VÁLTOZÓ KERESZTMETSZETŰ, EGYENES RUDAKBÓL ÁLLÓ TÉRBELI RÚDSZERKEZET REZGÉSI SAJÁTFREKVENCIÁINAK JAVÍTHATÓ KÖZREFOGÁSA

II. RÉSZ

BOSZNAY ÁDÁM*
a műsz. tud. doktora

[Beérkezett 1975. május 19-én]

Az ugyanezen folyóiratban megjelent első részhez kapcsolódva ez a dolgozat a Weinstein—Bazley—Fox-féle közbenső operátoros módszernek a címbeli feladatra való alkalmazását mutatja be különös tekintettel a „special choice" eljárással kapcsolatos, BAZLEY és FOX által is megemlített nehézségnek a vizsgált esetben lehetséges megoldására. A tanulmány a javított sajátfrekvencia-korlátok számításához szükséges algebrai sajátértékfeladatok felállításához részletes, explicit számítási módszert ad. Mind az alsó, mind a felső sajátfrekvencia-korlátok számítására a közbenső operátoros módszert javasolja. Ily módon a két feladatra lényegében ugyanaz a számítógépi programrendszer alkalmazható, csak más bemenő adatokkal.

1. Bevezetés

A dolgozatnak ebben a folyóiratban megjelent első része előkészítette a címben kitűzött feladatnak a közbenső operátoros módszerrel való megoldását. Ez a második rész a megoldás részleteit mutatja be, és ugyanazokat a jelöléseket alkalmazza, mint az első. Az első rész egyenleteire, pontjaira úgy hivatkozik, hogy a megfelelő szám elé I-et ír.

2. A $\mathbf{C}_l$ operátor csökkentése

$\mathbf{C}_l$, $\mathbf{M}_l$, $\mathbf{C}_u$ és $\mathbf{M}_u$ — ahogy ezt I(23) $\mathbf{C}_l$-en, mint példán mutatja — az I(25) közrefogó tulajdonság elérése érdekében csökkentendők. A csökkentés véges dimenziós projektor operátorok segítségével történhetik; a megfelelő projektor-operátor felépítését $\mathbf{C}_l$-el kapcsolatban tárgyaljuk.

Legyenek $p_{1l}, p_{2l}, \ldots, p_{k_1 l}$ az I.3-ban bevezetett Hilbert-tér lineárisan független elemei. Az ezekkel felépített, a

$$\mathbf{P}_{k_1 l} u \doteq \sum_{j=1}^{k_1} a_j p_{jl} \tag{1}$$

egyenlettel definiált $\mathbf{P}_{k_1 l}$ operátor a $p_{1l}, p_{2l}, \ldots, p_{k_1 l}$ által felfeszített altérre vetítő projektor operátor, ha az a_j-ket úgy választjuk meg, hogy $u - \mathbf{P}_{k_1 l} u$

* Prof. Dr. Bosznay Ádám, 1111 Budapest, Goldmann György tér 3.

a p_{il}-ekre ($i = 1, 2, \ldots, k_1$) ortogonális legyen, azaz

$$\left((u - \mathbf{P}_{k_1 l} u), p_{il}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k_1 \tag{2}$$

legyen. (2)-be (1)-et betéve inhomogén lineáris, kvadratikus együttható-mátrixú algebrai egyenletrendszert kapunk az a_j-kre. Az együtthatók a (p_{jl}, p_{il}), $j, i = 1, 2, \ldots, k_1$ skalárszorzatok, és mivel az elemek lineárisan függetlenek, a belőlük felépített ún. Gram-féle mátrix nem lehet szinguláris, tehát invertálható. Ilyen módon

$$a_j = \sum_{i=1}^{k_1} b_{jil}(u, p_{il})$$

adódik, ahol a mondottak szerint

$$[b_{jil}] = [(p_{rl}, p_{sl})]_{ji}^{-1}; \qquad r, s = 1, 2, \ldots, k_1,$$

azaz a szóban forgó Gram-féle mátrix inverze. A szögletes zárójel a legutóbbi formulában a benne levő indexes mennyiségekből képzett kvadratikus mátrixot jelöl; j és r a sor-, i és s az oszlopindex.

A $\mathbf{P}_{k_1 l}$ projektor operátor tehát:

$$\mathbf{P}_{k_1 l} u = \sum_{j,i=1}^{k_1} b_{jil}(u, p_{il})\, p_{jl}. \tag{3}$$

Mint projektor operátor $\mathbf{P}_{k_1 l}$ szimmetrikus, pozitív, továbbá eleget tesz tetszőleges j-vel az alábbi egyenlőtlenségsorozatnak az értelmezési tartományába eső bármely u-val:

$$(\mathbf{P}_{jl} u, u) \leqslant (\mathbf{P}_{j+1,l}\, u, u) \leqslant (u, u). \tag{4}$$

A csökkentés érdekében $\mathbf{C}_l$-et két megfelelő tényező szorzatára felbontjuk.

E célból képezzük $u \in \vartheta_A$-val $(\mathbf{C}_l u, u)$-t I(7a), I(16l) és I(22) felhasználásával:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{C}_l u, u) &= \left((\mathbf{A} - \mathbf{A}_l)u, u\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ \int_0^{l_i} \Big[\left(G_i I_i - (GI)_{li}\right)\varphi_i'^2 + \left(E_i A_i - (EA)_{li}\right)\xi_i'^2 + \\
&+ \left(E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li}\right)\eta_i''^2 + \left(E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li}\right)\zeta_i''^2\Big]\, dx_i + \\
&+ \Big[-\left(G_i I_i - (GI)_{li}\right)\varphi_i'\varphi_i - \left(E_i A_i - (EA)_{li}\right)\xi_i'\xi_i + \\
&+ \left[\left(E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li}\right)\eta_i''\right]'\eta_i - \left(E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li}\right)\eta_i''\eta_i' + \\
&+ \left[\left(E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li}\right)\zeta_i''\right]'\zeta_i - \left(E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li}\right)\zeta_i''\zeta_i'\Big]_0^{l_i}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Az (5)-beli peremtagrendszer fizikai jelentése I(8a) és I(8b) alapján világlik ki; ezek szerint a peremtagrendszer a $\sin^2 \alpha t/2$ faktor híján

$$U_s^{(0\to t)} - U_{sl}^{(0\to t)}$$

értékű.

Az l rúdszerkezet csomóponti szerkezeteit az eredetiével azonosnak vettük, így

$$U_{sl}^{(0\to t)} = U_s^{(0\to t)},$$

amiből az (5)-beli peremtagrendszer eltűnése következik.

Az

$$\mathbf{R}_l \doteq \langle \mathbf{R}_{l1}, \mathbf{R}_{l2}, \ldots, \mathbf{R}_{ln} \rangle \tag{6}$$

diagonális hipermátrix operátornak — ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{li} \doteq \Big\langle & -[G_i I_i - (GI)_{li}]^{1/2} \frac{d}{dx_i}, \\ & -[E_i A_i - (EA)_{li}]^{1/2} \frac{d}{dx_i}, \\ & [E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li}]^{1/2} \frac{d^2}{dx_i^2}, \\ & [E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li}]^{1/2} \frac{d^2}{dx_i^2} \Big\rangle, \qquad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{7}$$

az a tulajdonsága, hogy $u \in \vartheta_A$-ra

$$(\mathbf{C}_l u, u) = (\mathbf{R}_l u, \mathbf{R}_l u). \tag{8}$$

(8)-at a skalárszorzat I(5) és I(5a) alatti definiáló formuláit is felhasználva közvetlen számolással igazolhatjuk. A számolás során előforduló $(\mathbf{R}_{li} u_i)^*$-nál ügyelni kell arra, hogy az

$$(\mathbf{R}_{li} u_i)^* = u_i^* \overleftarrow{\mathbf{R}}_{li}$$

összefüggés — mivel $\mathbf{R}_{li}$ differenciáloperátor — úgy értelmezendő, hogy $\mathbf{R}_{li}$ „hátrafelé" differenciál, amit a fölé tett nyíllal hangsúlyoztunk ki.

Feltéve, hogy $\mathbf{R}_l$-nek létezik $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$-al jelölt adjungáltja, (8) így is írható:

$$(\mathbf{C}_l u, u) = (\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} \mathbf{R}_l u, u),$$

amiből kitűnik, hogy ebben az esetben rendelkezésünkre áll $\mathbf{C}_l$-nek

$$\mathbf{C}_l = \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} \mathbf{R}_l \tag{8a}$$

alakú faktorizációja.

(8a) és a (3) projektor operátor felhasználásával meg lehet szerkeszteni az I(23)-nak és az I.5.-ben említett egyéb kívánalmaknak megfelelő $\mathbf{C}_{k_1 l}$ operátort. A

$$\mathbf{C}_{k_1 l} \doteq \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} \mathbf{P}_{k_1 l} \mathbf{R}_l \tag{9}$$

egyenlettel definiált $\mathbf{C}_{k_1 l}$ vizsgálata céljából alkalmazzuk a (4) egyenlőtlenség sorozatot az $u = \mathbf{R}_l v$ oszlopmátrixra:

$$(\mathbf{P}_{jl}\mathbf{R}_l v, \mathbf{B}_l v) \leqslant (\mathbf{P}_{j+1,l}\mathbf{R}_l v) \leqslant (\mathbf{R}_l v, \mathbf{R}_l v)\,. \tag{10}$$

Írjuk elő, hogy a $\mathbf{P}_{jl}$-t alkotó p_{jl}-ek legyenek benne $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$ értelmezési tartományában, így (10) az alábbi alakba is írható mindjárt (8a)-t is felhasználva:

$$(\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}\mathbf{P}_{jl}\mathbf{R}_l v, v) \leqslant (\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}\mathbf{P}_{j+1,l}\mathbf{R}_l v, v) \leqslant (\mathbf{C}_l v, v)\,. \tag{10a}$$

(10a)-ból kitűnik, hogy a (9) alatti $\mathbf{C}_{k_1 l}$ operátor eleget tesz I(23)-nak, s k_1 növelésével ((10a)-ban k_1 szerepét j tölti be) monoton s gyengén $\mathbf{C}_l$-hez konvergál. Bizonyítható az erős konvergencia is, ha a p_{il}-ek $(i = 1, 2, \ldots)$ teljes vektorrendszert alkotnak.

Eddig a $\mathbf{C}_l$ operátor csökkentését tárgyaltuk. Hasonló módon lehetséges $\mathbf{M}_l$, $\mathbf{C}_u$ és $\mathbf{M}_u$ csökkentése.

3. $\mathbf{M}_l$, $\mathbf{C}_u$ és $\mathbf{M}_u$ csökkentése

Az I(22)-ben definiált $\mathbf{M}_l$-et az alábbiakban lehet két tényező szorzatára bontani:

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{T}_l \mathbf{T}_l\,, \tag{11}$$

ahol

$$\mathbf{T}_l = \langle \mathbf{T}_{l1}, \mathbf{T}_{l2}, \ldots, \mathbf{T}_{ln} \rangle\,,$$

és

$$\mathbf{T}_{li} = \langle (\theta_{li} - \theta_i)^{1/2},\; [(\varrho A)_{li} - \varrho_i A_i]^{1/2}, \\ [(\varrho A)_{li} - \varrho_i A_i]^{1/2},\; [(\varrho A)_{li} - \varrho_i A_i]^{1/2} \rangle .$$

$\mathbf{T}_l$ szimmetrikus operátor.

A (11) szerinti $\mathbf{M}_l$-et az

$$\mathbf{S}_{k_2 l} \doteq \sum_{j,i=1}^{k_2} d_{jil}(\ldots, s_{il})\, s_{jl} \tag{12}$$

projektor operátor segítségével csökkenthetjük. (12)-ben az $s_{1l}, s_{2l}, \ldots, s_{k_2 l}$-ek az I.3.-ban bevezetett Hilbert-tér lineárisan független elemei, s b_{jil} mintájára:

$$[d_{jil}] = [(s_{rl}, s_{sl})]_{ij}^{-1}; \qquad r, s = 1, 2, \ldots, k_2\,.$$

Az s_{jl}-ekkel kapcsolatban más követelményt nem kell támasztani, mert a (10a) egyenlőtlenségsorozat jelen esetre érvényes analógjának felírhatóságát biztosítja az a körülmény, hogy a (11)-beli $\mathbf{T}_l$ az egész téren értelmezve van.

A csökkentett $\mathbf{M}_l$ operátor (9) mintájára:

$$\mathbf{M}_{k_2 l} = \mathbf{T}_l \mathbf{S}_{k_2 l} \mathbf{T}_l .$$

$\mathbf{M}_{k_2 l}$ k_2 növelésével növekedően, s gyenge értelemben monoton konvergál $\mathbf{M}_l$-hez. A konvergencia erős, ha az s_{il}-ek $(i = 1, 2, \ldots)$ teljes vektorrendszert alkotnak.

A $\mathbf{C}_{k_3 u}$ operátort $\mathbf{C}_{k_1 l}$-hez hasonlóan

$$\mathbf{C}_{k_3 u} = \mathbf{R}_u^{\mathrm{adj}} \mathbf{P}_{k_3 u} \mathbf{R}_u \tag{14}$$

alakban kell előállítani; itt

$$\mathbf{R}_u = \langle \mathbf{R}_{u1}, \mathbf{R}_{u2}, \ldots, \mathbf{R}_{un} \rangle ,$$

és

$$\mathbf{R}_{ui} = \Big\langle -[(GI)_{ui} - G_i I_i]^{1/2} \frac{d}{dx_i} ,$$

$$-[(EA)_{ui} - E_i A_i]^{1/2} \frac{d}{dx_i} ,$$

$$[(EI_\zeta)_{ui} - E_i I_{\zeta i}]^{1/2} \frac{d^2}{dx_i^2} ,$$

$$[(EI_\eta)_{ui} - E_i I_{\eta i}]^{1/2} \frac{d^2}{dx_i^2} \Big\rangle ,$$

továbbá

$$\mathbf{P}_{k_3 u} = \sum_{j,i=1}^{k_3} b_{jiu}(\ldots, p_{iu}) \, p_{ju} ,$$

valamint

$$[b_{jiu}] = [(p_{ru}, p_{su})]_{ji}^{-1} ; \qquad r, s = 1, 2, \ldots, k_3 .$$

A p_{ju}, $j = 1, 2, \ldots, k_3$ vektorok az alapul vett Hilbert-tér lineárisan független elemei. Abból a célból, hogy a (10a) egyenlőtlenségsorozat jelen esetre vonatkozó analógját felírhassuk, meg kell még követelni, hogy a p_{ju}-k legyenek benne $\mathbf{R}_u^{\mathrm{adj}}$ értelmezési tartományában. k_3 növelésével $\mathbf{C}_{k_3 u}$ gyengén, monoton konvergál $\mathbf{C}_u$-hoz. Ha a p_{ju}-k $(j = 1, 2, \ldots)$ rendszere teljes, a konvergencia erős.

Az $\mathbf{M}_{k_4 u}$ operátor $\mathbf{M}_{k_2 l}$-hez hasonlóan nyerhető:

$$\mathbf{M}_{k_4 u} = \mathbf{T}_u \mathbf{S}_{k_4 u} \mathbf{T}_u , \tag{15}$$

ahol

$$\mathbf{T}_u = \langle \mathbf{T}_{u1}, \mathbf{T}_{u2}, \ldots, \mathbf{T}_{un} \rangle ,$$
$$\mathbf{T}_{ui} = \langle (\theta_i - \theta_{ui})^{1/2}, \; [\varrho_i A_i - (\varrho A)_{ui}]^{1/2},$$
$$[\varrho_i A_i - (\varrho A)_{ui}]^{1/2}, \; [\varrho_i A_i - (\varrho A)_{ui}]^{1/2} \rangle ,$$
$$\mathbf{S}_{k_4 u} = \sum_{j,i=1}^{k_4} d_{jiu}(\ldots, s_{iu}) \, s_{ju} ,$$

itt az $s_{1u}, s_{2u}, \ldots, s_{k_4 u}$ elemek az alapul vett Hilbert-tér lineárisan független elemei, és

$$[d_{jiu}] = [(s_{ru}, s_{su})]_{ji}^{-1} ; \qquad r, s = 1, 2, \ldots, k_4 .$$

$\mathbf{T}_u$ szimmetrikus operátor.

Az s_{jl}-ekhez hasonlóan az s_{ju}-kal kapcsolatban sem kell további előírást tenni, mert $\mathbf{T}_u$ az egész téren értelmezve van.

k_4 növelésével $\mathbf{M}_{k_4 u}$ gyengén, monoton konvergált $\mathbf{M}_u$-hoz. Ha az s_{ju} $(j = 1, 2, \ldots)$ vektorok rendszere teljes, a konvergencia erős.

4. A projektor operátorok különleges megválasztása

Az előző pontban szerkesztett csökkentett operátorokkal felírt I(24l) és I(24u) szerinti sajátértékfeladatok sajátértékei eleget tesznek az I(25) egyenlőtlenségnek, továbbá k_1, k_2 növelésével az alsó, k_3, k_4 növelésével a felső sajátértékkorlátok javíthatók.

E kedvező sajátságok kihasználhatósága érdekében előírt pontossággal ki kell tudni számítani I(24l) és I(24u) kívánt számú sajátértékét.

Az e cél elérését szolgáló eddig ismert két fő eljárás — az ún. operátorcsonkolással dolgozó és a Bazley—Fox-féle „special choice" módszer [1] közül az utóbbi elvei alapján haladunk tovább; a következőkben csupán az I(24l) feladat kapcsán fejtjük ki a részleteket; I(24u)-ra az eredmények értelemszerűen alkalmazhatók.

Az [1] szerinti „special choice" abban áll, hogy a p_{jl}- és s_{jl}-eket úgy kell megválasztani — ha lehetséges —, hogy azok a már ismertetteken kívül az alábbi feltételeket is kielégítsék:

$$\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} p_{jl} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} \mathbf{B}_l u_{lk} , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_1 , \tag{16}$$

$$\mathbf{T}_l s_{jl} = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{jkl} \mathbf{B}_l u_{lk} , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 , \tag{17}$$

ahol $\mathbf{B}_l$ az alsó alaprúdszerkezet tömegoperátora, $u_{l\nu}$ pedig az alsó alaprúdszerkezet számszerűen ismertnek vett ν-edik sajátvektora, m előre alkalmasan megválasztott szám, a β_{jkl}- és ε_{jkl}-ek egyelőre ismeretlen állandók. (Az m szám megválasztását befolyásoló néhány szempontot e dolgozat harmadik része ismertet.)

A „special choice" módszer nehézsége éppen ezeknek a β_{jkl} és ε_{jkl} állandóknak a kiszámíthatóságával kapcsolatos. A számításnak egyrészt elvben végrehajthatónak kell lennie, másrészt világos, hogy ez az adott célra akkor használható a legjobban, ha a számítás elvben zárt alakban lehetséges. Azt is célszerű tudatosítanunk, hogy a szóban forgó állandók kiszámíthatósága megkívánja, hogy (16) és (17) a p_{jl}-, illetve az s_{jl}-ekre megoldható legyen.

(16) és (17) tekintetbe vehetősége céljából kirészletezzük a 3.-ban mondottak alapján, majd kissé átalakítjuk az I(241) sajátértékfeladatot:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_l + \mathbf{C}_{k_1l})\,u - \alpha^2(\mathbf{B}_l - \mathbf{M}_{k_2l})\,u = \\
&= (\mathbf{A}_l + \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}\mathbf{P}_{k_1l}\mathbf{R}_l)\,u - \alpha^2(\mathbf{B}_l - \mathbf{T}_l\mathbf{S}_{k_2l}\mathbf{T}_l)\,u = \\
&= \mathbf{A}_l u + \sum_{j,i=1}^{k_1} b_{jil}(\mathbf{R}_l u, p_{il})\,\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} p_{jl} - \\
&- \alpha^2\left[\mathbf{B}_l u - \sum_{j,i=1}^{k_2} d_{jil}(\mathbf{T}_l u, s_{il})\,\mathbf{T}_l\mathbf{S}_{jl}\right] = \\
&= \mathbf{A}_l u + \sum_{j,i=1}^{k_1} b_{jil}(u, \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} p_{il})\,\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} p_{jl} - \\
&- \alpha^2\left[\mathbf{B}_l u - \sum_{j,i=1}^{k_2} d_{jil}(u, \mathbf{T}_l s_{il})\,\mathbf{T}_l s_{jl}\right].
\end{aligned} \tag{18}$$

Az utolsó egyenlőségjel után $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$ tulajdonságát, s $\mathbf{T}_l$ szimmetriáját vettük figyelembe.

(16)- és (17)-et (18)-ba téve

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_l u + \sum_{j,i=1}^{k_1} b_{jil}\left(u, \sum_{k=1}^{m} \beta_{ikl}\mathbf{B}_l u_{lk}\right) \sum_{p=1}^{m} \beta_{jpl}\mathbf{B}_l u_{lp} - \\
&- \alpha^2\left[\mathbf{B}_l u - \sum_{j,i=1}^{k_2} d_{jil}\left(u, \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{ikl}\mathbf{B}_l u_{lk}\right) \sum_{p=1}^{m} \varepsilon_{jpl}\mathbf{B}_l u_{lp}\right] = \\
&= \mathbf{A}_l u + \sum_{j,i=1}^{k_1} \sum_{k,p=1}^{m} (u, \mathbf{B}_l u_{lk})\,\beta_{jpl} b_{jil}\,\beta_{ikl}\mathbf{B}_l u_{lp} - \\
&- \alpha^2\left[\mathbf{B}_l u - \sum_{j,i=1}^{k_2} \sum_{k,p=1}^{m} (u, \mathbf{B}_l u_{lk})\,\varepsilon_{jpl} d_{jil}\,\varepsilon_{ikl}\mathbf{B}_l u_{lp}\right] = 0, \\
&\mathbf{K}_l u = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

5. A (19) sajátértékfeladat vizsgálata

A (19) sajátértékfeladatot az I(24l)-ből származtattuk azzal, hogy a benne szereplő projektor operátorokat (3), (9), illetve (12), (13) szerint alkottuk meg, majd az alterüket alkotó elemeket különlegesen vettük fel. A (19) feladat önadjungáltságát elegendő lesz tehát a (3)-, (9)-, illetve (12)-, (13)-mal felírt I(24l)-en igazolni.

Tekintsük e célból az $u, v \in \vartheta_A = \vartheta_{A_l}$ elemeket, és képezzük az alábbi alakot:

$$(u, [\mathbf{A}_l + \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} \mathbf{P}_{k_1 l} \mathbf{R}_l] v) = \left(u, \left[\mathbf{A}_l v + \sum_{j,i=1}^{k_1} b_{jil} (\mathbf{R}_l v, p_{il}) \, \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} p_{jl}\right]\right) =$$

$$= (u, \mathbf{A}_l v) + \sum_{j,i=1}^{k_1} b_{jil} (v, \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} p_{il}) (u, \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} p_{jl}) .$$

A jobb oldali első tagról az I.3.-beli bizonyítástechnikával megmutatható, hogy értékét u és v felcserélése nem befolyásolja; a második taggal kapcsolatban a b_{jil} 2.-beli definíciójából következő $b_{jil} = b_{ijl}$ egyenlőség alapján látható be, hogy hasonlóképpen nem változtatja meg értékét u és v felcserélése.

Az

$$(u, [\mathbf{B}_l - \mathbf{T}_l \mathbf{S}_{k_2} \mathbf{T}_l] \, \mathbf{v}) = (u, \mathbf{B}_l v) - \sum_{i,j=1}^{k_2} d_{jil} (v, \mathbf{T}_l s_{il}) (u, \mathbf{T}_l s_{jl})$$

skaláris szorzat értékét sem befolyásolja u és v felcserélése. A jobb oldal első tagjánál ez $\mathbf{B}_l$ ismeretében azonnal látszik, a második taggal kapcsolatban — az előzőhöz hasonló módon a $d_{jil} = d_{ijl}$ egyenlőségből következik.

A fentiekkel igazolást nyert, hogy a (19) sajátértékfeladat önadjungált.

(19) sajátértékei a (16) és (17) felvétel következtében különlegesen alakulnak, és a közbenső operátoros megoldási módszer egyik sajátságaként két sajátértékhalmaz egyesítéseként adódnak.

Az egyik sajátértékhalmaz az ismertnek vett $\alpha_{l\nu}^2$-ek halmazának az a része, amelyre $\nu = m + 1, m + 2, \ldots$ Ez úgy látható be, hogy (19)-be beteszszük u helyébe $u_{l\nu}$-t. A kettős szummák utáni skalárszorzatok $u_{l,m+1}, u_{l,m+2}, \ldots$ betevésekor eltűnnek, mert az alsó alaprúdszerkezet különböző indexű sajátvektorai $\mathbf{B}_l$ közvetítésével általánosított értelemben ortogonálisak egymásra. Ily módon (19)-ből az alábbit nyerjük:

$$\mathbf{A}_l u_{l\nu} - \alpha^2 \mathbf{B}_l u_{l\nu} = 0, \qquad \nu = m + 1, m + 2, \ldots$$

Az alsó alaprúdszerkezet sajátértékeinek meghatározásából következik, hogy a fenti egyenlet

$$\alpha^2 = \alpha_{l\nu}^2 \qquad (\nu = m + 1, m + 2, \ldots)$$

behelyettesítéssel kielégül. A (19)-hez tartozó peremfeltételi egyenlet is kielégül $u = u_{l\nu}$ behelyettesítéssel (tetszőleges ν-re) $u_{l\nu}$ definíciójából következően.

Megállapítható tehát, hogy $\alpha^2_{l,m+1}, \alpha^2_{l,m+2}, \ldots$ sajátértéke a (19) sajátértékfeladatnak.

A következőkből ki fog tűnni, hogy a (19) sajátértékfeladatnak további sajátértékei is kell, hogy legyenek.

A (19) feladat ugyanis amellett, hogy önadjungált, teljesdefinit is, ami az I(24u) egyenlet után felírt első két egyenlőtlenségből tűnik ki. Ennek következtében az $\alpha^2_{k_1k_2\nu}$-vel jelölendő sajátértékek a végtelenben torlódnak:

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha^2_{k_1k_2\nu} = \infty ,$$

aminek viszont az a következménye, hogy (19) sajátfüggvényei teljes függvényrendszert alkotnak [2].

Mivel (19)-nek az $u_{k_1k_2\nu}$-vel jelölhető sajátfüggvényei teljes függvényrendszert alkotnak, nem létezhet az alapul vett függvénytérben olyan nem azonos zérus v_q elem, amely a rendszer valamennyi függvényével kielégítené a

$$\left(v_q, \left[\mathbf{B}_l u_{k_1k_2\nu} - \sum_{j,i=1}^{k_2} \sum_{k,p=1}^{m} (u_{k_1k_2\nu}, \mathbf{B}_l u_{lk})\, \varepsilon_{jpl} d_{jil}\, \varepsilon_{ikl} \mathbf{B}_l u_{lp}\right]\right) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots \quad (20)$$

formulával kifejezett, általánosított ortogonalitási feltételt. [Az ortogonalitási feltételben szereplő operátor a (19)-beli tömegoperátor.]

Ha tehát (19)-nek csak az eddig megismert $\alpha^2_{l,m+1}, \alpha^2_{l,m+2}, \ldots$ volnának a sajátértékei, akkor (20)-at nem lehetne zérustól különböző v_q-val kielégíteni az alább felsorolt valamennyi $u_{k_1k_2\nu}$-vel:

$$u_{k_1k_2\nu_1} = u_{l,m+1}, \; u_{k_1k_2\nu_2} = u_{l,m+2}, \ldots$$

Ennek a kérdésnek a vizsgálatát egyszerűsíti az a körülmény, hogy (20)-ba $u_{l\nu}$-t ($\nu = m+1, m+2, \ldots$) betéve $u_{k_1k_2\nu}$ helyébe, a kettős szumma eltűnik, elegendő tehát (20) helyett a sokkal egyszerűbb

$$(v_q, \mathbf{B}_l u_{l\nu}) = 0, \qquad \nu = m+1, m+2, \ldots \quad (20\text{a})$$

ortogonalitási feltételt vizsgálni.

(20a)-ból kitűnik az $u_{l\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) vektorrendszer tulajdonságai ismeretében, hogy azt ki lehet elégíteni

$$v_q = \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{\mu q} u_{l\mu} \quad (21)$$

alakú vektorral, ahol $\gamma_{\mu q}$-k tetszőleges állandók. Ez a tény csak abban az esetben jelenti azt, hogy (19)-nek vannak még más sajátértékei és sajátfüggvényei az eddig megismerteken kívül, ha a $\gamma_{\mu q}$-k nem mind zérusok.

A $\gamma_{\mu q}$-kra abból kaphatunk felvilágosítást, hogy v_q-nak (19)-et is ki kell elégítenie.

[Az a körülmény közvetlenül kiolvasható (19) első egyenletéből és (20a)-ból, hogy (20a)-t ki lehet ugyan elégíteni olyan v_q-val, amelyben csak egyetlen μ-re — mondjuk μ_1-re — volna $\gamma_{\mu_1 q} \neq 0$. (19) első egyenletét azonban általában nem lehet kielégíteni ilyen $v_q = \gamma_{\mu_1 q} u_{l\mu_1}$-et téve u, és $\alpha_{l\nu}^2$-et téve α^2 helyébe. Ez azt mutatja, hogy (19) még meg nem talált további sajátértékei közé általában nem kerülhet bele $\alpha_{l\nu}^2$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ indexszel.]

A (19) alatti mellékfeltételi egyenletet v_q feltétlenül kielégíti, mert a mellékfeltételi egyenlet homogén, s (21) minden tagja — az $u_{l\nu}$-k definíciója következtében — kielégíti azt.

$\gamma_{\mu q}$-k —, illetve főként a még hiányzó sajátértékek — keresése érdekében betesszük a (25) szerinti v_q-t (19) első egyenletébe u helyébe. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_l \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{\mu q} u_{l\mu} + \sum_{j,i=1}^{k_1} \sum_{k,p,\mu=1}^{m} \gamma_{\mu q} (u_{l\mu}, \mathbf{B}_l u_{lk})\, \beta_{jpl} b_{jil} \beta_{ikl} \mathbf{B}_l u_{lp} - \\ - \alpha^2 \left[\mathbf{B}_l \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{\mu q} u_{l\mu} - \sum_{j,i=1}^{k_2} \sum_{k,p,\mu=1}^{m} \gamma_{\mu q} (u_{l\mu}, \mathbf{B}_l u_{lk})\, \varepsilon_{jpl} d_{jil}\, \varepsilon_{ikl} \mathbf{B}_l u_{lp} \right] = 0 .\end{gathered} \tag{22}$$

(22)-ben — $u_{l\nu}$-k ismert tulajdonsága következtében — a gömbölyű zárójellel kijelölt skaláris szorzatok $\mu \neq k$ esetére eltűnnek, tehát

$$\sum_{\mu=1}^{m} (u_{l\mu}, \mathbf{B}_l u_{lk}) = \sum_{\mu=1}^{m} \delta_{\mu k} (u_{l\mu}, \mathbf{B}_l u_{lk}) ,$$

ahol $\delta_{\mu k}$ a Kronecker-szimbólum.

Tekintetbe véve még, hogy

$$\mathbf{A}_l u_{l\mu} = \alpha_{l\mu}^2 \mathbf{B}_l u_{l\mu} ,$$

továbbá, hogy

$$\mathbf{B}_l u_{l\mu} = \sum_{p=1}^{m} \delta_{\mu p} \mathbf{B}_l u_{lp} , \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m ;$$

22) így lakul $\mathbf{B}_l u_{lp}$ kiemelése után:

$$\begin{gathered}\sum_{\mu,p=1}^{m} \gamma_{\mu q} \Bigg\{ \alpha_{l\mu}^2 \delta_{\mu p} + \sum_{i,j=1}^{k_1} \sum_{k=1}^{m} \delta_{\mu k} (u_{l\mu}, \mathbf{B}_l u_{lk})\, \beta_{jpl} b_{jil} \beta_{ikl} - \\ - \alpha^2 \left[\delta_{\mu p} - \sum_{i,j=1}^{k_2} \sum_{k=1}^{m} \delta_{\mu k} (u_{l\mu}, \mathbf{B}_l u_{lk})\, \varepsilon_{jpl} d_{jil}\, \varepsilon_{ikl} \right] \Bigg\} \mathbf{B}_l u_{lp} = 0 .\end{gathered} \tag{23}$$

(23) bal oldala a $\mathbf{B}_l u_{lp}$, $(p = 1, 2, \ldots, m)$ vektorok

$$\sum_{p=1}^{m} a_p \mathbf{B}_l u_{lp} = \mathbf{B}_l \sum_{p=1}^{m} a_p u_{lp}$$

alakú lineáris kombinációja. Az u_{lp} vektorok — az l feladat első m sajátvektorai lévén — lineárisan függetlenek,

$$\sum_{p=1}^{m} a_p u_{lp}$$

tehát csak $a_p = 0$ $(p = 1, 2, \ldots, m)$ esetén lehet zérus. $\mathbf{B}_l$ csak a zérusvektort viheti át zérusba, így (23) bal oldala csak úgy lehet zérus, ha $a_p = 0$, $p = 1, 2, \ldots, m$.

Az ezt kifejező egyenletrendszer m egyenletből álló homogén lineáris algebrai egyenletrendszer $\gamma_{\mu q}$-kra $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$. Mivel zérustól különböző (21) szerinti v_q-t keresünk, $\gamma_{\mu q}$-k nem lehetnek mind zérusok; a szóban forgó egyenletrendszer együtthatódeterminánsának tehát el kell tűnnie. (23)-ból kiolvasható, hogy együtthatómátrixa elemeinek sorindexe p, oszlopindexe μ lesz: elemei tehát könnyen képezhetők. A kérdéses együtthatómátrix így alakul:

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_{l1}^2, \alpha_{l2}^2, \ldots, \alpha_{lm}^2 \rangle + \begin{bmatrix} \beta_{11l} & \cdots & \beta_{k_1 1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1ml} & \cdots & \beta_{k_1 ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11l} & \cdots & b_{1k_1 l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k_1 1l} & \cdots & b_{k_1 k_1 l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11l} & \cdots & \beta_{1ml} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k_1 1l} & \cdots & \beta_{k_1 ml} \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \langle (u_{l1}, \mathbf{B}_l u_{l1}), (u_{l2}, \mathbf{B}_l u_{l2}), \ldots, (u_{lm}, \mathbf{B}_l u_{lm}) \rangle - \\ &- \alpha^2 \Bigg\{ \langle 1,1, \ldots, 1 \rangle - \\ &- \begin{bmatrix} \varepsilon_{11l} & \cdots & \varepsilon_{k_2 1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{1ml} & \cdots & \varepsilon_{k_2 ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11l} & \cdots & d_{1k_2 l} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k_2 1l} & \cdots & d_{k_2 k_2 l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11l} & \cdots & \varepsilon_{1ml} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{k_2 ml} & \cdots & \varepsilon_{k_2 ml} \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \langle (u_{l1}, \mathbf{B}_l u_{l1}), (u_{l2}, \mathbf{B}_l u_{l2}), \ldots, (u_{lm}, \mathbf{B}_l u_{lm}) \rangle \Bigg\}. \end{aligned} \tag{24}$$

A (24) mátrix determinánsát — a β_{ijl}, b_{ijl}, ε_{ijl}, d_{ijl} mennyiségeket rögzítettnek tekintve — a benne szereplő α^2 megfelelő választásával tüntethetjük el. α^2-re ily módon

$$|\,\mathbf{A}_m - \alpha^2\,\mathbf{B}_m\,| = 0 \tag{24a}$$

determinánsegyenletre vezető m-edrendű kvadratikus mátrixokkal felépített algebrai sajátértékfeladatot kapunk. $\mathbf{A}_m$ és $\mathbf{B}_m$ jelentése (24)-ből olvasható ki.

(24a)-ból számíthatók ki tehát a (19) sajátértékfeladat még hiányzó sajátértékei. Ezeknek, s az $\alpha_{l,m+1}^2$-, $\alpha_{l,m+2}^2$-, ...-eknek a halmazát egyesítve, és nagyság szerint rendezve kapjuk az I(25) egyenlőtlenségeket kielégítő $\alpha^2_{k_1 k_2 \nu}$-ket, azaz a javított alsó sajátérték korlátokat.

(24a)-ból természetesen csak β_{ijl}, b_{ijl}, ε_{ijl} és d_{ijl} ismeretében lehet sajátértékeket számítani; az előbbiek kiszámítása azonban még nem történt meg; ezzel foglalkozik a következő pont.

6. A projektor operátorok bázisának számítása

A (16) és (17) képletekből látható, hogy az előző pont végén felvetett feladat egyenértékű a p_{jl} és az s_{jl} bázisok meghatározásával. Az alábbiakban csak ezek számítását részletezzük ki; a javított felső korlátok számításához szükséges p_{ju} és s_{ju} bázisok analóg módon adódnak.

p_{jl}-eket (16)-ból fogjuk kiszámítani. Vezessük be e célból az alábbi jelöléseket:

$$p_{jl} \doteq \begin{bmatrix} p_{jl1} \\ p_{jl2} \\ \vdots \\ p_{jln} \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad p_{jli} \doteq \begin{bmatrix} \varphi_{jli}(x_i) \\ \xi_{jli}(x_i) \\ \eta_{jli}(x_i) \\ \zeta_{jli}(x_i) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$j = 1,2, \ldots, k_1, \quad i = 1,2, \ldots, n,$$

$$u_{lk} \doteq \begin{bmatrix} u_{lk_1} \\ u_{lk_2} \\ \vdots \\ u_{ikn} \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad u_{lki} \doteq \begin{bmatrix} \varphi_{lki}(x_i) \\ \xi_{lki}(x_i) \\ \eta_{lki}(x_i) \\ \zeta_{lki}(x_i) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$k = 1,2, \ldots, m, \quad i = 1,2, \ldots, n.$$

Előző megállapodásunk szerint az u_{lk} vektorokat ismertnek tekintjük.

A számításokhoz szükség van még $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$ képzésére. $\mathbf{R}_l$ (6) és (7) kifejezéséből kiindulva felírjuk $u \in \vartheta_A$-val és $v \in \operatorname{dom} \mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$-al $(\mathbf{R}_l u, v)$-t, majd megfelelő számú parciális integrálásokkal jutunk $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$-hoz. A számításokban v-t az alábbi alakúnak vesszük:

$$v \doteq \begin{bmatrix} v_1(x_1) \\ v_2(x_2) \\ \vdots \\ v_n(x_n) \end{bmatrix},$$

s a $v_i(x_i)$ blokkoszlopokat I(6) szerintieknek. Ily módon:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{R}_l u, v) &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} v_i^* \mathbf{R}_{li} u_i \, dx_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} \{ -\Phi_i [G_i I_i - (GI)_{li}]^{1/2} \varphi_i' - \Xi_i [E_i A_i - (EA)_{li}]^{1/2} \xi_i' + \\
&\quad + H_i [E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li}]^{1/2} \eta_i'' + Z_i [E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li}]^{1/2} \zeta_i'' \} \, dx_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \Big[-\Phi_i [G_i I_i - (GI)_{li}]^{1/2} \varphi_i - \Xi_i [E_i A_i - (EA)_{li}]^{1/2} \xi_i + \\
&\quad + H_i [E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li}]^{1/2} \eta_i' - \big[H_i (E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li})^{1/2} \big]' \eta_i + \\
&\quad + Z_i [E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li}[^{1/2} \zeta_i' - \big[Z_i (E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li})^{1/2} \big]' \zeta_i \Big]_0^{l_i} + \\
&\quad + \int_0^{l_i} \varphi_i \big[(G_i I_i - (GI)_{li})^{1/2} \big] \varphi_i + \xi_i \big[(E_i A_i - (EA)_{li})^{1/2} \Xi_i \big]' + \\
&\quad + \eta_i \big[(E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li})^{1/2} H_i \big]'' + \zeta_i \big[(E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li})^{1/2} Z_i \big]'' \Big\} \, dx_i
\end{aligned}
\tag{27}
$$

(27)-ből kiolvasható, hogy $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$ az

$$
\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}} = \langle \mathbf{R}_{l1}^{\mathrm{adj}}, \mathbf{R}_{l2}^{\mathrm{adj}}, \ldots, \mathbf{R}_{ln}^{\mathrm{adj}} \rangle \tag{28}
$$

formulával az alábbi diagonális blokkokból építhető fel ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_{li}^{\mathrm{adj}} = \Big\langle & \big[(G_i I_i - (GI)_{li})^{1/2} \big]' + (G_i I_i - (GI)_{li})^{1/2} \frac{d}{dx_i}, \\
& \big[(E_i A_i - (EA)_{li})^{1/2} \big] + (E_i A_i - (EA)_{li})^{1/2} \frac{d}{dx_i}, \\
& \big[(E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li})^{1/2} \big]'' + 2 \big[(E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li})^{1/2} \big]' \frac{d}{dx_i} + \\
& \quad + (E_i I_{\zeta i} - (EI_\zeta)_{li})^{1/2} \frac{d^2}{dx_i^2}, \\
& \big[(E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li})^{1/2} \big]'' + 2 \big[(E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li})^{1/2} \big]' \frac{d}{dx_i} + \\
& \quad + (E_i I_{\eta i} - (EI_\eta)_{li})^{1/2} \frac{d^2}{dx_i^2} \Big\rangle .
\end{aligned}
\tag{29}
$$

(27)-ből az $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$-hoz tartozó mellékfeltételek is kiolvashatók, mivel tudjuk, hogy $\mathbf{R}_l$ tartománya ϑ_A. Az $\mathbf{A}$ operátorhoz rendelt lényeges mellékfeltételek segítségével — amennyit lehetséges — a (27)-beli, s u-ra vonatkozó peremkifejezésekből a többivel kifejezzük; rendezés után a megmaradó, s u-ra vonatkozó ún. szabad peremkifejezések mindegyike a v-re vonatkozó peremkifejezések egy-egy lineáris kombinációjával van megszorozva. Az összes peremtag eltűnését követelve, a szabad tagok együtthatóit zérussá kell tenni, és éppen ezek az egyenletek adják a keresett, az $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$-hoz tartozó mellékfeltételeket. Jelöljük ezeket a

$$\mathbf{K}_{le}^{\mathrm{adj}}\, v = 0 \tag{30}$$

egyenlettel.

$\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$ és a hozzárendelt mellékfeltételek ismeretében rátérhetünk a projektorbázisok számítására.

A (16) formulába betéve p_{jl} (25), s u_{lk} (26) alatti kifejezését, valamint $\mathbf{B}_l$-nek I(4) mintájára az I(161) két utolsó egyenlőtlensége alapján felépített alakját, továbbá $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$ (28) és (29) szerinti képletét az alábbi $4n$ egyenletből álló differenciálegyenletrendszert kapjuk p_{jl} elemeire:

$$\begin{aligned}
\left[\left(G_1 I_1 - (GI)_{l1}\right)^{1/2} \varphi_{jl1}\right]' &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} \theta_{l1} \varphi_{lk1}\,, \\
\left[\left(E_1 A_1 - (EA)_{l1}\right)^{1/2} \xi_{jl1}\right]' &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} (\varrho A)_{l1}\, \xi_{lk1}\,, \\
\left[\left(E_1 I_{\zeta 1} - (EI_\zeta)_{l1}\right)^{1/2} \eta_{jl1}\right]'' &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} (\varrho A)_{l1}\, \eta_{lk1}\,, \\
\left[\left(E_1 I_{\eta 1} - (EI_\eta)_{l1}\right)^{1/2} \zeta_{jl1}\right]'' &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} (\varrho A)_{l1}\, \zeta_{lk1}\,, \\
&\;\vdots \\
\left[\left(G_n I_n - (GI)_{ln}\right)^{1/2} \varphi_{jln}\right]' &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} \theta_{ln} \varphi_{lkn}\,, \\
\left[\left(E_n A_n - (EA)_{ln}\right)^{1/2} \xi_{jln}\right]' &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} (\varrho A)_{ln}\, \xi_{lkn}\,, \\
\left[\left(E_n I_{\zeta n} - (EI_\zeta)_{ln}\right)^{1/2} \eta_{jln}\right]'' &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} (\varrho A)_{ln}\, \eta_{ln}\,, \\
\left[\left(E_n I_{\eta n} - (EI_\eta)_{ln}\right)^{1/2} \zeta_{jln}\right]'' &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} (\varrho A)_{ln}\, \zeta_{lkn}\,, \\
&\quad j = 1, 2, \ldots, k_1
\end{aligned} \tag{31}$$

(31) egyenletei egyenként integrálhatók. Az integrációs állandók megválasztására nincsen megkötésünk; megállapodás szerint válasszuk valamenynyit zérusnak. Ezzel a választással (31)-ből az alábbi egyenleteket kapjuk; elegendő, ha csak az első és utolsó egyenletet írjuk ki:

$$\begin{aligned}
\left(G_1 I_1 - (GI)_{l1}\right)^{1/2} \varphi_{jl1} &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} \theta_{l1} \int_0^{x_1} \varphi_{lk1}\, dx_1\,, \\
&\;\vdots \\
\left(E_n I_{\eta n} - (EI_\eta)_{ln}\right)^{1/2} \zeta_{jln} &= \sum_{k=1}^{m} \beta_{jkl} (\varrho A)_{ln} \int_0^{x_n} \int_0^{x_n} \zeta_{lkn}\, dx_n\, dx_n\,.
\end{aligned} \tag{32}$$

(32)-ből a p_{jl}-eket alkotó $\varphi_{jl1}, \ldots, \zeta_{jln}$ függvényeket csak akkor fejezhetjük ki, ha a $G_1 I_1 - (GI)_{l1}, \ldots, E_n I_{\eta n} - (EI_\eta)_{ln}$ függvények sehol sem zérusok a megfelelő $0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant l_n$ intervallumokban. E körülmény arra figyelmeztet, hogy az I(16l) első négy egyenlőtlenségében — és a javított felső korlátokat adó, itt ki nem részletezett számításokban szereplő I(16u) első négy egyenlőtlenségében — szigorú egyenlőtlenségeket kell venni.

A (32)-ből így formálisan kifejezhetők a keresett p_{jl}-ek; a bennük szereplő β_{jkl}-ek azonban még ismeretlenek. Ezeket abból az előírásból kiindulva határozhatjuk meg, amelyet annak érdekében tettünk, hogy (10)-et (10a) alakba írhassuk: p_{jl}-eknek benne kell lenniük $\mathbf{R}_l^{\mathrm{adj}}$ tartományában, azaz eleget kell tenniük a (30) alatti feltételnek, v helyébe p_{jl}-et gondolva.

Tegyük be a (32)-ből kifejezhető p_{jl}-t m megválasztása után (30)-ba; eredményül homogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk a β_{j1l}-, β_{j2l}-, $\ldots, \beta_{jml}$-re numerikusan ismert együtthatókkal. Jelöljük az együtthatómátrix rangját r_{1l}-val. Mivel k_1 számú lineárisan független p_{jl}-re van szükségünk, k_1 számú megoldásrendszerre van szükség a β_{jkl}-ekből ($j = 1, 2, \ldots k_1$). Fenn kell tehát állnia az

$$r_{1l} \leqslant m - k_1 \tag{33}$$

összefüggésnek. Legcélszerűbb az egyenlőség választása, így megkapjuk az adott r_{1l}-hoz és a megválasztott m-hez tartozó legnagyobb értékű, és egyúttal az adott r_{1l}- és m-mel számítható legjobb alsó sajátértékkorlátokat.

Áttérve s_{jl}-ek számítására csak rövid vázlatra szorítkozunk. Jelöléseink az alábbiak lesznek:

$$s_{jl} \doteq \begin{bmatrix} s_{jl1} \\ s_{jl2} \\ \vdots \\ s_{jln} \end{bmatrix}, \qquad \text{ahol} \qquad s_{jli} \doteq \begin{bmatrix} \Phi_{jli}(x_i) \\ \Xi_{jli}(x_i) \\ H_{jli}(x_i) \\ Z_{jli}(x_i) \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$j = 1,2, \ldots, k_1\,,$$
$$i = 1,2, \ldots, n\,.$$

(34)-et, továbbá a (11)-gyel definiált $\mathbf{T}_l$-et (17)-be téve, az algebrai egyenletekké esik szét. A keresett $\Phi_{jl1}, \ldots, Z_{jln}$ függvényeket ezekből csak akkor fejezhetjük ki, ha I(16l) utolsó kettő egyenlőtlenségében is — és a javított felső korlátokat adó, itt ki nem részletezett számításokban szereplő I(16u) utolsó kettő egyenlőtlenségében is — szigorú egyenlőtlenségeket veszünk.

Ezt betartva az s_{jl}-ek formálisan rendelkezésünkre állnak, de a bennük szereplő ε_{jkl}-ek még nem ismertek. Az eddigi meggondolások — eltérően a p_{jl}-ekkel kapcsolatos hasonló okfejtéstől — nem adnak egyértelmű előírást erre a számításra; csak az a követelmény elégítendő ki, hogy k_2 számú lineárisan független s_{jl}-re van szükség. Egyértelműség elérése, és a p_{jl}-ekkel kapcsolatban követett eljáráshoz hasonló eljárás előírása végett az a javaslatunk, hogy s_{jl}-ektől kívánjuk meg, hogy elégítsék ki a (19) alatti $\mathbf{K}_l u = 0$ alakú mellékfeltételek közül a

$$\mathbf{K}_{l_e} u = 0 \tag{35}$$

-val jelölt lényegeseket. Ez az egyenlet — az u helyébe az iménti vázlat szerint kifejezett s_{jl}-et betéve — ismét homogén lineáris algebrai egyenletrendszer lesz az ε_{j1l}-, ε_{j2l}-, . . ., ε_{jml}-re numerikusan adott együtthatókkal. Az együtthatómátrix rangja legyen r_{2l}. k_2 számú lineárisan független megoldásrendszert ($j = 1, 2, \ldots, k_2$) követelve, az

$$r_{2l} \leqslant m - k_2 \tag{36}$$

egyenlőtlenséget kell előírni. Ismét egyenlőséget választva, az adott r_{2l}- és m-hez tartozó legjobb alsó korlát számítást lehetővé tevő k_2-t kapunk.

Ezzel rendelkezésünkre állnak a (24a) sajátértékfeladat felállításához szükséges mennyiségek.

IRODALOM

1. Bazley, N.—Fox, D. N.: Lower Bounds to Eigenvalues Using Operator Decompositions of the Form **B*B**, *Archiv for Rational Mechanics and Analysis* **10** (1962), 352—360
2. Gurtin, M. E.: The Linear Theory of Elasticity. *Encyclopedia of Physics*, Chief editor: S. Flügge, Vol. VIa/2, Editor: C. Truesdell. Springer Berlin—Heidelberg—New York 1972, p. 271

Improvable Bracketing of the Eigenfrequencies of a Space Frame Structure Consisting of Rods with Varying Cross Section, Part II. In connection with the first part published in this review, this paper presents the application of the Weinstein-Bazley-Fox intermediary operator method to the problem circumscribed in the title, with special regard to a possible solution of the difficulty related to the „special choice" method also mentioned by Bazley and Fox in the present case. For the algebraic eigenwert problems required for the calculation of the improved eigenfrequency bounds a deteiled, explicit method is presented. For calculating the upper as well as the lower eigenfrequency bound, the author proposes the intermediary operator method. Hence, basically the same computer programm system can be used for both problems, but with different input data.

Verbesserungsfähige Einschließung der Eigenfrequenzen der Schwingungen von räumlichen Fachwerken aus geraden Stäben mit veränderlichem Querschnitt, II. Teil. Im Anschluß an den in dieser Zeitschrift erschienenen I. Teil beschreibt die vorliegende Arbeit die Anwendung der Weinsten-Bazley-Foxsschen intermediären Operatormethode auf das im Titel genannte Problem, unter besonderer Berücksichtigung einer möglichen Lösung für die mit dem „special choice"-Verfahren verbundene, auch von Bazley und Fox erwähnten, Schwierigkeit. Für die Aufstellung der algebraischen Eigenwertaufgaben zur Berechnung der verbesserten Eigenwert-Schranken wird ein detailliertes Berechnungsverfahren angegeben. Für die Berechnung sowohl der oberen, als auch der unteren Schranken wird in der Arbeit die Methode des intermediären Operators vorgeschlagen. Derart kann für beide Aufgaben im wesentlichen dasselbe Rechenprogrammsystem nur mit anderen Eingangsdaten verwendet werden.