második felétől a IV. század első feléig); a mechanika matematikai feldolgozásának első kísérletével. Ugyancsak ő egyébként a kocka megkettőzéséről szóló deloszi probléma egyik felvetője és a megoldás szerzője is.

A hellénisztikus és a római korszak. Az i. e. III. századtól kezdve hét évszázadon át Alexandria volt a tudományos kutatás, különösen a matematika fő központja. Itt a különböző világkultúráknak egyesülése, a nagy állami és építési feladatok és az addig még soha nem látott méretű állami támogatás által jellemzett viszonyok között a görög matematika legnagyobb felvirágzását érte el. Annak ellenére, hogy a görög műveltség és a tudományos érdeklődés az egész hellenisztikus és római világban mindenütt el volt terjedve, Alexandria „múzeum"-ával — az első modern értelemben vett tudományos kutatóintézettel — és könyvtárával oly nagy vonzóerőt gyakorolt, hogy az összes nagyobb tudósok itt gyűltek össze. Az alább említésre kerülő tudósok közül egyedül Arlhimedes maradt hű szülővárosához, Szirakuzához. Különösen kitűnik a matematikai tevékenység intenzitásával az alexandriai korszak első százada (az i. e. III. század). Ekkor élt és működött Euklidész,[15] Archimedes,[15] Eratoszthenész és Pergeszi Apolloniusz. A bonyolult hidrotechnikai alkotások (például az archimedesi csavar), a haditechnika követelményei (Archimedes hajítógépei), a tengeri hajózás problémái (Archimedes vizsgálatai a hajótestek egyensúlyáról és stabilitásáról), a geodéia és a kartográfia fejlődése (a földgömb méreteinek meghatározása Eratoszthenész által), úgyszintén a pontos asztronómiai mérések és számítások kidolgozása (az év tartamának Julianus-féle közelítő meghatározása: 1 év $= 365\,{}^1/_4$ nap), végül a mechanika és az optika fejlődése — mindez egész sereg új feladat elé állította a matematikát. Az i. e. III. századot az jellemzi, hogy a matematika e követelményeknek megfelelő gyors kiterjedésbeli bővülése termékeny módon egyesült a mélyenjáró teoretikus gondolkodással. Így a gyakorlat követelményei folytán a mennyiségek közelítő mérése és a közelítő számítások iránt felébredt érdeklődés nem vezetett a matematikai szigorúságról való lemondásra. A nagyszámú közelítőleg elvégzett gyökvonásnál, sőt az összes csillagászati számításoknál is min-

[14] L. az Enciklopédia Исчерпывания метод c. cikkét.
[15] L. az Enciklopédia Евклид, ill. Архимед c. cikkeit.

dig pontosan megjelölték a hibahatárt, oly módon, mint azt ARCHIMEDES tette kifogástalanul bebizonyított

$$3\frac{10}{71}d < k < 3\frac{1}{7}d$$

kettős egyenlőtlenségével, ahol k a kör kerülete, d pedig átmérője. Ez világos megértését jelenti annak, hogy a közelítő számítások matematikája nem valamiféle „nem szigorú" matematika — ami később hosszú időre feledésbe ment.

Az „Elemek"-ben EUKLIDÉSZ összegyüjtötte és végleges logikai formába öntötte a geometria területén addig elért eredményeket.[16] Ugyanakkor elsőnek fektette le az „Elemek"-ben a rendszeres számelmélet alapjait is: bebizonyította, hogy a prímszámok sorozata minden határon túl folytatódik és felépítette az oszthatóság lezárt elméletét. Végül az „Elemek" második, hatodik és tizedik könyvében EUKLIDÉSZ sajátos módon geometrizálja az algebrát, lehetővé téve nemcsak másodfokú egyenletek geometriai megoldását, hanem irracionális négyzetgyökös kifejezések bonyolult átalakításainak geometriai úton való végrehajtását is. Ugyanennek a „geometriai algebrának" a stílusában fogalmazta meg ARKHIMEDÉSZ a számtani haladvány tagjainak négyzetösszegéről szóló tételét. EUKLIDÉSZNEK az „Elemek"-en kívüli geometriai munkái és PERGÉSZI APOLLONIUSZ művei közül a matematika további fejlődése szempontjából a kúpszeletek[17] teljes elméletének megalkotása a legjelentősebb. ARCHIMEDES fő érdeme a geometriában a különféle területek, felszínek és köbtartalmak (így a parabolaszelet területének, a gömb felszínének és köbtartalmának), valamint egyes súlypontok (így a gömb- és a paraboloidszelet súlypontjának) meghatározása; az archimedesi spirális[18] csak egy az i. e. III. században vizsgált transzcendens görbék közül. ARCHIMEDES után, noha a tudományos ismeretek terjedelme tovább növekedett, az alexandriai tudomány már nem érte el korábbi teljességét és mélységét. A csillagászat területén ez abban fejeződött ki, hogy — a megfigyelések egyre növekvő pontossága és a matematikai apparátus tökéletesedése ellenére — elvetették SZÁMOSZI ARISZTARKHOSZNAK (az i. e. IV. század végétől a III. század közepéig) a Földnek a Nap körül való mozgásáról és az állócsillagok távolságáról szóló tanait, amelyet az előző nemzedékek legjobb elméi teljes mértékben elfogadtak. A matematikában a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének ARCHIMEDES heurisztikus módszereiben található csírái (ARCHIMEDESNEK „A módszerről" szóló speciális munkájában; itt a szerző rámutat arra is, hogy a szóban forgó módszerek nem pontosak, a végleges tárgyalásban az exhausztiós módszerrel tartja szükségesnek helyettesíteni ezeket) nem fejlődtek tovább.

Az ókor egész matematikájának lényeges hiányossága volt, hogy az irracionális szám fogalma nem alakult ki tökéletesen. Mint fentebb már említettük, ez arra vezetett, hogy az i. e. IV. század filozófiája egyáltalában tagadta az aritmetikának geometriai mennyiségek vizsgálatára való alkalmazhatóságát. A valóságban az i. e. IV. és III. század matematikusainak mindazonáltal közvetett módon sikerült megvalósítaniuk ezt az alkalmazást az aránypárok elméletében és az exhausztiós módszerben. A következő századok nem a probléma tényleges megoldását hozták meg a megfelelő alapvetően új fogalom (az irracionális szám fogalmának) megalkotásával, hanem lassankénti feledésbe menését, ami a matematikai szigorúság igényének fokozatos elveszése által vált lehetővé. A matematikai szigorúságról való ideiglenes lemondás azonban ebben az időszakban hasznosnak bizonyult, mert megnyitotta az utat az algebra akadálytalan fejlődése előtt, ami az Euklidész „Elemei"-ben képviselt szigorú elgondolások követése esetén csak a távolságok, területek és köbtartalmak „geometriai algebrá"-jának igen kényelmetlen formájában lett volna lehetséges.

[16] L. az Enciklopédia Начала c. cikkét.
[17] L. az Enciklopédia Конические сечения c. cikkét.
[18] L. az Enciklopédia Архимедова спираль c. cikkét.

Ez irányban elért eredmények közül HÉRON[19] (valószínűleg I. század) *Metrikájá*t említhetjük; e mű szerzője különösen geodéziai munkáiról híres, amelyek a római geodétikusok nagyszabású gyakorlati tevékenységének alapját alkották. HÉRON *Metriká*ja nevezetes mű, a számításos geometria módszereinek első önálló tárgyalása. Tartalmazza egyebek közt az ún. Héron-képletet is, azaz a háromszög területének (egyébként már ARCHIMEDES által is ismert)

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

képletét (a gyökjel alatt található négytényezős szorzatnak nincs geometriai értelme). A tulajdonképpeni algebrai számítások önálló és széleskörű kifejtése azonban csak DIOPHANTOSZ[20] *Aritmetiká*jában található meg, amely főként az egyenletek megoldásával foglalkozik. Ez a munka tartalmazza azt a szabályt, hogyan kell átvinni egy tagot az egyenlet egyik oldaláról a másikra, felhasználja az egyenlet mindkét oldalának ugyanazzal a kifejezéssel való szorzását, megadja a másodfokú egyenletek megoldásának általános módszereit; megold benne a szerző olyan feladatokat is, amelyek harmadfokú egyenletre, valamint többismeretlenes határozatlan egyenletre vezetnek. DIOPHANTOSZ mindig pozitív megoldásokat keres; az algebrai kifejezések szorzásánál azonban felhasználja a „kivont" számok szorzásának szabályát, amely megelőzi a negatív számokkal való műveletekre vonatkozó későbbi szabályokat. DIOPHANTOSZ természetesen — HÉRÓN gyakorlatától eltérően — a racionális megoldásokra szorítkozik, és ezzel kizárja annak lehetőségét, hogy algebrája a geometriára vagy a mechanikára alkalmazható legyen. A trigonometriát az ókorban általában nem a matematikához sorolták, hanem az asztronómiához. A trigonometriától ugyanúgy, mint HÉRÓN számításos geometriájától, nem követelik meg a megfogalmazások és a bizonyítások teljes szigorúságát. Húrhosszúságtáblázatot — mely mai sinustáblázataink szerepét töltötte be — elsőnek HIPPARKHOSZ (i. e. II. sz.) készített. A szférikus trigonometria elemeit MÉNELAOSZ (I. század) és CLAUDIUS PTOLEMAEUS (II. század) alkotta meg. PTOLEMAEUS kezdeményezte a hosszúságnak és szélességnek a földrajzi helymegjelölésre való rendszeres használatát is; úgy látszik, hogy ez volt a koordinátarendszer használatának első formája.

A tiszta matematika területén az ókor utolsó századaiban élő tudósok tevékenysége (DIOPHANTOSZT kivéve) mindinkább a régi szerzők kommentálására összpontosult. PAPPUSNAK (valószínűleg III. század) az EUKLIDÉSZ „Elemei"-hez fűzött terjedelmes kommentárai között sikerült felállítania a forgástestek köbtartalmáról azt a tételt, amelyet később Guldin-szabálynak neveztek el. Ennek az időszaknak a kommentátor-tudósai [PAPPUS, PROCLUS (V. század) és mások] minden sokoldalúságuk ellenére, az antik világ hanyatlásának körülményei között már képtelenek voltak a matematika egymástól elszigetelten fejlődő ágainak: a Diophantos-féle algebrának, az asztronómia részét alkotó trigonometriának és a geodetikusok között népszerű, nyiltan nem-szigorú Hérón-féle számításos geometriának egységes, igazán fejlődésképes, tudománnyá való egyesítésére.

Kína. A görög-római világ végleges felbomlása után a tudományos haladás centruma hosszú időre Keletre helyeződik át. A matematika további európai fejlődésére az indiai, középázsiai és közelkeleti matematikusok művei voltak a legnagyobb hatással; az időbeli elsőség azonban sok probléma tekintetében a kínai matematikusoké. Már a CSZSAN CAN és CZIN CSOU-CSAN által korábbi források alapján az i. e. II—I. században összeállított „Aritmetika kilenc fejezetben" c. könyv bizonyítja, hogy a kínai matematikusok magasszínvonalú számítási technikával rendelkeztek és megvolt bennük az érdeklődés az általános algebrai módszerek iránt. Ez az első munka, amely tartalmazza az egész számokból való négyzet- és köbgyökvonás szabályát — lényegében ugyanúgy, ahogyan ma az iskolákban tanítjuk.

[19] L. az Enciklopédia Герон c. cikkét.
[20] L. az Enciklopédia Диофант című cikkét.

Sok feladat úgy van megfogalmazva, hogy azok csak az ismeretleneknek a lineáris egyenletrendszerekből való, általuk világosan láthatólag jól ismert kiküszöbölési módszereit magyarázó példákként foghatók fel. Így például azt az egyenletrendszert, amely a mai jelölésmóddal felírva a

$$\begin{aligned} 3x+2y+\ z&=39,\\ 2x+3y+\ z&=34,\\ x+2y+3z&=26 \end{aligned}$$

alakot öltené, így adják meg: „három csomag gabona az első fajtából, kettő a másodikból és egy a harmadikból összesen 39 súlyegységet nyom (a másik két egyenlet tartalmát ugyanígy fogalmazzák meg). Az egyenletrendszert a következő táblázat alakjában írják fel:

1	2	3	1. fajta
2	3	2	2. fajta
3	1	1	3. fajta
26	34	39	súlyegység

A második oszlop számait megszorozzák a harmadik oszlop „első fajta“ számával, azaz 3-mal, és az így kapott eredményekből kivonják a harmadik oszlop számainak kétszeresét. Azután a harmadik oszlop számait kivonják az első oszlop számainak háromszorosából. Ily módon a következő táblázatot kapják:

4	5	2. fajta
8	1	3. fajta
39	24	súlyegység

Ugyanezzel a módszerrel — amelyben nem nehéz felismerni az „angol módszert“ („az egyenlő együtthatók módszerét“) — oldják meg a kapott kétismeretlenes egyenletrendszert is, ami a

36	3. fajta
99	súlyegység

táblázatot adja; innen $z=\frac{99}{36}=2^{3}/_{4}$, stb. Az olyan esetekben, amikor az itt leírt algoritmus — mai terminológiával kifejezve — negatív számokra vezet, az „Aritmetika kilenc fejezetben“ a „cszsen-fu“ módszert ajánlja („cszsen“ „hozzáadandót“, „fu“ pedig „kivonandót“ jelent; az ilyen számokat különböző színekkel jelölték: a „cszsen“-t pirossal, a „fu“-t feketével). Negatív előjelű megoldásokat kínai forrásokban nem találunk, a negatív együtthatókat ellenben a kínai matematikusok könnyen kezelik. Az „Aritmetika kilenc fejezetben" c. könyv legutolsó része tartalmazza PYTHAGORAS tételét, tisztán aritmetikai megfogalmazásban, és néhány, a tétel alkalmazására szolgáló feladatot is a megoldással együtt.

A naptárszámítások kapcsán Kínában érdeklődés támadt az ilyenféle feladatok iránt: egy szám 3-mal osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at, 7-tel osztva 2-t ad maradékul; melyik ez a szám? SZUN CZI (a II. és a VI. század között), majd — teljesebben — CIN CZU SAO (XIII. század) példákon bemutatva leírja az ilyen feladatok megoldásának szabályszerű algoritmusát; Gauss német matematikus ugyanezt sokkal később (1801-ben) fedezte fel. A geometria terén a kínaiak számítási módszereinek magas fejlettségi fokát CU CSUN-CSZSI (az V. század második fele) eredménye bizonyítja: CU CSUN-CSZSI megmutatta, hogy a kör kerületének és átmérőjének viszonyára (π)

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Különösen jelentősek a kínaiak munkái az egyenletek numerikus megoldása terén. Harmadfokú egyenletre vezető geometriai feladatok elsőízben VAN SZJAO-TUNG csillagásznál és matematikusnál (a VII. század első fele) találhatók. A negyed- és ennél is magasabbfokú egyenletek megoldási módszereiről CIN CZJU-SAO, LI JE, JAN HUEJ és CSZSU SI-CE XIII—XIV. századbeli matematikusok munkái szólnak. Az általuk használt *„égi elem-módszer"* lényegében azonos azzal, amely ma HORNER módszere néven ismeretes (HORNER angol matematikusról, aki újra felfedezte azt 1819-ben). Érdekes következménye éppen a közelítő számítási módszerek magas fejlettségi fokának, hogy CIN CZJU-SAO „A matematika kilenc fejezete" c. értekezésében általánosan oldja meg a bikvadratikus egyenletet, és itt a közbenső számításokban szerepel teljes negyedfokú egyenlet is.

A középkori kínai matematika a XVI. század táján érte el legmagasabb fejlettségi fokát. A görög-római, indiai, középázsiai és a középkori nyugateurópai matematikával való kapcsolatai nincsenek kikutatva; azt azonban, hogy ilyen kapcsolatok voltak, bizonyítja több feladatnak különböző országokból származó kéziratokban ugyanazokkal a numerikus adatokkal való ismétlődése. Így például a fentebb említett kínai feladat: az

$$x \equiv 2 \pmod 3,$$
$$x \equiv 3 \pmod 5,$$
$$x \equiv 2 \pmod 7,$$

kongruenciarendszer megoldása, pontosan megismétlődik LEONARDO DA PISA olasz matematikus „Könyv az abacusról" c. munkájában (1292).

India. Az indiai matematika virágzása az V—XII. század idejére esik [a legismertebb indiai matematikusok: ARIABHATA (az V. század végén), BRAMAGUPTA (VII. század), BHASZKARA (XII. század)]. Az indiaiaknak a matematika terén két alapvető érdemük van. Az egyik a ma használatos tízes számrendszer bevezetése és közhasználatúvá tétele, a 0-nak, mint számjegynek rendszeres alkalmazásával a megfelelő helyi értékű egységek hiányának jelölésére (hasonló jelölés a kései babilóniai szövegek hatvanasszámrendszerű írásmódjában csak helyenként található), és ennek alapján tökéletesebb számolástechnika kidolgozása, beleértve ebbe a többjegyű számok osztásának a maihoz közelálló módszerét (ez a művelet természetesen már az ókori matematikusoknak sem okozott elvi nehézségeket, végrehajtása azonban akkor sokkal bonyolultabb volt). Az Indiában használt — ma „arab"-oknak nevezett — számjegyek eredete nincs teljesen tisztázva. Az indiai matematikusok másik, még jelentősebb alapvető érdeme a nem csupán a törtekkel, hanem az irracionális és a negatív számokkal is korlátozás nélkül operáló algebra megteremtése. A „kivonandó" számok (amelyeket felül ponttal jelöltek) az indiaiaknál — DIOPHANTOSSZAL ellentétben és a kínaiakhoz hasonlóan — önálló létjogosultságot nyernek. Így például a

$$\left.\begin{array}{l} \textit{ya va } 3 \textit{ ya } 10 \textit{ ru } \dot{8} \\ \textit{ya va } 1 \textit{ ya } \;\,0 \textit{ ru } 1 \end{array}\right| \quad (3x^2+10x-8=x^2+1)$$

egyenlet (*Bramagupta* szerint) a

$$\left.\begin{array}{r} ru\ \dot{9} \\ ya\ va\ \dot{2}\ ya\ \dot{10} \end{array}\right| \quad (-9=-2x^2-10x)$$

alakra hozható. A negatív számok valóságos értelméről az indiaiaknál csak egyes említéseket találunk (a vagyon és az adósság ellentétével kapcsolatban), rendszerint viszont a feladatok megoldásainak értelmezésénél a negatív megoldásokat értelmetleneknek tartják. Általában meg kell jegyeznünk, hogy míg a tört- és az irracionális számok fogalmai keletkezésük pillanatától kezdve kapcsolatban állnak a folytonos mennyiségek mérésével, a negatív számok fogalma lényegében az algebra belső szükségleteiből ered és csak később (teljes mértékben a XVII. században) nyer önálló jelentőséget.

Bramagupta általános szabályt alkotott a másodfokú egyenletek megoldására: a negatív számok felhasználásával egyesítette azokat az eseteket, amelyeket Diophantosz még külön tárgyalt. Bhaszkara rámutatott a négyzetgyök kétértékű voltára, foglalkozott a $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ alakú irracionális kifejezések vizsgálatával, olyan átalakításokat végzett el, mint például:

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

birtokában volt törtek nevezőinek racionalizálását lehetővé tevő módszereknek, megoldott egyes speciális alakú magasabbfokú egyenleteket. Bramagupta és Bhaszkara általános módszereket adtak a kétismeretlenes elsőfokú határozatlan egyenletek, valamint az $ax^2+b=cy^2$ és $xy=ax+by+c$ alakú egyenletek egész számú megoldásainak meghatározására.

A trigonometriában az indiai matematikusok érdeme volt a sinus-, cosinus- és sinusversus-görbe bevezetése.

Közép-Ázsia és a Közel-Kelet. Az arab hódítások — rövid idő alatt hatalmas területek egyesültek az arab kalifák hatalma alatt — arra vezettek, hogy a IX—XV. században Közép-Ázsia, a Közel-Kelet és a Pireneusi Félsziget tudósai az arab nyelvet használták. A tudomány a világkereskedelmi városokban a széleskörű nemzetközi érintkezés és a nagy tudományos kezdeményezések állami támogatása mellett fejlődésnek indul. Így például a IX. század elején Al Mamun kalifa parancsára pontos délkörívmérést végeztek, a XIII. században Dzsingisz kán unokája, Hulagu kán Maragában obszervatóriumot épített Naszireddin Tuszi azerbajdzsáni tudós számára, és könyvtárakat alapítottak (a cordobai könyvtár állománya a IX. században hatszázezer kötet volt). Fényes betetőzése volt ennek a korszaknak a XV. században Ugul-bek üzbég csillagász tevékenysége, aki szamarkandi házában és obszervatóriumában több mint száz tudóst gyűjtött össze és csillagászati megfigyeléseket, matematikai táblázat-kiszámításokat stb. szervezett. Tevékenységének eredményeit hosszú időn át nem múlták felül.

A nyugat-európai tudományban a legutóbbi időkig az a vélemény uralkodott, hogy az „arab kultúra" szerepe a matematika területén lényegében csupán az ókori világ és India matematikai felfedezéseinek megőrzése és Nyugat-Európának való átadása volt. Valóban, a görög matematikusok művei Nyugat-Európában először arab fordításokból váltak ismeretessé. Mind világosabbá válik azonban, hogy az arab nyelven író matematikusoknak — közöttük azoknak, akik a mai Szovjet-Közép-Ázsia és Szovjet-Kaukázusvidék népeinek (horezmiek, üzbégek, tadzsikok, azerbajdzsániak) fiai voltak — a matematika fejlődésében vitt szerepe ennél lényegesen több volt.

A IX. század első felében Muhammed ben Musza Chorezmi középázsiai tudós elsőnek tárgyalta az algebrát mint önálló tudományt. Az „algebra" szó maga is Chorezmi „Al-dzsebr" című munkájának címéből ered; a korai középkor európai matematikusai ebből a munkából ismerték meg a másodfokú egyenletek megoldását. Nem sokkal Chorezmi után kezdenek először rendszeresen foglalkozni harmadfokú egyenletekre vezető feladatokkal. Biruni középázsiai tudós (IX. század vége — X. század első fele) a szabályos tízszög oldalának meghatározását az $x^3+1=3x$ egyenlet megoldására vezette vissza és „hatvanadostörtek" alakjában közelítőleg meg is kapta ennek az egyenletnek a megoldását. A szabályos hétszög szerkesztésének feladatát az $x^3+1=2x+x^2$ egyenlet megoldására vezették vissza. IBN-AL-HAJTAM iraki matematikus (X. század vége — XI. század eleje) egy geometriai optikai problémát negyedfokú egyenletre redukált; OMÁR KHAJJAM[21] tadzsik matematikus (XI. század vége — XII. század eleje) rendszeres módon vizsgálta a harmadfokú egyenleteket, osztályozta őket és meghatározta megoldhatóságuk feltételeit (a megoldhatóságon pozitív gyök létezését értve). Khajjam algebrai munkájában megírja, hogy sokat foglalkozott a harmadfokú egyenletek pontos megoldására irányuló vizsgálatokkal. Ebben az irányban a középázsiai matematikusok kutatásait nem koronázta siker, a megoldásnak mind geometriai (kúpszeletek felhasználásán alapuló), mind közelítő módszereit azonban jól ismerték. A középázsiai és a közelkeleti matematikusok, bár elsajátították az indusoktól a tízes számrendszert a zérus használatával együtt, a nagyobb tudományos számításokban szívesebben alkalmazták a hatvanas számrendszert (nyilván összefüggésben azzal, hogy a csillagászatban a szögek hatvanados beosztása volt használatos). Megalkották az egész számok és a „hatvanadostörtek" egységes hatvanasszámrendszerbeli írásmódját is; így a

$$43;\ 0;\ 16;\ \dotplus 8;\ 37$$

jelölés a $\dotplus$ jel az egész és a tört helyi értékek elválasztására szolgál) a

$$43{,}60^2+0{,}60+16+\frac{8}{60}+\frac{37}{60^2}$$

számot jelölte. ABU-L-VEFA iráni tudós (X. század) már használta ezt az írásmódot a harmadik, negyedik és ötödik gyök vonásáról írt munkájában. OMAR KHAJJAM egy művében, amely nem maradt fenn, megírta tetszőleges (természetes szám-) kitevőjű gyök vonásának módját.

A csillagászati és geodéziai munkák kapcsán nagy fejlődésnek indult a trigonometria. SZIRIEC-AL-BATANI (IX. század második fele — X. század eleje) bevezette a sinus, a tangens és a cotangens, ABU-L-VEFA pedig mind a hat trigonometrikus függvény használatát. Ugyancsak ABU-L-VEFA szavakkal kifejezve megadta a trigonometrikus függvények közti algebrai összefüggéseket, sinus- és tangenstáblázatot készített (az előbbi a szögeket tízpercenként, a függvényértékeket pedig $\frac{1}{60^4}$ pontossággal tartalmazta) és felállította a gömbháromszögek sinustételét. NASZIREDDIN TUSZI azerbajdzsáni tudós (XIII. század)[22] rendszeresen végigvizsgálta a gömbháromszögek megoldásának mind a hat esetét és ezzel kiépítette a szférikus trigonometriát; a két legnehezebb eset (a szögek meghatározása az oldalakból és az oldalaké a szögekből) megoldását ő maga találta meg. NASZIREDDIN lefordította arabra EUKLIDÉSZ „Elemei"-t és kommentárokat fűzött hozzá; kommentárokat írt az „Elemek"-hez már Khajjam is. Ezekben főproblémaként a párhuzamosok posztulátumának bizonyíthatósága szerepel. KHAJJAM és NASZIREDDIN saját műveikben nagy figyelmet fordítottak a tételek exakt bizonyítására. Elvi jelentőségű tény Khajjámnál és Naszireddinnél az, hogy náluk jelent meg a (pozitív) valós szám világos fogalma. Így például két tetszőleges (összemérhető vagy nem összemérhető) mennyiség arányáról NASZIREDDIN ezt írja: „bármely ilyen arányt számnak nevezhetünk, melyet az egység ugyanúgy meghatároz, mint az arány egyik tagja a másikat".

Külön meg kell említenünk végül HILSZEDDIN DZSEMSID IBN-MASZUD AL-KASI szamarkandi matematikusnak (XV. század eleje), UGUL-BEK munkatársának eredményeit.[23] DZSEMSID rendszeres tárgyalását adta a tizedestörtek aritmetikájának; a tizedestörteket — helyesen — hasz-

[21] L. az Enciklopédia Омар Хайям c. cikkét.

[22] L. az Enciklopédia Насиреддин c. cikkét.

[23] L. az Enciklopédia Джемшид ибн-Масуд аль-Каши c. cikkét.

nálhatóbbaknak tartotta a hatvanadostörteknél. A tizedestörtekkel való számolás módszereinek hozzá hasonló tökéletességét Európában csak a XVI. század végén érte el Stevinus flamand tudós. A gyökvonással kapcsolatosan Dzsemsid szavakkal megfogalmazza Newton binomiális tételét és rámutatott a binomiális együtthatók $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$ képzési szabályára. „Értekezés a körről" c. munkájában (1427 körül) meghatározza a körbe és a kör köré írt $3{,}2^{28}$ oldalú szabályos sokszög kerületét és ily módon kiszámítja a π értékét 17 tizedesjegynyi pontossággal. Terjedelmes sinus-táblázatokat is készít és ezzel kapcsolatban igen jó iterációs módszert ad az egyenletek numerikus megoldására.

Nyugat-Európa a XVI. századig. A XII—XV. század Nyugat-Európa matematikájában lényegében az ókori és a keleti örökség elsajátításának időszaka volt. Az európai matematikai kultúra azonban már ebben a korban is, amelyben különösebb jelentőségű új matematikai felfedezések nem születtek, kitűnik több általános jellegű haladó vonásával; ezek tették lehetővé a későbbi századokban bekövetkező gyors fejlődést. Az olasz városok gyorsan gazdagodó és politikailag független polgárságának magas igényei olyan tankönyvek megírására és széleskörű elterjedésére vezettek, amelyek egyesítették magukban a gyakorlati végső célkitűzést a nagy tudományos igénnyel és alapossággal. Nem egészen 100 évvel a görög és arab matematikai művek első latin fordításainak megjelenése (XII. sz.) után a pisai Leonardo Fibonacci olasz matematikus megjelenteti „Könyv az abacusról" (1202) és „Geometriai praktikum" (1220) című, aritmetikával, kereskedelmi számtannal, algebrával és geometriával foglalkozó munkáit. Ezeknek a könyveknek nagy sikerük volt; a „Könyv az abbacusról" 1228-ban új, átdolgozott változatban terjedt. Az említett korszak végén (a könyvnyomtatás feltalálásával) az olyan tankönyvek, mint Lucchi Paceoli olasz matematikusnak az aritmetikáról, geometriáról, az arányokról és aránypárokról szóló könyve, még jobban elterjedtek. E gyakorlati irány mellett az elméleti tudományos gondolkodás fő központjai az egyetemek lettek. Az algebrának elméleti tudományként és nem csupán gyakorlati feladatok megoldására szolgáló szabályok gyűjteményeként való fejlődése nyilvánul meg az irracionális számnak — mint két össze nem mérhető mennyiség hányadosának — világos felfogásában [Bradwardine angol (XIV. század első fele) és Oresme francia matematikus (XIV. század közepe)], és különösen a tört, valamint a negatív és zérus hatványkitevő bevezetésében (az előbbi Oresme, e két utóbbi pedig Chuquet francia matematikus nevéhez fűződik). Ugyanebben az időben merülnek fel — a kort megelőzve — a végtelen kicsiny és a végtelen nagy mennyiségekkel kapcsolatos első gondolatok. [Bradwardine és Nicolaus Cusanus német matematikus (XV. század első fele)], a függvényeknek a maximum és a minimum környezetében való viselkedéséről (Oresme) stb. A tudományos kutatás ez időbeli nagy fellendülése nemcsak a görög és arab szerzők műveinek lefordításában és kiadásában nyilvánul meg, hanem olyan kezdeményezésekben is, mint például a Regiomontanus (I. Müller) német matematikus által számított terjedelmes trigonometriai táblázatok kiadása. Ugyancsak Regiomontanus a szerzője „Az összes lehetséges háromszögek öt könyve" c. trigonometriai munkának is (1461, közzétéve 1533-ban). Nagymértékben tökéletesedik a matematikai írásmód; így Chuquet jelölései a XV. század végén, bár formailag különböznek a mai írásmódtól, tömörség tekintetében majdnem elérik azt, pl.

$$\text{R}^{2}\ 4^{2}\ \bar{p}\ 4^{1}\ \bar{p}\ 2^{1}\ \bar{p}\ 1$$

A mai írásmód szerint:

$$\sqrt{4x^2+4x}+2x+1.$$

Ennél is fontosabb a tudományos kritika és vita kifejlődése, aminek következtében például Nicolaus Cusanus pontosként közölt, valójában azonban csak közelítő körrektifikációs módszerét Regiomontanus egyik speciális munkájában *megcáfolta.* Meg kell említenünk azt is, hogy a nehéz feladatok megoldására irányuló koncentrált kutatás következtében — amit az ilyen téren szokássá vált nyilvános verseny is ösztönzött — megjelentek az első megoldhatatlansági bizonyítások. Már LEONARDO PISANO bebizonyította „Virág" c. munkájában (1225 körül), amelyben a saját maga által legszebben megoldott problémákat gyűjtötte össze, hogy az $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ egyenlet nem oldható meg, nemcsak racionális számokkal, hanem egyszerűbb ($\sqrt{a + \sqrt{b}}$ stb. alakú) négyzetgyökös kifejezésekkel sem.

Nyugat-Európa a XVI. században. A XVI. század volt az első, amikor Nyugat-Európa fölénybe került az ókorral és Kelettel szemben. Áll ez a csillagászatra (KOPERNIKUS lengyel csillagász felfedezése), a mechanikára (a XVI. század végén már megjelennek GALILEI olasz tudós első vizsgálatai), és egészben véve a matematikára is, annak ellenére, hogy az európai matematika akkor néhány tekintetben még elmarad a XV. századi középázsiai matematikusok eredményeitől, és hogy a valóban nagy új eszmék, amelyek meghatározták az új európai matematika további fejlődését, csak a következő, XVII. században jelennek meg. A XVI. században úgy látszott, hogy a matematikában az új korszak a harmad- és a negyedfokú algebrai egyenletek megoldásának felfedezésével kezdődik [az előbbi FERRO (1515 körül) és később — tőle függetlenül — TARTAGLIA (1530 körül), ez utóbbi FERRARI (1545) nevéhez fűződik — mindhárman olaszok]; ezeknek az egyenleteknek az általános megoldását századokon át megvalósíthatatlannak tartották.[24] CARDANO olasz matematikus a harmadfokú egyenleteket vizsgálva felfedezte az ún. irreducibilis esetet, amikor az egyenlet valós gyökei csak komplex számok segítségével fejezhetők ki. Ennek folytán CARDANO — habár nagyon bizonytalanul — felismerte a komplex számokkal való számolás előnyeit. Ugyancsak CARDANO általános módszereket alkotott tetszőleges fokú egyenletek közelítő megoldására. További fejlődését jelentették az algebrának VIÈTE[25] francia matematikus eredményei, aki megmutatta például azt, hogyan lehet egy n-edfokú egyenletet a gyökeiből felírni. VIÈTE nevéhez fűződik az algebrában a betűkkel való számolás mai formájának bevezetése (1591). (Ő előtte csak az ismeretlenek jelölésére használtak betűket.) A XVI. század egyéb eredményei közül meg kell említenünk a négyzetgyökök lánctörtbe fejtését (BOMBELLI olasz matematikus, 1572), a π első pontos analitikus kifejezését, végtelen szorzat alakjában (VIÈTE, 1593) és a trigonometrikus függvényeknek tetszőleges pozitív argumentumra való értelmezését (VIÈTE, 1594). A perspektivikus ábrázolás elméletét, mely a geometriában már a XVI. század előtt kifejlődött, DÜRER, a híres német festőművész dolgozza ki (1525). VIÈTE algebrai módszerekkel vizsgálta geometriai szerkesztések elvégezhetőségét; ugyanakkor éleselméjű mestere volt a szintetikus szerkesztési feladatoknak is (1600-ban például újra felfedezte APOLLONIUS feladványának — három adott kört érintő kör szerkesztése — elveszett megoldását). STIEFEL német matematikus DZSEMSIDtől függetlenül felfedezte a binomiális együtthatók képzésének törvényét (1544), STEVINUS flamand tudós pedig kidolgozta a tizedestörtekkel való műveletek szabályait (1585).

Oroszország a XVIII. századig. A matematikai műveltség Oroszországban a IX—XIII. században a legkulturáltabb keleti és nyugat-európai országok színvonalán állott. Ezután azonban a mongol betörés miatt hosszú időre visszavetődött. A XV—XVI. században az orosz állam megerősödése és az ország gazdasági felemelkedése következtében a társadalom követelményei a matematikai ismeretek tekintetében jelentős mértékben megnövekedtek. A XVI. század végén és különösen a XVII. század elején sok kézzel írt számtani és mértani tankönyv jelent meg; ezek széleskörű, a gyakorlati tevékenységhez (kereskedelem, adóügy, tüzérség, építészet stb.) szükséges ismereteket adtak.

[24] E felfedezések története részletesebben az Enciklopédia Алгебра és Кардано формула c. cikkeiben található.

[25] L. az Enciklopédia Виет c. cikkét.

Ó-Oroszországban a szláv abc-n alapuló, a görög-bizáncihoz hasonló számrendszer volt elterjedve. Minden egyes betű elhelyezésétől függetlenül mindig ugyanazt a számot jelentette; ha a betűt számnak használták, akkor föléje a ҃ jelet tették. A betűk а-tól ѳ-ig az egyeseket jelölték, і-től ч-ig a tízeseket, р-től ц-ig a százasokat. Ugyanezek a betűk jelenthettek magasabb helyiértékeket is, ekkor azonban ezt külön jelölések mutatták. Így például az ezer jelölésére a megfelelő betű elé a ҂ jelet tették. A szláv számírás az orosz matematikai irodalomban egészen a XVIII. század kezdetéig előfordul, a XVI. század végétől kezdve azonban mindinkább kiszorítja a helyiértékes írásmódú tízes számrendszer.

A legrégibb ismert orosz matematikai munka 1136-ból való, szerzője Kirik novgorodi szerzetes. Ez a munka időszámítási-aritmetikai tárgyú és mutatja, hogy abban az időben Oroszországban már meg tudták oldani a húsvét meghatározásának bonyolult feladatát (a húsvét időpontjának bármely évre való meghatározását), amely matematikai tekintetben elsőfokú határozatlan egyenletek egész számú megoldását követeli meg. A XVI—XVII. századból származó aritmetikai kéziratok a szláv és az arab számírásmód ismertetése mellett a pozitív egész számokkal való aritmetikai műveleteket tartalmazzák, valamint a törtekkel való műveletek szabályainak részletes ismertetését, a hármasszabályt és az elsőfokú egyismeretlenes egyenleteknek a regula falsi alkalmazásával való megoldását. Az általános szabályok gyakorlati alkalmazására a kéziratok sok reális tartalmú példát hoznak fel és ismertetik az ún. deszkaszámolókészüléket, az orosz számolókészülékek ősét. Ugyanilyen felépítésű L. F. Magnyickij híres „Aritmetiká"-jának első, számtani része is (1703). A geometriai kéziratok, amelyek többségükben szintén gyakorlati célokat követtek, idomok területének és testek köbtartalmának meghatározását tartalmazták, gyakran közelítő módon; felhasználták a hasonló háromszögek tulajdonságait és a Pythagoras-tételt.

Meg kell említenünk, hogy az orosz matematikai kéziratokat mindmáig nem tanulmányozták még kellőleg. Az utóbbi években (1950) sikerült felfedezni több fontos okmányt, amelyek mutatják, hogy a XV—XVII. században Oroszországban érdeklődtek a matematika filozófiai jellegű problémái iránt, mint például a geometriai alapfogalmak (pont, egyenes, gömb stb.) definíciója, a végtelen, a folytonosság fogalmával kapcsolatos problémák, stb.

3. A változó mennyiségek matematikája megalkotásának korszaka

A XVII. században a matematika fejlődésének alapvetően új korszaka kezdődik. Engels ezt írja erről: „A fordulópont a matematikában Descartes *variábilis* (változó) mennyisége volt. Ezzel bevonult a matematikába a *mozgás, és ezzel a dialektika, és ezzel rögtön szükségessé vált a differenciál- és integrálszámítás is*... (Engels: A természet dialektikája, teljes magyar kiadás, Szikra, Budapest, 1952, 268. oldal.) A matematika által vizsgált mennyiségi viszonyok és térformák köre most már nem merül ki a számokkal, mennyiségekkel és geometriai idomokkal. Ezt alapjában véve a mozgás, a változás gondolatának a matematikába világos formában való bevezetése tette lehetővé. A mennyiségek közötti összefüggés gondolata rejtett formában már az algebrában is megtalálható (az összeg értéke függ az összeadandók értékétől stb.). A mennyiségi összefüggéseknek mozgásukban való megragadásához azonban az összefüggést önmagát kellett a vizsgálat tárgyává tenni. Így kerül előtérbe a *függvény* fogalma, és ez a továbbiakban ugyanúgy önálló és legfőbb kutatási tárgy lesz, mint azelőtt a mennyiség vagy a szám fogalma. A változó mennyiségek és függvénykapcsolatok vizsgálata elvezet továbbá a matematikai analízis alapfogalmaihoz, amelyek világos formában beviszik a matematikába a végtelen gondolatát: a *határérték*, a *derivált*, a *differenciál*, az *integrál* fogalmához.[27] Megteremtik a végtelen kicsiny mennyiségek analízisét, elsősorban a *differenciálszámítás* és az *integrálszámítás* formájában;[28] ezek lehetővé teszik a változó mennyiségek véges nagyságú megváltozásai és egy-egy értékük közvetlen környezetében való viselkedése közti összefüggés meghatározását. A mechanika és a fizika alaptörvényeit *differenciálegyenletek*[29] alakjában írják fel; az ilyen egyenletek megoldása a matematika legfontosabb problémái közé kerül. Másféle követelményekkel meghatározott ismeretlen függvények megkeresése a *variációszámítás* tárgyát alkotja.[30] Ily módon az olyan egyenletek mellett, amelyekben az ismeretlenek számok, megjelennek olyan egyenletek is, amelyekben ismeretlen függvények meghatározása a feladat.

A geometria tárgyköre szintén lényegesen kibővül: helyet kap a geometriában a mozgás és a transzformáció.[31] Ugyanazzal a mozgással vagy ugyanazzal a transzformációval azonban a legkülönbözőbb idomok helyezhetők vagy alakíthatók át. Ennélfogva a geometria elkezdi a mozgást és a transzformációkat önmagukban vizsgálni. Igy például a *projektív geometria*[32] egyik fő tárgya maguknak a sík- és térbeli projektív transzformációknak a vizsgálata. Ezeknek a gondolatoknak tudatos kibontakozása egyébként csak a XVIII. század végén, a XIX. század elején következik be. De jóval hamarabb, a XVII. században az *analitikus geometria*[33] megteremtésével elvi változás következik be a geometriának a matematika többi részéhez való viszonyában: egyetemes módszert fedeztek fel a geometriai problémáknak az algebra és az analízis nyelvére való lefordítására és tisztán algebrai és analitikus módszerekkel való megoldására, másfelől pedig széles lehetőség nyílt az algebra és az analízis tényeinek geometriai ábrázolására (illusztrációjára), például a függvénykapcsolatok grafikus ábrázolásával.[34] Igaz, ezt az utóbbi lehetőséget korlátozza az a tény, hogy a tér háromdimenziós. Mindez arra indította a matematikusokat, hogy az aritmetikát, az algebrát és az analízist a függvénytannal a „tiszta" matematika részeinek tekintsék, amely a számok, az állandó, illetve a változó mennyiségek közti összefüggések tudománya, a geometriát pedig

[27] L. az Enciklopédia Предел, Производная, Дифференциал, Интеграл c. cikkeit.

[28] L. az Enciklopédia Дифференциальное исчисление, Интегральное исчисление c. cikkeit.

[29] L. az Enciklopédia Дифференциальные уравнения c. cikkét.

[30] L. az Enciklopédia Вариационное исчисление c. cikkét.

[31] L. az Enciklopédia Движение (в геометрии) és Преобразования (геометрические) c. cikkét.

[32] L. az Enciklopédia Проективная геометрия c. cikkét.

[33] L. az Enciklopédia Аналитическая геометрия c. cikkét.

[34] L. az Enciklopédia Координаты c. cikkét.

az „alkalmazott“ matematika első fejezetének (a második fejezet például a mechanikát tartalmazná). A geometria eszerint alkalmazza a „tiszta“ matematika eredményeit és kialakítja saját módszereit a geometriai alakzatok és transzformációk különleges vizsgálatára. A matematika fejlődésének következő szakaszában a geometriának ez az alárendelt helyzete ismét megszűnt.

A XVII. és XVIII. század algebrája jórészt az $F(x) = 0$ egyenlet baloldalának, mint az x változó függvényének vizsgálatából eredő következményekkel foglalkozott. A problémának ez a kezelési módja lehetővé tette a valós gyökök számának vizsgálatát, módszereket adott a valós gyökök elválasztására és közelítő meghatározására, a komplex számok körében pedig arra vezetett, hogy D'ALEMBERT francia matematikus — nem teljesen szigorúan, de a XVIII. századbeli matematikusok számára eléggé meggyőzően — bebizonyította „az algebra alaptételét“, amely szerint bármely algebrai egyenletnek van legalább egy gyöke. A „tiszta algebra“ — mely nem használja fel a mennyiségek folytonos változásának az analízisből kölcsönvett fogalmát — szintén jelentős eredményeket ért el a XVII—XVIII. században. Elegendő a következő néhány példára rámutatnunk: a determinánsok segítségével általánosan előállították tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldását; kidolgozták a polinomok oszthatóságának, az ismeretlenek kiküszöbölésének elméletét, stb. A tulajdonképpeni algebra tényeinek és módszereinek a matematikai analízis tényeitől és módszereitől való tudatos elválasztása azonban csak a legutóbbi időre jellemző (XIX. század második fele—XX. század). A XVII—XVIII. században az algebrát legnagyobbrészt az analízis első fejezetének fogták fel, amely a mennyiségek közötti tetszőleges összefüggések vizsgálata és tetszőleges egyenletek megoldása helyett csak algebrai összefüggésekkel és algebrai egyenletekkel foglalkozik.

A változó mennyiségek új matematikájának megteremtése a XVII. században az élenjáró nyugateurópai országok matematikusainak műve volt. A XVIII. században a pétervári tudományos akadémia is a matematikai kutatás egyik fő központjává lesz; itt dolgozott az akkori idők egész sor külföldi származású kiváló matematikusa (L. EULER, D. BERNOULLI), és lassanként kialakult az orosz matematikai iskola, amelynek munkássága a XIX. század elejétől kezdve nagyszerű eredményekben bontakozott ki.

XVII. század. A matematika fentebb jellemzett új korszakának bekövetkezése szervesen összefügg annak az új matematikai módszerű természettudománynak XVII. századbeli megteremtésével, amelynek célkitűzése az egyes természeti jelenségek lefolyásának általános érvényű, matematikailag megfogalmazható természeti törvényekkel való magyarázata volt. A XVII. században igazán mélyreható és nagyszabású matematikai kutatások csak a természettudományok két területén folytak: a mechanikában [GALILEI olasz tudós felfedezi a testek esésének (1632, 1638), KEPLER német csillagász a bolygók mozgásának törvényeit (1609, 1619), NEWTON angol tudós felállítja az általános tömegvonzás törvényét (1687)] és az optikában [GALILEI (1609) és KEPLER (1611)] távcsöveket készítenek, NEWTON felépíti a fény korpuszkuláris, HUYGENS holland és HOOKE angol tudós pedig a hullámelméletét]. A természettudomány egyéb területein a matematika alkalmazása egyelőre az első, legegyszerűbb kvantitatív törvényszerűségek megállapítására szorítkozik [pl. BOYLE törvénye a gázok térfogatának és nyomásának összefüggéséről (1662), HOOKE rugalmasságtani törvénye (1660) stb.]. Mindazonáltal a XVII. század racionalista filozófiája (DESCARTES, SPINOZA, LEIBNIZ) már felveti a matematikai módszer egyetemességének gondolatát, amely a matematika e — par excellence filozófiai jellegű — fejlődési szakaszának tendenciáit különösen világossá teszi.

Noha a XVII. században megjelenő új matematikai módszereknek a technika problémáira való alkalmazása csak a következő két évszázadban bontakozott ki szélesen, „a gépek szórványos alkalmazása a XVII. században vált igen fontossá, mert e korszak nagy matematikusai számára gyakorlati támaszpontot és ösztönzést jelentett a modern mechanika megteremtésére". (MARX: A tőke, I. kötet, Szikra Kiadás, Budapest, 1948., 376. oldal.)

Új, komoly matematikai problémákat vet fel a XVII. században az óragyártás tökéletesedése és az a tény, hogy hajózási célokra pontos kronométerekre volt szükség. Az ingaórák egyik feltalálója HUYGENS volt (1657). Tizenhat évvel e találmánya után, 1673-ban megjelenteti „Ingaórák" c. könyvét, mely példaképe a technikai konstruktív gondolkodás és — az akkori időkhöz képest — finom matematikai kutatómódszerek szerves egyesítésének. Gyakorlati feladatokat adott a matematikának a XVII. században a kartográfia, a ballisztika és a hidraulika is. A XVII. századbeli szerzők megértik és szeretik hangsúlyozni a matematika gyakorlati jelentőségét. A XVII. században a polgári társadalom fejlődése lehetővé tette, hogy évszázadokra előre adjanak feladatokat a tudománynak, teljes mértékben felismerve e feladatok gyakorlati értékét. A természettudományokkal szoros kapcsolatot tartva a matematika a XVII. században fejlődésének új szakaszába lépett. Azokat az új fogalmakat, amelyek a matematika régi formális logikai kategóriáiba nem fértek be, igazolták a valóságos világ objektíve létező összefüggései. Így például a differenciálhányados fogalmának realitása következett a sebesség fogalmának reális létezéséből a mechanikában, a kérdés tehát nem úgy vetődött fel, hogy logikailag igazolható-e a differenciálhányados fogalma, hanem úgy, hogy *hogyan* igazolható.

A XVII. század matematikai vívmányainak sorát a *logaritmus*[35] felfedezése nyitja meg. NAPIER skót matematikus, mikor táblázatait 1614-ben közzéteszi, ezek megszerkesztésénél nem a számtani és a mértani haladvány régóta ismert tulajdonságaira hivatkozik, hanem abból indul ki, hogy a számok változásakor a logaritmus „folyamatosan" változik — azaz elsőnek vezeti be

[35] L. az Enciklopédia Логарифм c. cikkét.

az olyan folytonos függvény fogalmát, amely nincs előre megadva semmiféle algebrai kifejezéssel vagy geometriai konstrukcióval. 1637-ben DESCARTES[36] francia matematikus közzéteszi „Geometriá"-ját, amely a koordinátamódszer alapjait, valamint a görbék osztályozását tartalmazza. A görbék osztályozásánál Descartes megkülönbözteti egymástól az algebrai és transzcendens görbéket. Az algebrai görbéket „fajok" szerint osztályozza (m-edfajú görbéknek az akkori terminológia szerint azokat tekintették, amelyeket ma $(2m-1)$-ed- és $2m$-edrendűeknek nevezünk). Az algebrában vizsgálják a tetszőleges fokú egyenletek valós gyökeit, szoros kapcsolatban azzal a ténnyel, hogy a $P(x)=0$ egyenlet valós gyökei előállíthatók az $y=P(x)$ görbének az abszcisszatengellyel való metszéspontjaival (DESCARTES, NEWTON és ROLLE francia matematikus). FERMAT francia matematikus maximum-minimum-vizsgálatai és görbeérintő-meghatározásai lényegileg már differenciálszámítási módszereket tartalmaznak, noha ezek a módszerek még nincsenek kikristályosodva, és a „derivált", „differenciál" szavakat még nem ejti ki. A végtelen kicsiny mennyiségek analízisének másik kiindulópontja KEPLER német csillagász (1615) és CAVALIERI olasz matematikus (1635) által *kifejlesztett „oszthatatlan elemek módszere"*, amelyet KEPLER és CAVALIERI forgástestek köbtartalmának meghatározására és több más probléma megoldásában használtak fel. Ebben az a valódi elvi új, amelyet a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének alapfogalmai jelentenek, misztikus formában, megoldatlan ellentmondásként jelentkezik (így például a test köbtartalma és a köbtartalom nélküli síkmetszetek között, amelyek alapján a köbtartalom meghatározandó). Érthető tehát, ha KEPLER és CAVALIERI módszereit GULDIN svájci matematikus, aki szívesebben használta a klasszikus, szigorú exhausztiós módszert, kritikával fogadta. A végtelen kicsiny mennyiségek minden további nélküli használata azonban döntő győzelmet aratott FERMAT és PASCAL francia matematikusoknak, valamint WALLIS angol matematikusnak a területek meghatározásáról („kvadratúrákról") szóló munkáival. Így lényegében geometriailag megalapozták a differenciál- és integrálszámítást.

Ezzel párhuzamosan indul fejlődésnek a végtelen sorok elmélete.[37] A legegyszerűbb sorok tulajdonságait — kezdve a geometriai soron, mely a közönséges törteknek szakaszos tizedestörtek alakjában való előállítása kapcsán merült fel — WALLIS vizsgálta (1685). MERCATOR német tudós az $\frac{1}{1+x}=$ $=1-x+x^2-\cdots$ sorfejtés integrálásával megkapja a $\log(1+x)$ függvény hatványsorát (1668). NEWTON előállítja a binomiális formulát tetszőleges kitevőre, az $(1-x^2)^{-1/2}$ függvény sorfejtésének integrálásával megkapja $\arcsin x$ sorfejtését, végül meghatározza az $y=\log(1+x)$ és $y=\arcsin x$ függvények

[36] L. az Enciklopédia Декарт c. cikkét.
[37] L. az Enciklopédia Ряды c. cikkét.

inverzeinek sorfejtését:

$$x=e^y-1=\frac{y}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\cdots,$$

illetve

$$x=\sin y=\frac{y}{1}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^5}{120}-\cdots.$$

A végtelen sorok elméletének további fejlesztésében résztvett a XVII. századnak majdnem minden matematikusa (WALLIS, HUYGHENS, LEIBNIZ, J. BERNOULLI és mások). Meg kell jegyeznünk, hogy a XVII. századbeli szerzőknek elég világos fogalmaik voltak a sorozatok határértékéről és a sorok konvergenciájáról; szükségesnek tartották, hogy az általuk használt sorok konvergenciáját bebizonyítsák. A koordinátarendszer megalkotásával és a mechanikai irányított mennyiségek (sebesség, gyorsulás) fogalmainak elterjedésével a negatív szám fogalma teljesen szemléletes és világos lett. A komplex számok viszont, amelyek ugyanúgy, mint azelőtt, az algebrai apparátus melléktermékei maradtak, lényegében továbbra is csak terméketlen viták tárgyát alkották. A leghatározottabban A. GIRARD holland matematikus ismerte fel őket, aki elsőnek jelentette ki (1629), hogy minden n-edfokú egyenletnek n gyöke van (ami, mint ismeretes, csak a komplex számok körében igaz és csak akkor, ha a többszörös gyökök multiplicitását figyelembe vesszük).

A differenciál- és integrálszámítás tulajdonképpeni felfedezése a XVII. század utolsó harmadában történt. A publikáció szempotjából e téren az elsőség LEIBNIZet[38] illeti, aki 1682—86-ban közzétett cikkeiben részletesen kifejtette ennek az új diszciplínának az alapgondolatait. Az alapvető eredmények tényleges elérésének idejét tekintve viszont a differenciál- és integrálszámítás felfedezőjének joggal tekinthetjük NEWTONt[39], aki 1665—66-ban jutott el az alapgondolatokhoz. „Analízis egyenletek segítségével“ c. művét kéziratban átadta BARROW és COLLINS angol matematikusoknak; a kézirat tartalma az angliai matematikusok között széles körben ismeretessé vált. „A fluxiók módszere“ c. művét, melyben elméletének teljes tárgyalását adja, 1670—71-ben írta meg (a mű kiadására 1736-ban került sor); LEIBNIZ pedig csak 1673-ban kezdte meg a végtelen kicsiny mennyiségek analízisére vonatkozó vizsgálatait. NEWTON és LEIBNIZ voltak az elsők, akik általánosságban tekintették a függvények differenciálásának és integrálásának — az új diszciplínában alapvető szerepet játszó — műveletét, felfedezték a két művelet egymással való kapcsolatát (azaz a Newton—Leibniz-formulát) és általános, egységes szabályokat adtak a két művelet elvégzésére. A probléma megközelítése azonban más NEWTONnál és más LEIBNIZnél. NEWTON a „fluens“ (változó mennyiség) és a fluens „fluxiója“ (változásának sebessége) fogalmából indul ki.

[38] L. az Enciklopédia Лейбниц c. cikkét.
[39] L. az Enciklopédia Нютон c. cikkét.

Az adott fluensek fluxióinak, valamint a fluxiók közötti összefüggéseknek a fluensek alapján történő meghatározásának direkt feladatával (ez a differenciálás és a differenciálegyenletek felállításának problémája), azt az inverz feladatot állítja szembe, amely a fluxiók közötti adott összefüggésekből a fluensek meghatározását követeli meg — azaz, rögtön felveti a differenciálegyenletek integrálásának általános feladatát; a primitív függvény meghatározása speciális esetként, mint a $\frac{dy}{dx}=f(x)$ differenciálegyenlet integrálása szerepel. Ez a szempont NEWTON, a matematikai természettudomány megalkotója számára teljesen természetes: az ő fluxiószámítása annak a gondolatnak egyszerű tükröződése, hogy az elemi természeti törvények differenciálegyenletekkel fejezhetők ki, ahhoz pedig, hogy az e differenciálegyenletek által leírt folyamatok menetét előre meg tudjuk mondani, a differenciálegyenletek integrálására van szükség.[40] LEIBNIZ számára a központi kérdés a véges mennyiségekkel foglalkozó algebráról a végtelen kicsiny mennyiségek algebrájára való átmenet problémája; az integrált mindenekelőtt végtelen sok végtelen kicsiny mennyiség összegeként fogja fel, a differenciálszámítás alapfogalma pedig nála a differenciál, azaz a változó mennyiségek végtelen kicsiny növekményének fogalma. (Ezzel szemben NEWTON, miután bevezette az általa „momentum"-nak nevezett megfelelő fogalmat, későbbi munkáiban igyekszik azt kiküszöbölni.) Attól kezdve, hogy LEIBNIZ közzétette munkáit, a kontinentális Európában a differenciál- és integrálszámítás, a differenciálegyenletek integrálása és az analízis geometriai alkalmazásai terén intenzív közös munka indul meg, amelyben LEIBNIZen kívül résztvesznek J. BERNOULLI, I. BERNOULLI,[41] L'HOSPITAL francia matematikus és mások is. Ekkor alakul ki a matematikai munka mai módszere: az elért eredményeket rövid időn belül közlik folyóiratokban, és a többi matematikusok ezeket vizsgálataikban mindjárt fel is használják.

Az analitikus geometrián kívül, szoros kapcsolatban az algebrával és az analízissel, kifejlődik a differenciálgeometria[42] [ennek területén meg kell említenünk a görbületi sugár fogalmának bevezetését KEPLER által (1604), HUYGHENS vizsgálatait az evolutákról és evolvensekről (1673), stb.]; a XVII. században megalapozzák a tiszta geometria további fejlődését, főként a projektív geometria alapfogalmainak megteremtése irányában. DESARGUES francia matematikus a perspektíva elméletével foglalkozva (1636) kifejtette a végtelen távoli térelemek fogalmának egész rendszerét, bevezette az involució fogalmát stb. A kúpszeletek elméletét projektiv geometriai szemszögből DESARGUES (1639), PASCAL (1640) és LAGUERRE (1685) francia matematikusok dolgozzák ki. A XVII. század többi felfedezése közül meg kell említenünk még: a szám-

40 L. az Enciklopédia Флуксий исчисление c. cikkét.

41 L. az Enciklopédia Я. Бернулли, ill. И. Бернулли c. cikkeit.

42 L. az Enciklopédia Дифференциальная геометрия c. cikkét.

elmélet terén a teljes indukció elvének megfogalmazását (PASCAL, 1665) és FERMAT mélyenjáró kutatásait, amelyek jelentékeny részben meghatározták e tudományág további fejlődését; a kombinatorika alapfogalmainak kidolgozását (FERMAT, PASCAL, LEIBNIZ); az első valószínűségszámítási munkákat (FERMAT, PASCAL), amelyek a század végén elvi jelentőségű eredményben csúcsosodtak ki: J. BERNOULLI a legegyszerűbb alakban felfedezte a nagy számok törvényét (ennek publikálására 1713-ban került sor); a lánctörtek elméletét [CATALDI olasz (1613), SCHWENTER német matematikus (1617, 1618), WALLIS (1656), HUYGHENS (1703)]; a határozatlan együtthatók módszerét (DESCARTES, 1637); a poliéderekről szóló ún. Euler-tétel *megfogalmazását* (DESCARTES, 1620 körül). Be kell számolnunk még az első számológépek PASCAL (1641) és LEIBNIZ (1673—74) által való megkonstruálásáról is; ez egyébként sokáig gyakorlati következmények nélkül maradt.

XVIII. század. A XVIII. század elején még folytatja munkáját az analízis megteremtőinek nemzedéke (NEWTON, LEIBNIZ). A matematikai kutatások általános stílusa azonban lassanként megváltozik. A XVII. században elért, a módszer újdonsága által lehetővé tett sikerek elsősorban az alapgondolatok merészségének és mélységének voltak köszönhetők. Ennek következtében a matematika közelebb jutott a filozófiához. A XVIII. század elején a XVII. században megteremtett matematikai diszciplínák fejlődése elérte azt a színvonalat, amelyen a továbbhaladás már elsősorban a matematikai apparátus művészi kezelését és a nehéz feladatokra meglepő kerülőkön való megoldásában megnyilvánuló találékonyságot igényelt. A XVIII. század két legnagyobb matematikusa közül EULER[43] pétervári akadémikus ennek a virtuóz tendenciának a legkiemelkedőbb képviselője; LAGRANGE[44] francia matematikus, aki a megoldott problémák mennyisége és sokfélesége tekintetében talán elmarad EULER-től, abban tűnik ki, hogy a ragyogó technikát szélesen általánosító koncepciókkal egyesíti, ami jellemző vonása volt a XVIII. század második felének a felvilágosodás gondolkozóinak nagy filozófiai mozgalmával szoros kapcsolatban álló francia matematikai iskolájára. A matematikai analízis apparátusának szokatlan ereje által keltett lelkesedés természetszerűleg azt a hitet kelti, hogy ez az apparátus egészen automatikussá válhat, és hogy a matematikai számítások korrektek akkor is, ha olyan szimbólumokat is tartalmaznak, amelyeknek nincs értelmük. Míg e végtelen kis mennyiségek analízisének megteremtésekor az volt a probléma, hogy logikailag nem tudtak megbirkózni olyan fogalmakkal, amelyek pedig szemléletesen teljesen meggyőzőek voltak, most nyiltan hirdetik, hogy a közönséges szabályok szerint lehet számolni olyan matematikai kifejezésekkel is, amelyeknek nincs közvetlen értelmük, anélkül, hogy akár a szemléletre, akár az ilyen műveletek jogosultságának

[43] L. az Enciklopédia Эйлер c. cikkét.
[44] L. az Enciklopédia Лагранж c. cikkét.

valamiféle logikai igazolására támaszkodnának. A régibb nemzedék képviselői közül mind jobban efelé az irány felé hajlik LEIBNIZ, aki 1702-ben a racionális törtek képzetes kifejezésekre való bontás után történő integrálásával kapcsolatban „az ideális világ csodálatos beavatkozásáról" és ehhez hasonlókról beszél. A reálisabb beállítottságú EULER nem beszél csodákról, ellenben elfogadja a képzetes számokkal és a divergens sorokkal való számolás jogosultságát, mint olyan tapasztalati tényt, amelyet megerősítenek hasonló átalakítások útján kapott más eredmények. [Így például EULER szerint $+1-1+2-6+24-120+\cdots+(-1)^n n!+\cdots=0{,}5963475922\ldots$]. EULER és MACLAURIN skót matematikus mindazonáltal megkezdik a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének racionális megalapozására irányuló munkát. Ennek az iránynak a XVIII. század matematikusai közül a logikai szigorúságra és a világosságra a legkövetkezetesebben törekedő képviselője D'ALEMBERT[45] francia enciklopédista. Így az analízis logikai alapjait illetőleg D'ALEMBERT például a végtelen nagy és végtelen kicsiny változó mennyiségek tekintetében, vagy a differenciálhányadosról, mint két végtelen kicsiny mennyiség hányadosának véges határértékéről nagy vonásokban egészen modern nézeteket vall. A matematikai analízis megalapozására irányuló különböző módszerek komoly kritikájáról nevezetes Sz. J. GURJEVICS orosz matematikusnak „Опыт об усовершении Элементов геометрии (Kísérlet a geometria elemeinek tökéletesebbé tételére) c. munkája (1798). Az analízis rendszeres logikai megalapozása azonban csak a XIX. században valósult meg. Ennélfogva LAGRANGE, akit kortársainak kifogásolható elgondolásai nem elégítettek ki, kísérletet tett arra, hogy egyszerre küszöbölje ki az összes nehézségeket, mind azokat, amelyek magával a függvényfogalommal, mind pedig azokat, amelyek a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének megalapozásával voltak kapcsolatosak, és tisztán algebrai álláspontra helyezkedett: nem magukat a függvényeket tekintette, hanem Taylor-sorukkal helyettesítette őket, és ily módon a differenciálást és integrálást, valamint az analízis összes egyéb műveleteit visszavezette a sorok együtthatóival való algebrai műveletekre.

Míg a XVII. század legkiválóbb matematikusai igen gyakran egyúttal filozófusok vagy kísérleti fizikusok is voltak, a XVIII. században a matematikai tudományos munka önálló foglalkozássá vált. A XVIII. század matematikusai különböző társadalmi rétegekből származó emberek, akik matematikai képességeikkel korán kiváltak és gyors akadémikus karriert futottak be. (EULER például bázeli lelkészcsaládból származott, 20 éves korában hívták meg adjunktusnak a pétervári Tudományos Akadémiához, 23 éves korában ugyanott professzor lett, 37 éves korában pedig a berlini Tudományos Akadémia matematika-fizikai szakosztályának elnöke; LAGRANGE francia tiszt fia volt, 18 éves korában professzor Torinóban, 30 éves korában a berlini Tudo-

[45] L. az Enciklopédia Д'Аламбер c. cikkét.

mányos Akadémia matematika-fizikai szakosztályának elnöke; LAPLACE francia paraszt fia, 18 éves korában a beaumonti katonai iskola előadója, 20 éves korában a párizsi katonai iskola professzora, 37 éves korában pedig a párizsi tudományos akadémia tagja lett.) Emellett azonban a matematikai jellegű természettudományok (mechanika, elméleti fizika), valamint a matematika technikai alkalmazásai a matematikusok tevékenységi körében maradnak. EULER hajókonstrukciós és optikai problémákkal foglalkozik, LAGRANGE megteremti az analitikus mechanika alapjait. LAPLACE, aki alapjában véve matematikusnak tartotta magát, korának egyik legkiválóbb csillagásza és fizikusa is volt — és így tovább.

Térjünk át a XVIII. század matematikai eredményeinek az egyes területek szerinti felsorolására. Kezdjük a számelmélettel. EULER, LAGRANGE és LEGENDRE francia matematikus munkáinak eredményeként a számelmélet veszi fel elsőnek rendszeres tudomány jellegét. LAGRANGE megadta a másodfokú határozatlan egyenletek általános megoldását (1769-ben, közzétéve 1771-ben). EULER felfedezte a kvadratikus maradékok[46] reciprocitási tételét (1772, közzétéve 1783-ban). Ugyanő a prímszámok vizsgálatába bevonta az ún. *zeta-függvényt*[47] és ezzel lerakta az analitikus számelmélet alapkövét.

Lánctörtbefejtés segítségével EULER bebizonyította (1737, közzétéve 1744-ben) e és e^2, LAMBERT német matematikus pedig (1766, közzétéve 1768-ban) π irracionalitását. Az algebrában CRAMER svájci matematikus 1750-ben a lineáris egyenletrendszerek megoldására bevezette a determinánsokat (ezeket már LEIBNIZ is ismerte, de felfedezését nem publikálta). A lineáris algebra továbbfejlesztésével foglalkozott LAPLACE és VANDERMONDE francia matematikus. NEWTON, EULER és BÉZOUT francia matematikus kidolgozták a polinomok oszthatóságának és az ismeretlenek kiküszöbölésének elméletét. EULER tapasztalati ténynek tekintette, hogy minden algebrai egyenletnek van $A+B\sqrt{-1}$ alakú gyöke. Lassanként gyökeret ver az a meggyőződés, hogy általában minden képzetes kifejezés (nemcsak az algebrában, hanem az analízisben is) $A+B\sqrt{-1}$ alakra hozható. D'ALEMBERT bebizonyította (1748), hogy polinom abszolút értékének nem lehet zérustól különböző minimuma (ez az ún. D'Alembert-lemma), és ezt az eredményt úgy tekintette, mint annak bizonyítását, hogy minden algebrai egyenletnek van gyöke. MOIVRE angol matematikusnak és EULERnek a komplex változó exponenciális és trigonometrikus függvényei közti összefüggést megadó formulái a komplex számok analízisbeli alkalmazásának további bővülésére vezettek. NEWTON, STIRLING skót matematikus és EULER megvetették a differenciaszámítás alapját[48]; LAGRANGE pedig szimbolikus számítási módszert fejlesztett ki a Δ és d operátorok pozitív és negatív kitevőjű hatványainak bevezetésével; LAPLACE általános mód-

[46] L. az Enciklopédia Квадратычные вычеты c. cikkét.

[47] L. az Enciklopédia Дзета-функция c. cikkét.

[48] L. az Enciklopédia Конечных разностей исчисление c. cikkét.

szereket talált a differenciaegyenletek megoldására. TAYLOR angol matematikus (1715) felfedezte a róla elnevezett formulát, mely lehetővé teszi bármely függvény hatványsorba fejtését. A XVIII. századbeli kutatóknál, különösen EULER-nél, a sorok az analízis egyik leghatékonyabb és legrugalmasabb eszközévé válnak. D'ALEMBERT-tel megkezdődik a sorok konvergenciakritériumainak komoly vizsgálata. EULER, LAGRANGE és főként LEGENDRE megkezdik az elliptikus integrálok vizsgálatát; ezek voltak az első olyan nem elemi függvények, amelyeket mélyreható speciális vizsgálatnak vetettek alá. I. BERNOULLI, RICCATI olasz matematikus, D. BERNOULLI,[49] EULER és CLAIRAUT francia matematikus első- és másodrendű közönséges differenciálegyenletek újabb típusainak megoldását találják meg. EULER adta meg az első módszert a tetszőlegesrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldására (1739, közzétéve 1743-ban). D'ALEMBERT differenciálegyenlet-rendszereket vizsgált. LAGRANGE és LAPLACE kiépítették a tetszőleges rendű lineáris differenciálegyenletek megoldásának általános elméletét; EULER, MONGE francia matematikus és LAGRANGE megvetették az elsőrendű, EULER, MONGE és LAPLACE pedig a másodrendű parciális differenciálegyenletek általános elméletének alapjait. Különös jelentőségű volt itt a rezgő húr egyenlete, valamint a függvények trigonometrikus sorokba fejtésének ezzel kapcsolatos bevezetése, ezzel összefüggésben EULER, D. BERNOULLI, D'ALEMBERT, MONGE és LAGRANGE között vita keletkezett a függvényfogalomról,[50] ami előkészítette az analitikus kifejezés fogalma és az általános függvényfogalom közti viszony tisztázása terén a XIX. században elért eredményeket. Végül az analízisnek a XVIII. században keletkezett fejezete a variációszámítás, amelyet EULER és LAGRANGE teremtett meg. A. MOIVRE, J. BERNOULLI, P. LAPLACE és T. BAYES angol matematikus a XVII—XVIII. század speciális eredményei alapján lerakták a valószínűségszámítás[51] alapjait.

A geometria területén EULER betetőzte az elemi analitikus geometria rendszerét. NEWTONtól kezdve rendszeresen vizsgálták a harmadrendű görbéket. WARING angol matematikus felfedezte a tetszőleges rendű algebrai görbék több tulajdonságát. EULER, CLAIRAUT, MONGE és MEUSNIER francia matematikus munkáikban lerakták a térgörbék és a felületek differenciálgeometriájának alapjait. A differenciálgeometria problémái a parciális differenciálegyenletek elmélete fentebb említett fejlődésének egyik fő forrását alkották. LAMBERT kifejleszti a perspektíva elméletét, MONGE pedig végleges formába öntötte az ábrázoló geometriát.[52]

Ebből az áttekintésből látható, hogy a XVIII. század matematikája, mely a XVII. század eszméin alapult, a munka lendülete tekintetében messze felül-

[49] L. az Enciklopédia Бернулли д с. cikkét.
[50] Részletesebben l. az Enciklopédia Функция c. cikkét.
[51] L. az Enciklopédia Теория вероятностей c. cikkét.
[52] L. az Enciklopédia Начертательная геометрия c. cikkét.

múlta az előző századokat. Ez a felvirágzás főleg az akadémiák tevékenységével kapcsolatos; az egyetemek kisebb szerepet játszottak. A legnagyobb matematikusoknak az egyetemi oktatástól való távolmaradása megtérült azzal, hogy az így felszabaduló energiát tankönyvek és terjedelmes speciális vizsgálatokat is magukban foglaló traktátusok megírására használhatták. Új lökést adott a tudomány szervezetének a XVIII. század végén a francia polgári forradalom. A legnagyobb matematikusok (LAGRANGE, LAPLACE, LEGENDRE, MONGE) bekapcsolódnak a mértékek méterrendszerének megalkotásába, a délkör hosszúságának ezzel kapcsolatos megmérésébe, az állami eszközökkel megszervezett új trigonometriai táblázat-kiszámításokba stb. A matematika további fejlődésére legjelentősebbnek bizonyult a párizsi Ecole Polytechnique megalapítása 1794-ben, MONGE vezetése alatt; a XIX. század elején ez az iskola lett a francia matematikai kultúra fő központja.

III. A MODERN MATEMATIKA

A XIX. és a XX. században a matematikai analízisnek a XVII. és a XVIII. században keletkezett összes ágai erőteljesen továbbfejlődtek. Rendkívül kibővült a XIX. és a XX. században a matematikai analízis alkalmazása a természettudomány és a technika által felvetett problémák megoldására. E mennyiségi növekedés mellett azonban a XVIII. század legvégén és a XIX. század elején a matematika fejlődésében több lényegileg új vonás is megfigyelhető.

1. A matematika tárgyának bővülése

A XVII. és a XVIII. században felhalmozódott hatalmas mennyiségű tény-anyag szükségessé tette a mélyenszántó logikai elemzést és a matematika anyagának új szempontok alapján való csoportosítását. A komplex számok geometriai interpretációjának megalkotása és felhasználása [WESSEL dán geodéta (1799) és ARGAND francia matematikus (1806)], annak bebizonyítása, hogy az általános alakú ötödfokú egyenletek gyökök segítségével nem oldhatók meg [RUFFINI olasz (1799) és — szigorúbban — ABEL norvég matematikus (1824)], a komplex változós függvénytan alapjainak lerakása CAUCHY francia matematikus által, CAUCHYnak a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének szigorú megalapozására irányuló munkái, a nem-euklideszi geometria megteremtése [N. I. LOBACSEVSZKIJ (1826),[53] közzétéve 1829—30-ban, és BOLYAI JÁNOS magyar matematikus (1832)], GAUSS német matematikus munkái a felületek belső geometriája terén (1827) — ezek a matematika fejlődésében a XVIII. és a XIX. század határán kikristályosodó új irányok legjellemzőbb példái.

[53] L. az Enciklopédia Лобачевский c. cikkét.

A matematikának a természettudománnyal való kapcsolata lényegében ugyanolyan szoros marad, mint azelőtt, de most bonyolultabb formákat öltött. A nagy, új elméletek nem csupán a természettudományban és a technikában felmerült problémák közvetlen hatására jelennek meg, hanem magának a matematikának belső szükségletéből is. Alapjában véve ilyen jellegű volt a komplex változós függvénytan kifejlődése, amely a XIX. század elején és közepén az egész matematikai analízisben központi helyet foglalt el. A fejlődés fő vonala itt abban állt, hogy a komplex számkörre való áttérés világosabbakká és áttekinthetőbbekké tette a vizsgált függvények tulajdonságait. A komplex változós függvények közvetlen reális (például konform ábrázolást előállító függvényekként való) alkalmazása iránti széles érdeklődés csak később alakult ki, noha az ilyen alkalmazások lehetőségére már EULER rámutatott.

A matematika belső fejlődésének eredményeként keletkező új elméleteknek még jelentősebb példája LOBACSEVSZKIJ „elképzelt geometriája".[54] LOBACSEVSZKIJ igyekezett tisztázni, hogyan keletkeznek a geometriai alapfogalmak az anyagi valóságból és ennek, valamint a közönséges euklideszi geometria logikai analízisének eredményeképpen ismerte fel az új geometriai rendszer lehetőségét. Magának LOBACSEVSZKIJnek csak néhány integrál kiszámítására sikerült alkalmaznia geometriáját. Később felfedezték a Lobacsevszkij-geometriának a felületelmélettel és a transzformációs csoportok elméletével való szoros kapcsolatát, alkalmazták ezt a geometriát fontos analitikus függvényosztályok vizsgálatára stb. LOBACSEVSZKIJnek az a javaslata, amelyben lehetségesnek tartotta geometriai eszméinek a valóságos fizikai tér vizsgálatára való alkalmazását, csak a XX. században, a relativitáselmélet megalkotásával vált valósággá.

Még egy példát hozhatunk fel arra, hogyan nyert nagyszerű igazolást a korábban felfedezett matematikai tényeknek a XVIII. század végén és a XIX. század elején általánosabb nézőpontokból történt felülvizsgálása a XIX. század második felében és a XX. században felmerült természettudományi problémákban. A csoportelmélet[55] úgy keletkezett, hogy annak idején LAGRANGE a magasabbfokú algebrai egyenletek gyökökkel való megoldhatóságának problémájával kapcsolatban foglalkozott a szubsztitúciós csoportokkal. Éppen ebből indultak ki RUFFINInak és ABELnek a fentebb említett eredményekre vezető vizsgálatai, amelyekre valamivel később GALOIS francia matematikus tette fel a koronát azzal, hogy szubsztitúciós csoportok segítségével véglegesen eldöntötte azt a problémát, milyen feltételek mellett oldható meg tetszőleges fokú algebrai egyenlet gyökökkel (1830—32, közzétéve 1832-ben és 1846-ban). A XIX. század közepén A. CAILEY angol matematikus megadta a csoport fogalmának általános „absztrakt" definícióját. S. LIE norvég matematikus,

[54] L. az Enciklopédia Лобачевского геометрия c. cikkét.

[55] L. az Enciklopédia Группы c. cikkét.

általános geometriai problémákból kiindulva, kidolgozta a folytonos csoportok[56] elméletét. És csak mindezek után állapította meg J. Sz. FJODOROV orosz krisztallográfus és geométer (1890), valamint SCHOENFLIESS német matematikus (1891), hogy a kristályok szerkezete[57] csoportelméleti törvényszerűségeket mutat; még később igen hatékony kutatási segédeszköz lett a csoportelmélet a kvantummechanikában.

A mechanikai és fizikai problémák közvetlenebb és állandóbb hatására alakul ki a vektor- és tenzoranalízis. Mindinkább megmutatkozott ugyanis, hogy a mechanika és a fizika szempontjából „skaláris"-nak nevezett mennyiségek, amelyek a valós számfogalom kialakulásának eredeti materiális alapját alkották, csak speciális esetei a többdimenziós mennyiségeknek. E többdimenziós mennyiségek közötti függvénykapcsolatokkal foglalkozik a vektor- és tenzorszámítás.[58] A vektor- és tenzorfogalomnak végtelen sok dimenziós mennyiségekre való kiterjesztését a funkcionálanalízis[59] hajtja végre, szorosan kapcsolódva a kvantummechanika követelményeihez.

Ily módon a matematika által vizsgált mennyiségi vonatkozások és térformák köre mind a matematika belső szükségleteinek eredményeként, mind a természettudományban fellépő problémák igényeinek megfelelően hatalmasan kibővül: kiterjed a tetszőleges csoportok elemei, a vektorok, operátorok, függvényterek közti vonatkozásokra, a tetszőleges dimenziójú terekben előforduló formák egész sokféleségére stb. Ha a „mennyiségi vonatkozások" és „térformák" kifejezéseket ebben a kibővített értelemben tekintjük, akkor a matematikának cikkünk elején idézett definíciója kiterjeszthető a matematika új, modern fejlődési szakaszára is.

A matematika fejlődésének a XIX. században kezdődő legutóbbi korszakában a lényegesen új vonás az, hogy a vizsgálat tárgyát alkotó mennyiségi vonatkozások és térformák szükséges kibővítésének problémái a matematikusok tudatos és aktív érdeklődésének tárgyává lesznek. Míg azelőtt például a negatív és a komplex számok bevezetése, valamint a velük való műveletek szabályainak pontos megfogalmazása hosszadalmas munkát igényelt, addig most a matematika fejlődése megkövetelte a felmerülő szükségletek szerint új geometriai rendszerek új, nem kommutatív, sőt nem asszociatív „szorzást" tartalmazó algebrák stb. tudatos és tervszerű megalkotására szolgáló módszerek kidolgozását. Ma például az, hogy nem kell-e valamilyen kontakt relékapcsolás-típus analízise és szintézise kedvéért egy új „algebrát" felépíteni új műveleti szabályokkal, a mindennapos technikai-tudományos gyakorlatban semmiféle különösebb csodálkozást nem keltő kérdés. A matematikai gondolkodásmód egész felépítésének azt a XIX. század folyamán történt

[56] L. az Enciklopédia Непрерывние группы c. cikkét.
[57] L. az Enciklopédia Кристаллография c. cikkét.
[58] L. az Enciklopédia Векторное исчисление, ill. Тензорное исчисление c. cikkeit.
[59] L. az Enciklopédia Функциональный анализ c. cikkét.

átalakulását, amely ide vezetett, fontosság tekintetében alig lehet túlbecsülni. Ebből az elvi szempontból a XIX. század elejének matematikai felfedezései közül LOBACSEVSZKIJ nem-euklideszi geometriája a legfontosabb. Ennek a geometriának a példáján dőlt ugyanis meg az ezeréves fejlődés által szentesített matematikai axiómák állandóságába vetett hit, értették meg azt, hogy olyan helyesen végrehajtott absztrakció útján, mely elveti a belső logikai szükségszerűség által nem indokolt korábbi korlátozásokat, új matematikai elméletek alkothatók, és bizonyult be az, hogy az ilyen absztrakt elméletek az idő folyamán mind szélesebb körű, teljesen konkrét alkalmazásra kerülhetnek.

A matematika tárgyának definíciójával kapcsolatos fenti megjegyzésünkhöz kiegészítésképpen meg kell jegyeznünk, hogy ha a „mennyiségi vonatkozások" kifejezést elég széles értelemben tekintjük, akkor a térformák a mennyiségi vonatkozások speciális eseteinek tekinthetők, úgyhogy ebből a szempontból nézve a dolgot, a „térformák" külön megemlítése a matematika definíciójában csupán azt a célt szolgálja, hogy jelezze a matematika geometriai részeinek viszonylagos önállóságát. A mennyiségi vonatkozásokat (a kifejezés általános filozófiai értelmében) az jellemzi, hogy — a minőségi vonatkozásoktól eltérőleg — nincs közük azoknak a dolgoknak a konkrét természetéhez, amelyek között fennállnak. Ezért különíthetők el teljesen a mennyiségi vonatkozások konkrét tartalmuktól, mint olyan valamitől, ami a dolog lényege szempontjából érdektelen (l. ENGELSnek cikkünk elején idézett mondatait). Így például valamely (meghatározott) szám ugyanaz marad, függetlenül attól, hogy milyen dolgok számát fejezi ki; az $y = ax + b$ lineáris összefüggés mindig ugyanaz marad, függetlenül attól, hogy x-szel és y-nal mit jelölünk stb. Mondhatjuk, hogy a mennyiségi vonatkozások tiszta vonatkozások, oly módon értve ezt, hogy a konkrét valóságból, amelyből absztrahálódtak, nem tartanak meg egyebet, mint amit definíciójuk előír. A mennyiségi vonatkozásoknak ezekből az általános tulajdonságaiból könnyen megmagyarázhatók a matematikának — mint a mennyiségi vonatkozások tudományának — alapvető sajátságai. A matematika túlnyomórészt deduktív volta következik abból, hogy a tiszta vonatkozások összes tulajdonságainak benne kell lenniük az illető vonatkozás definíciójában. Az, hogy minden matematikai elmélet széles körben, a természettudomány és a technika legkülönbözőbb konkrét tartalmú területein alkalmazható, érthetővé válik abból, hogy a matematika csak olyan vonatkozásokkal foglalkozik, amelyek függetlenek azoknak a tárgyaknak konkrét természetétől, melyek között a vizsgált vonatkozások fennállnak. A matematika modern korszakát éppen az az elvi tulajdonság jellemzi, hogy olyan rugalmas módszereket alkot, amelyek igen általános és különféle mennyiségi vonatkozások vizsgálatára alkalmasak (a „mennyiségi vonatkozásokat" a fentemlített széles értelemben véve). Az a tény, hogy a matematikában gyakran használják a „kvalitatív módszer"[60] kifejezést, a fentieknek csak látszólag mond ellent. A matematika által vizsgált vonatkozások a fentemlített tág értelemben mindig mennyiségiek. Amikor azonban a matematika valamely területén azok mellett a mennyiségi vonatkozások mellett, amelyek már standard kifejezést nyertek és meghatározott számítási szabályoknak vannak alávetve, a vizsgált jelenségeknek alapvetően új oldalát teszik tanulmányozás tárgyává, akkor azt mondják, hogy a kvantitatív módszerekről kvalitatívakra térnek át. Így például a differenciálegyenletek elméletében a kvalitatív módszerekhez sorolják az integrálvonalak „egészükben" való vizsgálatának módszereit, amelyek általános topológiai meggondolásokon alapulnak és amelyekhez nincs szükség a differenciálegyenlet integrálására. Fejlett alakjukban azonban ezek a topológiai módszerek

[60] L. az Enciklopédia Качественные методы c. cikkét.

is meghatározott algoritmusnak vannak alávetve, amelyek bizonyos numerikus karakterisztikák (a leképezés fokszáma stb.) kiszámítására vezetik vissza a problémát; ez pedig már világosan mutatja, hogy ezek az újabb vonatkozások is mennyiségiek. A (ebben a relatív értelemben) kvalitatív módszerek nagy súlya a modern matematikában a matematika felépítésének bonyolultságával magyarázható: az egyes matematikai elméletekből állandóan újabb és újabb elméletek nőnek ki, amelyek új objektumokkal foglalkoznak (az egyenletek gyökökkel való megoldhatóságának problémája a megfelelő szubsztitúciós csoportok szerkesztésére vezethető vissza stb.).

Ami a „térformák" kifejezést illeti, arra vonatkozólag, hogy ennek értelmezését milyen határokig ésszerű kiterjeszteni, nincs kialakult álláspont a matematikai filozófiai irodalomban. A közönséges háromdimenziós euklideszi tér geometriája csupán speciális esete a modern geometria által alkotott különféle rendszereknek, és e geometriai rendszereket távolról sem mind éppen (a szó közvetlen értelmében) valóságos világ térformáinak vizsgálata céljából konstruálták meg. Éppen ezért a „Geometria" c. cikk[61] azt mondja, hogy a geometria a térbeli vonatkozások és formák, *valamint a valóságos világ egyéb, a térbeliekhez hasonló felépítésű vonatkozásainak és formáinak* tudománya. Ha a tulajdonképpeni térformáknak és a térbeliekhez csupán „hasonló" formáknak ezt a megkülönböztetését következetesen továbbvinnénk, akkor magát a „tér" kifejezést is egyedül csupán magára a valóságos térre volna szabad alkalmazni; ennek minden tekintetben való teljes vizsgálata azonban mai fogalmak szerint a *fizika* tárgykörébe tartozik, a matematika ezt csupán egyes közelítésekben vizsgálja (ilyen közelítés például az euklideszi tér, amely gyakorlati célokra elegendő).

A matematikai irodalomban azonban általánosabb a „tér" kifejezés *tágabb* értelemben való használata.[62] A „tér" kifejezésnek ez a tágabb értelmezése természetes módon kapcsolódik a „térformák" kifejezés *tágabb* értelmezéséhez, amely magában foglalja mindazokat a formákat is, amelyeket a „Geometria" c. cikk „térbeliekhez hasonlóknak" nevez. A mechanikában és a fizikában alkalmazott tetszőleges dimenziószámú fázisterek[63] példáján látható, hogy az ilyen tágabb értelemben vett formulák is ugyanúgy a *valóságos világ* valóságos formái (és nem a geométerek önkényes konstrukciói), mint a szűkebb értelemben vett térformák. Az az állítás, hogy a geometria a valóságos világ *térbeli vonatkozásainak* és formáinak tudománya, ma csak akkor igaz, ha ezeket a kifejezéseket tágabb értelmükben vesszük.

2. A matematika megalapozásának problémái
A halmazelmélet és a matematikai logika szerepe

A matematika tárgyának XIX. századbeli hatalmas méretű bővülése erősen ráirányította a figyelmet a „megalapozás" problémáira, azaz a kiinduló állítások (axiómák) kritikai felülvizsgálatára, a szigorúan felépített definíció- és bizonyításrendszer konstruálásával, valamint a bizonyításokban alkalmazott logikai módszerek kritikájával kapcsolatos problémákra. Az ilyen tárgyú munka fontosságát akkor értjük meg igazán, ha figyelembe vesszük azt, amit a matematikai elmélet fejlődése és az elméletnek a természettudomány és a tech-

[61] L. ott Геометрия.

[62] Ennek részletes magyarázatát l. az Enciklopédia Геометрия c. cikkének III. és VII. részében.

[63] L. az Enciklopédia Фазовые пространства c. cikkét.

nika gyakorlati anyaga által való igazolása közti kölcsönhatás megváltozott jellegéről mondottunk. Olyan terjedelmes és sokszor igen elvont elméleteknél, amelyek az elmélet megalkotásának alapjául szolgáló speciális eseteken kívül még további hatalmas anyagot tartalmaznak, ennek az anyagnak konkrét gyakorlati alkalmazásáig évtizedek telhetnek el, tehát már nem várható, hogy az elmélet korrektségének esetleges hiányosságait a gyakorlat regisztrált konkrét hibák formájában közvetlenül jelezze. Ehelyett az emberi szellem munkájával összegyűjtött tapasztalatok egészéhez kell folyamodni, amely mintegy összegeződik a bizonyítások „szigorúságával" szemben támasztott, a tudomány által fokozatosan kidolgozott követelményekben. Így tehát a matematika egyes ágainak szigorú megalapozására irányuló munka joggal foglal el jelentős helyet a XIX. és a XX. század matematikájában. Ennek a munkának az analízis alapjaira (a valós szám fogalmának felépítése, a határértékek elmélete és a differenciál- és integrálszámítás összes módszereinek szigorú megalapozása) vonatkozó eredményei ma már többé-kevésbé teljesen megtalálhatók a tankönyvekben (még a tisztán gyakorlati jellegűekben is). Előfordul azonban manapság is, hogy a matematikai elmélet szükségletei által gyakorlatilag már megkövetelt szigorú megalapozás késik. Így volt ez hosszú időn át már a XIX. és a XX. század fordulóján a mechanikában és az elektrotechnikában széleskörű alkalmazást nyert *operátorszámítás*sal.[64] Csak nagy késéssel készült el a *valószínűségszámítás*[65] logikailag kifogástalan felépítése. Még ma is hiányzik sok, az elméleti fizikában széles körben alkalmazott matematikai módszer szigorú megalapozása; sok fontos elméleti fizikai eredményhez olyan matematikai módszerek alkalmazásával jutnak el, amelyek nem jogosultak, és a helyes eredményt néha csak egy nyilvánvalóan hibás tényezőtől, — amelyet aztán a szóban forgó „matematikai levezetéstől" teljesen idegen meggondolásokkal küszöbölnek ki — „eltekintve", vagy végtelenné váló tagoknak az összegből való elhagyásával adják meg stb.

A logikai szigorúság követelményének az a szabványa, melyet a matematikusok az egyes matematikai elméletek felépítésére irányuló gyakorlati munkájukban mindmáig vezérelvként követnek, csak a XIX. század végén alakult ki. Ez a vezérelv a matematikai diszciplinák halmazelméleti koncepcióján alapszik.[66] Eszerint minden matematikai elmélet olyan objektumok egy vagy több halmazával dolgozik, amelyek között bizonyos vonatkozások állnak fenn. Ezeknek az objektumoknak és vonatkozásoknak minden olyan formális tulajdonságát, amelyek a szóban forgó elmélet felépítéséhez szükségesek, axiómák alakjában rögzítjük; az axiómák objektumok és vonatkozások konkrét természetét nem érintik. Az elmélet alkalmazható objektumoknak és vonatkozásoknak minden olyan rendszerére, amely az elmélet alapját alkotó axiómarendszert kielégíti. Ennek megfelelőleg az elmélet csak akkor tekinthető logikailag szigorúan kifogástalannak, ha felépítése folyamán az objektu-

[64] L. az Enciklopédia Операционное исчисление c. cikkét.

[65] L. az Enciklopédia Теория вероятностей c. cikkét.

[66] L. az Enciklopédia Множеств теория és Аксиома c. cikkeit, valamint az Алгебра c. cikk III. és a Геометрия c. cikk VII. részét.

moknak és a köztük fennálló vonatkozásoknak semmiféle olyan konkrét tulajdonsága, amely az axiómákban nem volt megemlítve, nem kerül felhasználásra, és az elmélet felépítése közben bevezetett új objektumok és vonatkozások az axiómák által mind formálisan definiálhatók.

Ezekből a követelményekből következik egyebek közt, hogy ha egy matematikai elmélet valamely objektumrendszerre érvényes, akkor érvényes minden, a szóban forgó izomorf"[67] objektumrendszerre is. Megjegyezzük itt, hogy az izomorfia néha igen absztraktnak tűnő fogalma pusztán a fizikai „modellalkotás" [a fizika valamely ágába tartozó (pl. hőtani) jelenségnek a fizika valamely más területéről való (pl. elektromos) „modell"-el történő leírása] gondolatának matematikai kifejezése.[68]

A matematikai elméletek felépítésének ez a koncepciója lényegében nem más, mint a matematika ama definíciójának, hogy „a matematika a mennyiségi vonatkozások tudománya" — a „mennyiségi vonatkozások" kifejezést a fentebb kifejtett tágabb értelemben véve — bizonyos konkretizálása. Az, hogy a mennyiségi vonatkozásoknak „nincsen közük" azoknak a tárgyaknak a konkrét természetéhez, amelyekre vonatkoznak, itt abban fejeződik ki, hogy bármely objektumrendszerről minden megszorítás nélkül át lehet térni tetszőleges, vele izomorf rendszerre.

A halmazelméleti felfogás nemcsak a matematikai „szigorúság" ma általánosan elfogadott szabványát teremtette meg, hanem lehetővé tette a tájékozódást is a különféle lehetséges matematikai diszciplinák között, továbbá e diszciplinák rendszerezését. Így a tiszta algebra definiálható, mint az olyan objektumrendszerek tudománya, amelyekben véges számú, egyenként véges számú objektumra alkalmazható olyan művelet van értelmezve, mely a szóban forgó véges számú objektumhoz a rendszer egy meghatározott új elemét rendeli hozzá. Az algebrai test esetében például két művelet van értelmezve: az összeadás és a szorzás, mindkettő két-két objektumhoz rendel hozzá egy harmadikat. Ezzel a tiszta algebrát megkülönböztettük az analízistől és a geometriától (ez utóbbit a szó tulajdonképpeni értelmében véve, azaz feltételezve a vizsgált terek bizonyos „folytonosságát"), amelyek elengedhetetlenül megkövetelik a végtelen sok objektumra alkalmazott „határérték"-relációk bevezetését.

Az egyes speciális matematikai diszciplinák (mint pl. a valószínűségszámítás) axiomatikus tárgyalásánál természetesen nem a semmiből indulnak ki, hanem felhasználják előzőleg felépített diszciplinák fogalmait (például a természetes vagy a valós szám fogalmát). Ennek következtében a matematikai diszciplinák kifogástalan axiomatikus felépítése ma már nem különlegesen nehéz feladat és mind általánosabbá válik. Ez a vizsgálati és tárgyalási mód az olyan bonyolult és ugyanakkor igen általános alakulatok tanulmányozásánál, mint pl. a folytonos csoportok,[69] vagy a lineáris terek[70] különféle alakjai, a világosságnak és a hibák elkerülésének elengedhetetlen feltétele.

A halmazelméleti szempont helyessége az összes konkrét matematikai diszciplinákban, még az igen általános jellegűekben is (a valós számok elméletétől a topologikus terek általános elméletéig stb.) igazolódott, amennyiben bevezetésével a konkrét matematikai vizsgálatokból gyakorlatilag eltűntek a definíciók korrektségével és a bizonyítások kellően meggyőző voltával kapcsolatos, hosszú időn át tartó kétségek és nézeteltérések. Azok a homályos pontok, sőt egyenest ellentmondások, amelyek magában a halmazelméletben merültek fel,[71] főként ott jelentkeztek, ahol a végtelen halmaz fogalmát túlzottan, a szóbajöhető alkalmazások szempontjából felesleges általánossággal értelmezték. Elvileg azonban szem

[67] L. az Enciklopédia Изоморфизм c. cikkét.

[68] L. az Enciklopédia Моделирование és Моделирование математическое c. cikkeit.

[69] L. az Enciklopédia Непрерывные группы c. cikkét.

[70] L. az Enciklopédia Линейные пространства c. cikkét.

[71] L. az Enciklopédia Парадоксы математические c. cikkét.

előtt kell tartanunk, hogy — a természetes és a valós számok aritmetikáján kezdve — az összes alapvető matematikai diszciplinák halmazelméleti felépítéséhez szükség van éppen a végtelen halmazok elméletére, ez pedig maga is logikai megalapozást igényel,[72] mert a végtelen halmaz fogalmához vezető absztrakció csak bizonyos feltételek mellett észszerű és jogosult, ezek a feltételek pedig még távolról sincsenek tisztázva.

Az összes matematikai diszciplinák felépítésének más oldalára vet fényt a matematikai logika. Az axiómarendszer a fenti (halmazelméleti) értelmezésben csupán kívülről határolja el a szóban forgó matematikai diszciplina alkalmazási területét, oly módon, hogy megadja a vizsgált objektum- és vonatkozásrendszer tulajdonságait, de nem ad semmiféle felvilágosítást arról, hogy a szóban forgó diszciplina felépítése milyen logikai eszközök segítségével történhetik. Így például a természetes számok rendszerének tulajdonságai — és természetesen egyben az ezzel izomorf rendszerekéi — igen egyszerű axiómarendszerrel megadhatók. Mindazonáltal olyan problémák megoldása, amelyekre a válasz ennek az axiómarendszernek az elfogadásával elvben egyértelműen meg van határozva, gyakran igen bonyolultnak bizonyul: éppen a számelmélet bőségesen tartalmaz olyan régen felvetett és igen egyszerűen megfogalmazható problémákat, amelyek mindmáig nincsenek megoldva. Itt természetesen felmerül az a kérdés, hogy ez csak azért van-e, mert egyes egyszerűen megfogalmazható számelméleti problémák megoldásához nagyon hosszú gondolatsorozatra van szükség, amelynek egyes elemi összetevői azonban már ismert és használatos logikai lépések, vagy pedig azért, mert vannak olyan számelméleti problémák, amelyeknek megoldásához minőségileg új, eddig még nem használt logikai módszerek szükségesek.

A modern *matematikai logika*[73] határozott választ adott erre a kérdésre: önmagában egyetlen deduktív diszciplina sem tudja kimeríteni a számelméleti problémák sokféleségét. Pontosabban: már a természetes számok elméletének keretein belül megadható olyan $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ problémasorozat, hogy bármely deduktív diszciplinához található ennek olyan eleme, (olyan, a p_n sorozatból való probléma), amely a szóban forgó diszciplina eszközeivel nem oldható meg. „Deduktív diszciplinán" itt olyan elméletet értünk, amely véges számú axiómára épül és amelynek kifejtésében a levezetések véges számú, a szóban forgó diszciplinára jellemző előre megadott elemi logikai eszköz felhasználásával készülnek, e véges számú elemi módszerből azonban tetszőlegesen hosszú gondolatsorozatok állíthatók össze.

Kiderült tehát, hogy a matematikai diszciplina fogalma — olyan diszciplinát értve ezen, amelyet egy meghatározott halmazelméleti típusú axiómarendszer határoz meg — lényegesen tágabb, mint a deduktív diszciplina logikai fogalma: már a természetes számok aritmetikájának felépítésénél végtelen sokszor kell teljesen új logikai következtetési módszerekhez folyamodni, úgyhogy ezek összessége nem fér bele semmiféle véges számú megszabott módszerből álló rendszerbe.

Mindazok az eredmények, amelyek valamely deduktív diszciplina keretein belül megkaphatók, megkaphatók egyszer s mindenkorra megadott szabályok szerint végrehajtható számítással is. Ha a problémák valamely osztályának megoldására szigorúan meghatározott számításrecept adható meg, matematikai *algoritmus*ról[74] beszélünk. Az elég általános és ugyanakkor rövid algoritmusok konstruálásának problémája fontos helyet foglal el a matematika történetében mindazóta, amióta elegendően kidolgozott matematikai jelrendszer[75] egyáltalán létezik. Az algoritmusok és a matematikai problémák „algoritmikus megoldhatósága" általános elméletének megteremtése azonban csak az utolsó évtizedekben kezdődött meg, a matematikai logika fejlődésének eredményeként. Ennek az elméletnek a gya-

[72] L. az Enciklopédia Бесконечность c. cikkét.
[73] L. az Enciklopédia Логика математическая c. cikkét.
[74] L. az Enciklopédia Алгоритм c. cikkét.
[75] L. az Enciklopédia Знаки математические c. cikkét.

korlati perspektivái igen szélesek, különös tekintettel arra, hogy a modern számítási technika lehetővé teszi már bonyolult matematikai algoritmusok gépi munkával való helyettesítését.

Azoknak a korlátoknak, amelyek a fentiek szerint bármely rögzített deduktív rendszer lehetőségeire érvényesek, az algoritmusok elméletében olyan tételek felelnek meg, amelyek szerint matematikai problémák elég széles körének megoldására alkalmas „univerzális" algoritmusok konstruálása nem lehetséges. Ezek a tételek a matematika filozófiája számára igen érdekes és éles módon konkretizálták azt az általános igazságot, hogy az élő gondolkodás elvileg különbözik bármely számolóautomata működésétől.

A halmazelmélet, a legtöbb matematikai diszciplina sikeres halmazelméleti megalapozása, valamint a matematikai logika (és vele az algoritmuselmélet) eredményei fontos előfeltételei a modern matematika sok filozófiai problémája megoldásának. A matematika összes ágainak halmazelméleti alapon való átdolgozása következtében mindazoknak a problémáknak a megoldása, amelyek a v é g t e l e n matematikai fogalmával kapcsolatosak, a végtelen halmaz fogalmának megalapozására és kritikai tisztázására vezetődött vissza. A halmazelméletre támaszkodó axiomatika, mint már említettük, megadja az eszközöket a matematika által vizsgált vonatkozások mennyiségi jellegű problematikájának kellő általánosságú megvilágítására. Lehetővé teszi az egyes speciális matematikai diszciplinák szerkezetének — amelyeknek tárgyi tartalmát a megfelelő axiómák rögzítik le — egységes szempontból való vizsgálatát, és ily módon bizonyos mértékig mind a matematikai diszciplinák és a valóság viszonyának, mind a matematikai vizsgálati módszer sajátos jellegének megvilágítását is. Láttuk, hogy a matematikai diszciplina ily módon keletkező fogalma lényegesen szélesebb, mint a formális logikai értelemben vett deduktív diszciplina fogalma. A modern matematikai logika idevonatkozó eredményei lehetővé teszik számunkra, hogy teljes konkrétsággal nyomon követhessük ama deduktív diszciplinák és algoritmusok megalkotásának dialektikus folyamatát, amelyek a matematikai diszciplina mind szélesebb körébe tartozó problémáinak megoldására adják meg nekünk a formális-logikai és számítási eszközöket.

A XX. században, amikor ezek az általános problémák elég szélesen felvetődhettek, a kapitalista országok tudományában már elhatalmasodtak a reakciós idealista áramlatok. A logicizmus[76] a halmazelméleti axiomatika eredményeit, amelyek valójában azt tárták fel, hogy a matematikai elméletnek s z é l e s e b b e k az objektív valósággal való kapcsolatai, mint az korábban várható volt (ugyanannak a matematikai diszciplinának a keretein belül a reális jelenségek sok különböző köre vizsgálható), annak a homlokegyenest ellenkező tézisnek a kikiáltására használták fel, hogy a matematika teljesen független az anyagi világ tanulmányozásának problémáitól. Későbbb az intuicionizmus hívei[77] a végtelen halmazok elméletének megalapozásával kapcsolatos logikai nehézségeket használták fel arra, hogy a matematikát ne rajtunk kívül álló dolgokat vizsgáló tudománynak, hanem olyan sajátos teremtő „tevékenység"-nek nyilvánítsák, amely a külső valóságos világgal semmiféle vonatkozásban nem álló elmekonstrukciók létrehozására irányul. Végül a formalisták[78] a matematikai logika eredményeit arra használta fel, hogy a matematika egész tartalmát olyan szimbolikus „számítások" konstruálására vezessék vissza, amelyekben a szimbólumok egyáltalán semmit nem jelentenek.

A matematika filozófiai problémáinak a tudatos materialista dialektika alapján való vizsgálatát MARX kezdte meg,[79] aki mélyrehatóan elemezte a matematika XVII. és XVIII. századbeli fejlődését és megvilágította azt a dialektikus folyamatot, amellyel a véges meny-

[76] Erről a burzsoá filozófiai áramlatról l. az Enciklopédia Логистика c. cikkét.

[77] L. az Enciklopédia Интуиционизм c. cikkét.

[78] L. az Enciklopédia Формализм c. cikkét.

[79] L. az Enciklopédia Математические рукописи Маркса c. cikkét.

nyiségek algebrájának talaján létrejött a végtelen kicsiny mennyiségek analízise.[80] Különösen részletesen dolgozta ki MARX a differenciálfogalom tartalmának problémáját. A differenciálnak, mint „operatív szimbólumnak" általa felvetett koncepciója megelőzött olyan eszméket, amelyek csak a XX. században jelentkeztek ismét; MARX felfogása a differenciálról, mint a növekmény fő részéről teljesen megfelel annak, ami a mai tankönyvekben olvasható és ami az általa tanulmányozott munkákból hiányzott (a matematikusoknak az analízis megalapozásáról írt munkái, így CAUCHY francia matematikus művei, MARX előtt ismeretlenek maradtak).

3. A matematika története a XIX. és a XX. században

A XIX. század eleje és közepe. A XIX. század elején a matematikai analízis alkalmazási területeinek újabb jelentős kiszélesedése következik be. Eddig két olyan fő része volt a fizikának, amely nagy matematikai apparátust követelt: a mechanika és az optika; most ezekhez hozzájárul még az elektrodinamika, a mágnesesség tana és a termodinamika is. Nagymértékben kifejlődnek a folytonos közegek mechanikájának legfontosabb részei; ezek közül az összenyomhatatlan ideális folyadékok hidrodinamikája régebbi (XVIII. századi) keletkezésű D. BERNOULLI, EULER, D'ALEMBERT és LAGRANGE). Gyorsan növekszenek a technika igényei is a matematikával szemben, a XIX. század elején főleg a gőzgépek termodinamikája, a technikai matematika, a ballisztika terén. A mechanika és a matematikai fizika új fejezeteinek legfontosabb matematikai apparátusaként fokozottan kidolgozzák a parciális differenciálegyenletek elméletét és különösen a potenciálelméletet.[81] Ebben az irányban folytatja munkáját a század elején és közepén az analízis legnagyobb tudósainak többsége (GAUSS[82] német, J. FOURIER, POISSON és CAUCHY[83] francia, DIRICHLET német, GREEN angol és OSZTROGRADSZKIJ[84] orosz matematikus). OSZTROGRADSZKIJ rakta le többváltozós függvényekre a variációszámítás alapjait, fedezte fel a hármas integrálok kettős integrálokká való átalakításának nevezetes formuláját (1828, publikálva 1831-ben), valamint e formula általánosítását n dimenzióra (1834, publikálva 1838-ban), tökéletesítette a változók helyettesítésének elméletét a többszörös integrálokban (1836, publikálva 1838); e téren megkapta lényegében mindazokat az eredményeket, amelyeket később (1841) általánosan n dimenzióra JACOBI német matematikus fogalmazott meg.[85] STOKES angol matematikusnak a matematikai fizika differenciálegyenletei terén végzett kutatásai eredményeként megszületik a vektoranalízis (amelynek egyik legfontosabb formulája egyébként lényegében éppen a fentebb említett Osztrogradszkij formula).

[80] L. ezzel kapcsolatban az Enciklopédia Бесконечно малые c. cikkét is.
[81] L. az Enciklopédia Потенциала теория c. cikkét.
[82] L. az Enciklopédia Гаусс c. cikkét.
[83] L. az Enciklopédia Коши c. cikkét.
[84] L. az Enciklopédia Остроградский c. cikkét.
[85] L. az Enciklopédia Якобиан c. cikkét.

Annak ellenére, hogy a XX. század elején a természettudományban az a mechanisztikus meggyőződés uralkodott, hogy minden természeti jelenség leírható differenciálegyenletekkel, a gyakorlat által felvetett problémák kényszere folytán jelentősen továbbfejlődik a valószínűségszámítás. LAPLACE és POISSON új, hatékony analitikus apparátust teremtenek meg erre a célra. Oroszországban a valószínűségszámításnak a minőségellenőrzésre és a statisztikára való alkalmazásával foglalkozik OSZTROGRADSZKIJ és BUNYAKOVSZKIJ; CSEBISEV megadja a valószínűségszámítás elemeinek szigorú megalapozását és bebizonyítja híres tételét (1867), amely egyesíti a nagy számok törvényének[86] addig ismert formáit.

Mint már említettük, azokon a munkákon kívül, amelyek a természettudomány és a technika által felvetett problémákkal voltak kapcsolatosak, rendkívül erősen foglalkoztatták a matematikusok figyelmét az analízis szigorú megalapozásának problémái. CAUCHY 1821-ben és 1823-ban közzétette az École Polytechnique-on tartott előadásait. Ezek a határértékek és a sorok elméletének szigorú felépítését, a folytonos függvény fogalmának definícióját és a differenciál- és integrálszámításnak a határértékelméleten alapuló tárgyalását (többek között azt a tételt is, amely kimondja, hogy folytonos függvénynek van integrálja) tartalmazták. Ennek az előadásnak bizonyos kiegészítéseit, valamint a differenciálegyenletek megoldásának exisztencia- és unicitástételét később publikálta. LOBACSEVSZKIJ (1834), majd később DIRICHLET (1837) határozottan kimondották a függvény általános — tetszőleges megfelelésként való definícióját. DIRICHLET bebizonyította, hogy minden olyan függvény, amelynek csak véges számú maximuma és minimuma van, Fourier-sorba fejthető: LOBACSEVSZKIJ 1834—35-ben olyan konvergenciakritériumokat adott meg a Fourier-sorokra, melyeknek érvényességi tartománya bizonyos vonatkozásban tágabb a Dirichlet-kritérium érvényességi tartományánál.

Fentebb már említettük WESSEL dán geodétának a komplex számok geometriai interpretációját tartalmazó munkáját; ezt annak idején nem méltatták figyelemre. 1799-ben GAUSS közzétette az algebra alaptételének első bizonyítását, mely azonban a tételt óvatosan, valós kifejezésmódot használva fogalmazza meg („minden valós polinom első- és másodfokú valós tényezők szorzatára bontható"). Csak sokkal később (1831-ben) tárgyalja GAUSS kifejezetten a komplex számok elméletét. Közben ARGAND 1806-ban közzétette munkáját a komplex számok elméletéről, azok geometriai interpretációjával és D'ALEMBERT lemmájának bizonyításával, 1815-ben pedig az algebra alaptételének bizonyítását, amely alapgondolata tekintetében közel áll CAUCHY 1821-ből származó bizonyításához.

A komplex számok természetének világos megértése alapján megszületik a komplex változós függvénytan. GAUSS e téren igen sokat tudott, de úgy-

[86] L. az Enciklopédia Больших чисел закон c. cikkét.

szólván semmit sem publikált. Az általános alapokat CAUCHY rakta le; az elliptikus függvények elméletét pedig ABEL és JACOBI építette ki. Már erre az időszakra jellemző, hogy — a XVIII. század tisztán algoritmikus felfogásától eltérőleg — a figyelem a függvény komplex tartománybeli viselkedésének sajátságaira és az itt uralkodó alapvető geometriai törvényszerűségekre irányul (kezdve a Taylor-sor konvergenciasugarának a szinguláris pontok elhelyezkedésétől való függésén, amit CAUCHY fedezett fel). A század közepén a komplex változós függvénytannak ez a — bizonyos értelemben — „kvalitatív" és geometriai jellege RIEMANN[87] német matematikusnál tovább erősödik. Kiderül, hogy az analitikus függvény természetes geometriai hordozója — amennyiben többértékű függvényről van szó — nem a komplex számsík, hanem a megfelelő Riemann-féle felület — egy olyan alakzat, amelynek természete csak a geometria fentebb említett újszerű értelmezésének keretei között érthető meg. Noha WEIERSTRASS német matematikus a tiszta analízis talaján maradva eléri az általánosságnak ugyanazt a színvonalát, mint amit RIEMANN, a továbbiakban RIEMANN geometriai eszméi azok, amelyek mindinkább meghatározzák a komplex változós függvénytan területén a kutatás egész stílusát.

A komplex változós függvénytan hegemóniája idején a valós tartománybeli függvénytan konkrét problémái iránti érdeklődés fő képviselője CSEBISEV.[88] E téren CSEBISEV legkiemelkedőbb eredménye az optimális közelítés elméletének[89] megteremtése (1854-től kezdve); a kiindulási pontot itt a mechanizmusok elméletének problémái adták.

Az algebrában az után, hogy RUFFINI és ABEL bebizonyították az általános ötödfokú egyenletek gyökökkel való megoldhatatlanságát, GALOIS francia matematikus megmutatta, hogy bármely egyenlet gyökökkel való megolhatóhatósága az egyenlet Galois-csoportjának tulajdonságaitól függ.[90] A csoportok általános absztrakt vizsgálatának feladatát CAYLEY tűzte ki. Meg kell jegyeznünk, hogy a csoportelmélet jelentőségének általános elismerése még magában az algebrában is csak a hetvenes években, JORDAN francia matematikus munkáinak megjelenése után történik meg. GALOIS és ABEL munkái nyomán születik meg az algebrai számtest fogalma is, mely új tudománynak: az algebrai számelméletnek keletkezésére vezet.

Új, lényegesen magasabb színvonalra emelkedik a számelmélet régi, a közönséges egész számokkal kapcsolatos problémáinak megoldása is. GAUSS kidolgozza a számok kvadratikus formákkal való előállításának elméletét (1801), CSEBISEV megkapja az első eredményeket a prímszámoknak a természetes számsorban való sűrűsége oszlásával kapcsolatban (1848, 1850), DIRICHLET bebizonyítja, hogy a számtani haladványokban végtelen sok prímszám van stb.

87 L. az Enciklopédia Риман c. cikkét.
88 L. az Enciklopédia Чебышев c. cikkét.
89 L. az Enciklopédia Найлучшие приближения c. cikkét.
90 L. az Enciklopédia Галуа теория c. cikkét.

A felületek differenciálgeometriáját GAUSS (1827) és PETERSZON orosz matematikus (1853) alkotja meg. A geometria tárgyával kapcsolatos új nézetek kidolgozása terén, mint már mondottuk, alapvető jelentőségű volt a nem-euklideszi geometriának LOBACSEVSZKIJ által való megteremtése. LOBACSEVSZKIJ azáltal, hogy felépítette a nem-euklideszi trigonometriát és analitikus geometriát, lényegében megalkotta mindazt, ami szükséges ahhoz, hogy ez új geometria axiómarendszerének ellentmondásmentessége és teljessége megállapítható legyen. A nem-euklideszi geometriával párhuzamosan, hosszú ideig tőle függetlenül fejlődött a projektív geometria (PONCELET francia, STEINER svájci, STAUDT német matematikus és mások), amelynek fejlődése szintén a térrel kapcsolatos régi nézetek döntő megváltozásával függ össze. PLÜCKER német matematikus felépíti a geometriát úgy, hogy alapelemnek az egyenest tekinti, GRASSMANN német matematikus pedig megalkotja az n dimenziós vektortér affin és metrikus geometriáját.

A differenciálgeometriának lényegében már a felületek Gauss-féle belső geometriájának megteremtésével szintén megszűnik az euklideszi geometriával való közvetlen kapcsolata; az a tény, hogy a felület benne van a háromdimenziós euklideszi térben, a Gauss-féle felületelmélet szempontjából csupán esetleges körülmény. Ebből kiindulva RIEMANN megalkotja az n dimenziós varietás fogalmát (1854, publikálva 1866-ban), a $ds^2 = \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ kvadratikus differenciálforma alapján. Ezzel megvetette az alapját az n dimenziós varietások differenciálgeometriájának. A többdimenziós varietások topológiája terén az első gondolatok ugyancsak Riemanntól származnak.

A XIX. század vége és a XX. század eleje. A matematika a Szovjetunióban. Csak a XIX. század hetvenes éveiben fedezi fel FELIX KLEIN német matematikus a Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi geometria első modelljét, amely végképp eloszlatja a nem-euklideszi geometria ellentmondásmentességével szemben támasztott összes kétségeket. KLEIN a különböző dimenziószámú terek ez idő tájt megalkotott összes geometriáit bizonyos transzformációs csoportok invariánsai szempontjából vizsgálja meg. Ugyanekkor (1872-ben) DEDEKIND, G. CANTOR és WEIERSTRASS német matematikusok megteremtik az analízis megalapozására irányuló munka szükséges fundamentumát: az irracionális számok szigorúan felépített elméletét. 1879—84-ben teszi közzé CANTOR a végtelen halmazok általános elméletéről szóló alapvető munkáit. Csak ez után alakulhattak ki a matematika tárgyával, a matematikai diszciplínák felépítésével, az axiomatika szerepével stb. kapcsolatos modern elképzelések. Ezeknek széleskörű elterjedéséhez még néhány évtizedre volt szükség (a geometria felépítésével kapcsolatos modern elgondolások általános elismerését HILBERT német matematikus „Grundlagen der Geometrie“ c. munkájának 1899-ben való megjelenésével szokták összefüggésbe hozni).

A matematika alapja terén a kutatások a továbbiakban főként két irányban mélyültek el: az általános halmazelméletben felmerült logikai nehézségek legyőzése és a matematikai diszciplinák felépítésének, valamint a matematikai problémák matematikai logikai eszközökkel való konstruktív megoldásának vizsgálata irányában. Ezek a kutatások a matematika önálló, nagy ágává fejlődtek *(matematikai logika)*.[91] A matematikai logika alapjait a XIX. században BOOLE angol logikus, PORECKIJ orosz matematikus, SCHRÖDER és FREGE német matematikusok, PEANO olasz matematikus és mások teremtették meg. A XX. század nyugat-európai és amerikai matematikusai szintén nagy eredményeket értek el ezen a téren: ide tartozik HILBERT bizonyításelmélete, a BROUWER holland matematikus és követői által megteremtett konstruktív logika (amelyet BROUWER helytelen filozófiai nézeteivel kapcsolatban „intuicionista logiká"-nak neveznek), GÖDEL osztrák matematikus tétele a formális deduktív diszplicinák teljességének elvi lehetetlenségéről, a számelméleti függvények algoritmikus „kiszámíthatóságának" kidolgozása stb. A kapitalista világban azonban a matematika alapjaival kapcsolatos munkák mindinkább a reakciós filozófia hatása alá kerülnek és gyakran az agnoszticizmust, a matematikai elméletnek a gyakorlattól való teljes elszakadását propagálják. A halmazelmélet és a matematikai logika elvi problémái terén több nagy jelentőségű tényleges felfedezés szovjet kutatók érdeme (N. N. LUZIN munkái a projektív halmazokról, az „intuicionista logika" A. N. KOLMOGOROV-féle konstruktív értelmezése, P. Sz. NOVIKOV munkái bizonyos halmazelméleti tételek ellentmondásmentességéről, az algoritmusok és a matematikai problémák algoritmikus megoldása elméletének továbbfejlesztése az ifjabb A. A. MARKOV által stb.). A matematika alapjainak területén a Szovjetunióban és a népi demokratikus országokban folyó kutatások tudatosan a dialektikus materializmus filozófiájából indulnak ki.

A XIX. század második felében megkezdődik a matematika történetével kapcsolatos problémák intenzív feldolgozása [M. CANTOR (Németország), ZEUTHEN (Dánia), BOBINYIN (Oroszország)]. Nagy eredményeket ért el ezen a téren egy szovjet tudóscsoport (M. J. VIGODSZKIJ, A. P. JUSKEVICS, Sz. A. JANOVSZKAJA és mások), amely a matematika történetének különböző problémáit marxista-leninista módszerrel vizsgálja.

A XIX. század végén és a XX. század elején a matematika minden ága — a legrégibben: a számelméleten kezdve — hatalmas fejlődésnek indul. Ez az időszak nemcsak a munkák mennyisége tekintetében múlja felül a régebbieket, hanem a módszerek tökéletessége és hatékonysága, valamint az eredmények véglegessége terén is. KUMMER, KRONECKER, DEDEKIND német matematikusok, ZOLOTARJOV orosz és HILBERT német matematikusok megvetik a modern algebrai számelmélet alapjait. HERMITE francia matematikus 1873-ban bebizonyítja az e szám, LINDEMAN német matematikus 1882-ben a π szám transzcendens voltát; HADAMARD francia és LA VALLÉE—POUSSIN belga matematikus (mindketten 1896-ban) betetőzik CSEBISEVnek a prímszámok fogyó sűrűségű eloszlására vonatkozó vizsgálatait. G. MINKOWSKI német matematikus

[91] L. az Enciklopédia Логика математическая c. cikkét.

geometriai módszereket vezet be a számelméleti kutatásokban. Oroszországban a számelméleti munkák CSEBISEV után nagyszerű fejlődésnek indulnak; ezzel kapcsolatban a fentebb már említett ZOLOTARJOVon kívül A. N. KORKIN, G. F. VORONOJ és az idősebb A. A. MARKOV nevét kell megemlítenünk. Azt a vezető pozíciót, amelyet az orosz tudomány az ő munkáik révén a számelméletben megszerzett, a szovjet korszakokban még inkább megerősítették I. M. VINOGRADOV művei. VINOGRADOV 1937-ben páratlan számokra eldöntötte a híres Goldbach-sejtést[92] és igen hatékony módszert alkotott az additiv számelmélet különféle egyéb problémáinak megoldására is. Nagy jelentőségűek a számelmélet terén L. G. SNIRELMAN, B. N. GYELONYE, A. O. GELFOND és más szovjet matematikusok munkái. Továbbfejlődnek az algebra klasszikus fejezetei is. Így például részletesen vizsgálják (a gyökökkel meg nem oldható) magasabbfokú egyenletek megoldásának a lehető legegyszerűbb alakú egyenletek megoldására való visszavezetését, azaz a *rezolvensek*[93] problémáját (F. KLEIN, HILBERT, a Szovjetunióban pedig N. G. CSEBOTARJEV). A rezgéselméleti problémákkal (stabilitás, automatikus szabályozás) kapcsolatban kiterjedten kutatják az egyenletek gyökei különféle síkbeli elhelyezkedéseinek kritériumait.[94] A lineáris algebra problémái, amelyek a mechanikában és a fizikában mind kiterjedtebb alkalmazást találnak, teljesen új megvilágítást nyertek azáltal, hogy a kutatásokba bevonták az *n* dimenziós *vektorterek*kel[95] kapcsolatos geometriai elgondolásokat. Az elméleti algebrai kutatások súlypontja azonban átkerül az algebra új területeire: a csoportelméletre, a testek, gyűrűk, struktúrák elméletére stb. Az algebrának több ilyen része mélyreható alkalmazásra kerül a természettudományokban: így a csoportelmélet a krisztallográfiában (J. Sz. FJODOROV és A. SCHOENFLIESS), később pedig a kvantummechanikában.[96] A modern algebra általános problémáin a Szovjetunióban a legkiválóbb tudósokból álló iskola dolgozik (O. J. SMIDT, A. G. KUROS, A. I. MALCEV és mások).

Az algebra és a geometria határterületén LIE norvég matematikus (1873-tól kezdve) megalkotja a folytonos csoportok elméletét; ennek az elméletnek a módszerei később behatolnak a matematika és a természettudomány mind újabb és újabb területeire. Ezen a téren igen jelentős eredményeket értek el L. Sz. PONTRJAGIN és más szovjet tudósok.

Az elemi és a projektív geometria a XIX. század végén és a XX. században főleg a logikai és axiomatikus alapok szempontjából érdekli a matematikusokat.[97] Erőteljesen kifejlődött — az ábrázoló geometrián kívül, amelyet már említettünk — néhány alkalmazott geometriai diszciplina: a nomográfia,[98]

[92] L. az Enciklopédia Голдбаха проблема c. cikkét.
[93] L. az Enciklopédia Резульвента c. cikkét.
[94] L. például az Enciklopédia Гурвица критерий c. cikkét.
[95] L. az Enciklopédia Векторные пространства c. cikkét.
[96] L. az Enciklopédia Представления групп c. cikkét.
[97] L. az Enciklopédia Геометрия c. cikkének V. részét: Основания геометрии.
[98] L. az Enciklopédia Номография c. cikkét.

a grafikus számítási módszerek,[99] a grafikus sztatika[100] stb. A geometriának a tudomány legnagyobb erőit vonzó, legfontosabb területe azonban a differenciálgeometria és, valamivel kisebb mértékben, az *algebrai geometria*.[101] Az euklideszi háromdimenziós tér differenciálgeometriáját teljes rendszerességgel tárgyalják BELTRAMI olasz, DARBOUX francia matematikusok, és mások. Később gyors fejlődésnek indul a különféle (az euklideszi mozgásoknál) szélesebb transzformációs csoportok,[102] különösen a többdimenziós terek differenciálgeometriája, mind a metrikus,[103] mind a különféle más „leképezések"-é (affin, konform, projektív differenciálgeometria). A geometriai vizsgálatoknak ezt az irányát, melynek az általános relativitáselmélet[104] felfedezése hatalmas további impulzust adott, eredetileg LEVI-CIVITÁ olasz, CARTAN francia és H. WEYL német matematikus teremtette meg. A differenciálgeometria minden területén fontos munkák fűződnek szovjet matematikusok (D. F. JEGOROV, Sz. P. FINYIKOV, N. N. LUZIN) nevéhez. Tenzormódszerekkel dolgozó kutatók nagy iskoláját teremtette meg a Szovjetunióban V. F. KAGAN. Különösen nagy eredményeket értek el a szovjet matematikusok a differenciálgeometriai alakulatok „egészben" való vizsgálata terén (L. A. LJUSZTYERNYIK és L. G. SNIRELMAN munkái a zárt geodetikus *vonalak* exisztenciájáról, A. D. ALEXANDROV munkái a felületek „egészben" való hajlításáról stb.).

A halmazelmélet és a valós függvénytan (l. alább) általánosabb nézőpontjainak kifejlődése folytán az analitikus függvények elmélete a XIX. század végén elveszíti ezt a kizárólagos központi helyzetét, amelyet a XIX. század elején és közepén a matematikai analízisen belül elfoglalt. Ennek ellenére nem csökkenő intenzitással fejlődik tovább, mind belső szükségletei, mind az analízis egyéb ágaival és közvetlenül a természettudományokkal való összefüggései folytán. Különösen lényeges volt ebben a tekintetben a konform leképezések szerepének tisztázása a rugalmasságtani, valamint az ideális folyadékok sík áramlásaival kapcsolatos problémáknál felmerülő parciális differenciálegyenletek peremértékfeladatainak (pl. a Laplace-egyenlet Dirichlet-feladatának) megoldásánál.

FELIX KLEIN német és POINCARÉ francia matematikusok megalkotják az *automorf függvények*[105] elméletét, amelyben LOBACSEVSZKIJ geometriája jelentős alkalmazást nyert. PICARD, POINCARÉ, HADAMARD és BOREL francia matematikusok mélyrehatóan kidolgozzák az egész függvények elméletét; munkájuk eredményeként lehetővé válik a prímszámok sűrűségeloszlásáról szóló, már

[99] L. az Enciklopédia Графические вычисления c. cikkét.

[100] L. az Enciklopédia Графическая статика c. cikkét.

[101] L. az Enciklopédia Алгебраическая геометрия c. cikkét.

[102] L. az Enciklopédia Конформно-дифференциальная геометрия és Проективно-дифференциальная геометрия c. cikkeit.

[103] L. az Enciklopédia Римановы геометрии c. cikkét.

[104] L. az Enciklopédia Относительности теория c. cikkét.

[105] L. az Enciklopédia Автоморфные функции c. cikkét.

említett tétel felfedezése. A geometriai függvénytant és a *Riemann-féle felületek*[106] elméletét POINCARÉ francia matematikus, HILBERT, WEYL és CARATHÉODORY német matematikusok, a konform ábrázolását[107] I. I. PRIVALOV, M. A. LAVRENTYJEV, G. M. GOLUZIN és más szovjet matematikusok fejlesztik ki. Igen kiterjedten alkalmazzák munkáikban a konform ábrázolást (és ennek általánosítását: a kvázikonform ábrázolást) az aeromechanikára és a rugalmasságtanra N. N. ZSUKOVSZKIJ, SZ. A. CSAPLIGIN, N. I. MUSZHELJSVILI, M. A. LAVRENTYJEV és más szovjet kutatók.

A matematikai analízis szisztematikus, az irracionális számok szigorúan megalapozott elméletére és a halmazelméletre való felépítése a matematika új ágának: a *valós függvénytan*nak[108] a keletkezésére vezetett. Ez a többé-kevésbé megállapodásszerű elnevezés főként az analízis alapfogalmainak (pl. a függvény, derivált, az integrál fogalma) és legfontosabb műveleteinek (pl. a függvények trigonometrikus sorba[109] fejtése) kellően általános szempontból való vizsgálatát jelenti. Míg azelőtt csak az olyan függvényeket vizsgálták rendszeresen, amelyek „természetes úton" merültek fel valamilyen speciális feladatban, a valós függvénytanra jellemző, hogy teljesen felkutatja az általános definíciók tényleges terjedelmét (így például először BOLZANO cseh matematikus, később pedig WEIERSTRASS felfedezte, hogy van olyan folytonos függvény, amely sehol sem differenciálható), és általánosítja az analízis alapfogalmait azokra az esetekre, amikor eredeti formájukban nem adnak kimerítő választ arra a problémára, amelynek megoldásából keletkeztek (foglalkozik például a valós függvénytan olyan integrálási eljárás konstruálásával, amelynek segítségével b á r m e l y, minden x helyen differenciálható $F(x)$ függvény — egy állandó tagtól eltekintve — megkapható, ha deriváltja, $F'(x)$, adva van). A modern valós függvénytan alapját a francia iskola matematikusai vetették meg C. JORDAN, BOREL, LEBESGUE, BAIRE). A vezetőszerepet később átveszi az orosz és a szovjet iskola, amelynek megalapítása D. F. JEGOROV és különösen N. N. LUZIN nevéhez fűződik. Ennek az iskolának a legkiválóbb képviselői D. J. MENYSOV, A. J. HINCSIN, P. SZ. ALEXANDROV, M. J. SZUSZLIN, I. I. PRIVALOV (főként a valós és az analitikus függvénytan határterületén végzett munkáival), N. K. BARI és mások. Intenzíven foglalkozik a valós függvénytan és a halmazelmélet fejlesztésével a W. SIERPINSKI vezetése alatt álló lengyel iskola.

A valós függvényeket azonban vizsgálták más, CSEBISEVhez csatlakozó, klasszikus szempontból is. Bebizonyosodott ugyanis, hogy a függvények szűkebb, alapvető gyakorlati jelentőséggel bíró osztályai (az adott számszor differenciálható, vagy az analitikus függvények) jellemezhetők azzal, hogy n nö-

106 L. az Enciklopédia Римановы поверхности c. cikkét.
107 L. az Enciklopédia Конформное отображение c. cikkét.
108 L. az Enciklopédia Функций теория c. cikkét.
109 L. az Enciklopédia Тригонометрические ряды c. cikkét.

vekedésével milyen gyorsan csökken a függvénynek a legjobb n-edfokú közelítő polinomoktól való eltérése. Ebben az irányban a legjelentősebb eredmények a XX. század elején Sz. N. BERNSTEJN nevéhez fűződnek, aki később a *konstruktív függvénytan*[110] iskolájának élére állt; a konstruktív függvénytanban is a szovjet kutatók viszik a vezetőszerepet.[111] A függvények polinomokkal való approximációja terén komplex tartományban tekintve is nagy eredményeket értek el a szovjet matematikusok (M. A. LAVRENTYJEV, M. V. KELDIS és mások).

A valós függvénytan — közvetlen jelentőségén kívül — nagy hatással volt a matematika sok más részének fejlődésére is. Különösen nélkülözhetetleneknek bizonyultak a valós függvénytanban kidolgozott módszerek a funkcionálanalízis megalapozásánál. A funkcionálanalízis módszerei tekintetében a valós függvénytan és a halmazelmélet hatása alatt fejlődött, tartalmát és az általa megoldott problémák jellegét illetőleg azonban közvetlenül csatlakozik a klasszikus analízishez és a matematikai fizikához; különösen nélkülözhetetlenné vált — főként az operátorszámítás[112] alakjában — a kvantumfizikában. A funkcionálanalízisnek, mint a matematika önálló ágának tudatos különválasztása elsőízben VOLTERRA olasz matematikus nevéhez fűződik (a XIX. század végén). Ma már a funkcionálanalízis részének tekintik a sokkal régebbi keletű variációszámítást,[113] amelynek feladata a funkcionálok maximumainak és minimumainak meghatározása, valamint az integrálegyenletek[114] elméletét is, amelynek rendszeres felépítését ugyancsak VOLTERRA kezdte meg, majd FREDHOLM svéd matematikus folytatta. FREDHOLM nagy vonásokban befejezte az ő nevét viselő fontos lineáris integrálegyenletek elméletének kiépítését. Általánosabb szemszögből nézve a funkcionálanalízisben központi helyet foglal el a végtelen sok dimenziós *lineáris terek*,[115] valamint operátoraik elmélete. (A lineáris terek elméletének leghasználatosabb formája BANACH lengyel matematikustól származik.) Különösen intenzív kutatómunka folyik az operátorok legfontosabb speciálisesetének, a *Hilbert-tér*[116] operátorainak területén. (A Hilbert-tér alapvető szerepét HILBERT-nek az integrálegyenletekről szóló munkája derítette fel.) A funkcionálanalízis általános problémái terén jelentős munkák fűződnek RIESZ FRIGYES magyar, NEUMANN JÁNOS amerikai, I.M. GELFAND szovjet matematikus és mások nevéhez. N. I. MUSZHELISVILI és az általa vezetett iskola kidolgozta a *szinguláris integrálegyenletek*[117] elméletét, amely a rugalmasságtanban igen nagy jelentőségű. A variációszámítás terén fontos munkát végez-

[110] L. az Enciklopédia Конструктивная теория функций c. cikkét.
[111] L. az Enciklopédia Приближение и интерполирование функций c. cikkét.
[112] L. az Enciklopédia Операторное исчисление c. cikkét.
[113] L. az Enciklopédia Вариационное исчисление c. cikkét.
[114] L. az Enciklopédia Интегральные уравиения c. cikkét.
[115] L. az Enciklopédia Линейные пространства c. cikkét.
[116] L. az Enciklopédia Гулбертово пространство c. cikkét.
[117] L. az Enciklopédia Сингуляарные интегральные уравнения c. cikkét.

tek M. A. LAVRENTYJEV, L. A. LJUSZTYERNYIK és N. N. BOGOLJUBOV szovjet matematikusok. Kiterjedten alkalmazták a funkcionálanalízis módszereit konkrét matematikai fizikai problémák megoldására Sz. L. SZOBOLJEV és az analízis más szovjet tudósai.

A funkcionálanalízis kifejlődése azonban nem változtat azon, hogy a természettudományok és a technika által a matematika elé tárt feladatok többsége differenciálegyenletekre vezet, mind közönséges (véges szabadsági fokú rendszerek vizsgálata), mind parciális differenciálegyenletekre (folytonos közegek vizsgálata, kvantumfizika). Ennek következtében intenzíven művelik a differenciálegyenletek kutatásának minden irányát. A bonyolult lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldására megalkotják az *operátor számítási*[118] módszereket. Az operátorszámítás megteremtését — nem egészen jogosultan — O. HEAVISIDE angol mérnök nevével szokták összefüggésbe hozni (holott ezen a téren elég sok alapvető tényre korábban (1862) rámutatott például M. J. VASCSENKO—ZAHARCSENKO orosz matematikus). Az olyan nem-lineáris differenciálegyenletrendszerekre, amelyek a linearitástól csak kevéssé térnek el, kiterjedten alkalmazzák a paraméter szerinti sorfejtés módszerét. Tovább fejlődik a közönséges differenciálegyenletek analitikus elmélete (POINCARÉ és P. PAINLEVÉ francia matematikusok, I. A. LAPPO—DANYILEVSZKIJ szovjet matematikus és mások). A közönséges differenciálegyenletek területén azonban a legtöbb figyelmet a megoldások kvalitatív vizsgálatára fordítják, ide tartoznak: a szinguláris pontok osztályozása (Poincaré és mások), a stabilitás[119] problémái, amelyeket különösen mélyrehatóan vizsgált A. M. LJAPUNOV orosz matematikus, a határciklusok meghatározása és az integrálgörbék topologikus elhelyezkedésének egyéb kérdései, az integrálgörbék „középértékben" való viselkedése (az ún. *ergod-elmélet*[120]). Mindezek a vizsgálatok intenzív fejlődésnek indultak a Szovjetunióban (L. I. MANDELSTAM, A. A. ANDRONOV, V. V. SZTYEPANOV, N. M. KRILOV, N. N. BOGOLJUBOV és mások).

A differenciálegyenletek kvalitatív elmélete[121] Poincaré számára kiindulópontul szolgált a varietások RIEMANN által éppen csak körvonalazott topológiájának[122] széles mederben való folytatásához, főként a varietások önmagukra való folytonos leképezései fixpontjainak vizsgálata irányában. Innen erednek a modern topológia „kombinatorikus", „homológ", és „homotip"-módszerei; ezeket L. BROUWER holland O. VEBLEN, J. ALEXANDER, S. LEFSHETZ amerikai és H. HOPF német matematikus dolgozta ki. A topológia másik iránya a halmazelmélet és a funkcionálanalízis talaján nőtt ki és az általános topologikus terek elméletének rendszeres felépítésére vezetett (M. FRÉCHET francia,

[118] L. az Enciklopédia Операционное исчисление c. cikkét.
[119] L. az Enciklopédia Устойчивость c. cikkét.
[120] L. az Enciklopédia Эргодическаяа теория c. cikkét.
[121] L. az Enciklopédia Качественная теория дифференциальных уравнений c. cikkét.
[122] L. az Enciklopédia Топология c. cikkét.

F. HAUSDORFF német, P. SZ. URISZON, P. SZ. ALEKSZANDROV és A. N. TYIHONOV szovjet matematikus), beleértve ebbe a topologikus terek dimenzióelméletét (URISZON). Ezeknek az irányoknak az egyesítését, ami az algebrai „kombinatorikus módszereknek" teljes általánosságot adott, a szovjet topológiai iskola valósította meg (P. SZ. ALEKSZANDROV, L. SZ. PONTRJAGIN), amelynek munkái a modern topológia alapját alkotják. A topológiai módszereknek az analízisre való alkalmazását G. BIRKHOF és M. MORSE amerikai, J. SCHAUDER lengyel, L. A. LJUSZTYERNYIK szovjet matematikus és mások dolgozták ki.

A parciális differenciálegyenletek elmélete a kutatók figyelmének a peremértékproblémák[123] felé való fordulása és az analitikus peremfeltételekre szorítkozásról való lemondás következtében már a XIX. század végén teljesen új alakot öltött. A parciális differenciálegyenletek analitikus elmélete, mely CAUCHY-tól, WEIERSTRASStól és KOVALEVSZKAJA orosz matematikustól ered, nem veszítette el jelentőségét, csupán némileg háttérbe szorult, mert bebizonyosodott, hogy az elmélet a peremértékproblémák megoldásánál nem biztosítja a probléma kitűzésének „korrektségét", azaz azt, hogy a peremfeltételek közelítő ismeretében a megoldás közelítőleg megkapható legyen, enélkül pedig az elméleti megoldásnak nincs gyakorlati értéke. A helyzet bonyolultabb, mint ahogyan az analitikus elmélet szemszögéből nézve látszott: azok a peremértékproblémák, amelyeknek kitűzése „korrekt", a különböző egyenlettípusokra különbözők. Az egyes egyenlettípusok megfelelő peremértékfeladatainak kiválasztásához a legmegbízhatóbb útmutatást azáltal kaphatjuk, ha közvetlenül a megfelelő fizikai jelenségeket tekintjük (hullámok terjedése, hőterjedés, diffúzió stb.). Az a tény, hogy a parciális differenciálegyenletek elmélete jórészt a matematikai fizika differenciálegyenleteinek[124] elméletévé alakult át, nagy és pozitív jelentőségű abból a szempontból, hogy hatalmas konkrét anyag felhalmozódására vezetett, ugyanakkor azonban mutatja azt is, hogy a peremértékproblémák általános elmélete nem fejlődött megfelelő mértékben, nem tette lehetővé az összes létező „korrekt" kitűzésű peremértékproblémák elméletileg rendszeres vizsgálatát. Ebben az irányban lényeges haladás csak a legutóbbi időben mutatkozik, I. G. PETROVSZKIJ, SZ. L. SZOBOLJEV és más szovjet matematikusok munkája nyomán.

A matematikai fizika különféle differenciálegyenleteivel kapcsolatos munkák joggal foglalják el az egész mai matematikai irodalom jelentős részét. DIRICHLET és RIEMANN után ezzel a területtel POINCARÉ, PICARD, GOURSAT, HADAMARD francia matematikusok, J. RAYLEIGH és U. THOMSON angol fizikusok, K. NEUMANN, G. SCHWARZ, HILBERT, R. COURANT német matematikusok és sokan mások foglalkoztak. Az elliptikus egyenletek elméletének azt az alapvető jelentőségű problémáját, analitikusak-e megoldásaik, a XX. század elején orosz matematikus, SZ. N. BERNSTEJN oldotta meg. A matematikai fizika differen-

[123] L. az Enciklopédia Краевые задачи c. cikkét.

[124] L. az Enciklopédia Уравнения математической физики c. cikkét.

ciálegyenleteinek területén rendszeres munkát folytató szovjet iskola megalapítói A. M. LJAPUNOV, V. A. SZTYEKLOV, N. M. GJUNTER, A. N. KRILOV. Ennek az iskolának az élén ma V. I. SZMIRNOV, I. G. PETROVSZKIJ, SZ. L. SZOBOLJEV, A. N. TYIHONOV és más tudósok állnak, akik révén a szovjet tudomány a matematika e területének több részén vezető szerephez jutott.

A technikai problémák tulajdonságainak és megoldásának vizsgálatánál a differenciálegyenletek elméletének fontos kiegészítője a valószínűségszámítás.[125] Míg a XIX. század elején a hibaszámítástól eltekintve csak a tüzérek használtak valószínűségszámítási módszereket, a XIX. század végén és a XX. század elején a valószínűségszámítás a statisztikus fizika és mechanika fejlődése, valamint a matematikai statisztika[126] apparátusának kidolgozása folytán számos új alkalmazásra talál. A legmélyebbre hatoló valószínűségszámítási kutatások a XIX. század végén és a XX. század elején az orosz iskola matematikusainak nevéhez fűződnek (CSEBISEV, az idősebb A. A. MARKOV, A. M. LJAPUNOV). Ezek a kutatások főként a valószínűségszámítás központi határeloszlástétele alkalmazhatósági kritériumainak felderítésére irányulnak. A XX. században minden országban megnő az érdeklődés a valószínűségszámítás iránt (Németországban R. MIESES, Franciaországban E. BOREL és P. LÉVY, az Egyesült Államokban W. FELLER és mások). A Szovjetunióban alapvető jelentőségűek Sz. N. BERNSTEJN munkái, aki betetőzte a Csebisev-féle iskola művét és több új elméleti és gyakorlati irányban indította el a kutatómunkát. A szovjet tudósok (A. J. HINCSIN, A. N. KOLMOGOROV és mások) megalapozzák a „véletlen", sztochasztikus f o l y a m a t o k elméletét és a valós függvénytan mértékfogalma, valamint a valószínűség fogalma közti, első ízben BOREL által észrevett analógiából kiindulva végleges formába öntik a valószínűségszámítás axiomatikus felépítését.

Ha az elméleti matematikai kutatások eredményét a gyakorlatban fel akarjuk használni, a kitűzött problémára a választ számszerű alakban kell megkapnunk. Sokszor azonban kiderül, hogy ez a feladat teljes, kimerítő tárgyalása után is éppenséggel nem könnyű dolog. A XIX. század végén és a XX. században az analízis numerikus módszerei[127] a matematika önálló nagy ágává nőnek ki. Különösen nagy figyelmet fordítanak a differenciálegyenletek numerikus integrálására.[128] A közönséges differenciálegyenletekre kiterjedten alkalmazható az a módszer, amelyet J. ADAMS angol csillagász még 1855-ben fedezett fel és később K. STÖRMER norvég matematikus fejlesztett tovább. Más típusú módszert alkotott K. RUNGE német matematikus. E két típus sokféle, változatán és a szukcesszív approximáció[129] régen ismert módszerén kívül

125 L. az Enciklopédia Теория вероятностей c. cikkét.

126 L. az Enciklopédia Математическая статистика c. cikkét.

127 L. az Enciklopédia Численные методы c. cikkét.

128 L. az Enciklopédia Приближённое интегрирование c. cikkét.

129 L. az Enciklopédia Последовательных приближений метод c. cikkét.

melynek elméleti megalapozása PICARD nevéhez fűződik, SZ. A. CSAPLIGIN szovjet matematikus (1919-ben) a közönséges differenciálegyenletek integrálására teljesen más elveken alapuló új módszert alkotott. A parciális differenciálegyenletekre alkalmazható növekmény-módszereket, melyeknek kidolgozását G. LIEBMANN német matematikus kezdte meg, a Szovjetunióban S. A. GERSGORIN és több más kutató tökéletesítette. Egy más, W. RITZ német matematikustól származó módszer[130] jelentős továbbfejlesztése GALJORKIN orosz matematikus érdeme (1915). A Galjorkin-módszer alkalmazhatóságának kritériumait M. V. KELDIS és mások vizsgálták. Az analízis numerikus módszereinek területén minden kutatási irányra nagy hatással voltak A.N. KRILOV munkái. Az analízis numerikus módszereinek a funkcionálanalízissel való jelentős kapcsolatait L. V. KANTOROVICS fedezte fel.

A numerikus számításokat igénylő munkák széleskörű kifejlődése folytán mind több matematikai táblázat[131] kiszámítása és kiadása vált szükségessé. Több, a táblázatok szerkesztésével és a rajtuk való interpolációval kapcsolatos probléma serkentőleg hat a megfelelő elméleti kutatásokra is, különösen a többváltozós függvények táblázataival kapcsolatban, („tabuláció-elmélet").

Az utóbbi időben mind nagyobb jelentőségűvé válnak a számításokban a nagy gyorsszámológépek. Ezzel kapcsolatban a matematikának új ága keletkezett: a programozás elmélete. Ennek az elméletnek a célkitűzése a problémák olyan alakra való hozása, hogy számológépek segítségével minél alkalmasabb módon megoldhatók legyenek.[132] [133]

[130] L. az Enciklopédia Ритца метод c. cikkét.

[131] L. az Enciklopédia Таблицы математические („Matematikai táblázatok") c. cikkét,

[132] A „gépi" matematika technikai oldalát illetőleg l. az Enciklopédia Счётная машинная техника, Математические машины, Математические приборы, Вычислительные машины, Счётные машины. Универсальные вычислительные машины, Электронные вычислительные машины c. cikkeit.

[133] A cikk végén (a Nagy Szovjet Enciklopédia 26. kötetének 483. oldalán) bibliográfia található, mely külön sorolja fel a matematika történetére és a filozófiájára vonatkozó és az általános jellegű, közvetlenül matematikai munkákat. *(A ford.)*