# GÖMBRÁCSOK MORFOLÓGIÁJA

IFJ. MAKAI ENDRE* és TARNAI TIBOR**

[Beérkezett 1973. május 15-én]

A dolgozat a gömbfelülethez illekeszkedő rácsos szerkezetek hálózat-szerkesztésének néhány problémájával foglalkozik. Mindenekelőtt a rács-hálózatok egyenletességét vizsgálja, és ezzel összefüggésben azt, hogy hogyan szerkeszthető olyan, gömbbe vagy gömb köré írt nagy lapszámú poliéder, amelyre a legnagyobb és legkisebb él hosszának hányadosa a lehető legkisebb. A dolgozat legfontosabb eredménye, hogy különféle, gyakorlati szempontból érdekes mellékfeltételek mellett becsléseket ad erre a hányadosra.

## 1. Bevezetés

Előregyártott elemekből összeszerelt, fémvázas, rácsos gömbkupolák szerkezeti kialakításuk szerint egy- vagy többrétegű ráccsal készülhetnek.

Egy adott gömbhöz illeszkedő *egyrétegű gömbrácsról* akkor beszélünk, ha a rács az alábbi három tulajdonság valamelyikével rendelkezik:

a) a rács csomópontjai a gömbfelületen helyezkednek el,

b) a rácsrudak érintik a gömböt,

c) amennyiben a rácsrudak által határolt cellák síkidomok, a cellák síkjai érintik a gömböt.

Egy gömbrács *két-* vagy *többrétegű*, ha két vagy több, koncentrikus gömbhöz egyrétegű rácsok illeszkednek, és az egyes rétegeket rácsozás köti össze. A gyakorlatban előforduló gömbrácsok többnyire egy- és kétrétegűek.

A gömbi rácsszerkezetek konstruálásakor lényeges kérdés, hogy geometriailag milyen legyen a rács hálózata. Minthogy egy kétrétegű gömbrács két egyrétegű gömbrácsból és a két réteget összekötő rácsozásból áll, a hálózat geometriai kialakításának lehetőségeit elsősorban az egyrétegű gömbrácsok esetében kell tisztázni. Ezért *jelen dolgozat csak az egyrétegű gömbrácsokkal és hálózatukkal foglalkozik.*

A leggyakrabban olyan hálózatokkal találkozunk, amelyeknek vagy minden cellája háromszög, vagy minden csomópontjában három hálóvonal fut össze. Az utóbbi típusú hálózat az előbbinek *duálisa.*

A háromszögekből álló gömbi hálózatokkal számos publikáció foglalkozik. Geometriai vizsgálatuk néhány újabb eredményét PATZELT [13] és

* ifj. Makai Endre, 1015 Budapest, Donáti u. 67.
** Tarnai Tibor, 1037 Budapest, Kolostor u. 17.

SCHÖNBACH [14, 15], valamint a jelen tanulmány egyik szerzőjének egy korábbi dolgozata [17] ismerteti. A duális hálózatokat viszonylag kevesebben tanulmányozták. Kevesebb szerkezet is épült ilyen hálózattal. Egy érdekesebb példát [16]-ban láthatunk.

Valamely gömbi hálózathoz tartozó poliéder élhálózatának egyenletességét az $\eta$-val jelölt és az alábbi összefüggéssel értelmezett számmal jellemezzük:

$$\eta = \frac{\text{a poliéder leghosszab élének a hossza}}{\text{a poliéder legrövidebb élének a hossza}}.$$

Az $\eta$ számot a *hálózat egyenlőtlenségi hányadosának* fogjuk nevezni. Azt mondjuk, hogy a poliéder élhálózata *megközelítően egyenletes*, ha a hálózat egyenlőtlenségi hányadosa 1-hez közeli érték.

A gömbfelületnek gömbháromszögekre történő felosztásakor fontos szempont, hogy a felosztás révén előálló poliéder élhálózata megközelítően egyenletes legyen. A tapasztalat azt mutatja, hogy egy adott felosztásfajta esetében a hálózat sűrítésével az $\eta$ hányados nő. Viselkedésének részletesebb vizsgálatával azonban a jelen dolgozat másik szerzőjének egy tanulmányán [10] kívül tudomásunk szerint eddig még nem foglalkoztak.

Dolgozatunk különböző feltételek mellett becsléseket fog adni $\eta$-ra. Elsődleges cél, hogy háromszögekből álló hálózat esetén megállapítassék

a) a különböző fajta, hálózatsűrítéssel előállított felosztássorozatokhoz tartozó $\eta$-sorozatok lehetnek-e felülről korlátosak, és lehetnek-e konvergensek;

b) ha igen, akkor mi az a legkisebb szám, amely még határértéke lehet valamely minden határon túl finomodó felosztássorozathoz tartozó $\eta$-sorozatnak, vagyis mi az $\eta$ számok adott lapszámú felosztásra vett *infimumának*[1] *limes inferiorja*[2], amikor a lapszám a végtelenhez tart;

c) a [17] jelű munkában ismertetett legfontosabb felosztástípusoknál mi az $\eta$-sorozatok határértéke.

Célunk továbbá, hogy a duális hálózatok esetén is megkíséreljünk választ adni az előzőekben feltett kérdésekre.

A b) pont alatti kérdés megválaszolása gyakorlati szempontból nagyon lényeges. Ha ugyanis tudunk konstruálni olyan felosztássorozatot, amelyhez tartozó $\eta$-sorozat monoton növekedően tart a limes inferior számértékéhez, akkor a limes inferior az $\eta$-sorozat valamennyi tagjára nézve felső korlát lesz. Ez azt jelenti, hogy a felosztássorozat bármely tagját választva is, a leg-

[1] Egy alulról korlátos számhalmaz infimumán a számhalmaz legnagyobb alsó korlátját értjük. Jelölése: inf.

[2] Egy $a_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) számsorozat limes inferiorja az a legkisebb érték (az értékbe $A - \infty$-t és $A + \infty$-t is beleértve), amelyhez az $a_n$ sorozat valamely részsorozata tart. Jelölése: $\lim \inf a_n$. Határértéke (limese) nem minden számsorozatnak létezik, limes inferiorja azonban minden számsorozatnak van.

hosszabb él hossza a legrövidebb él hosszától relatíve kevesebbet fog eltérni, mint a limes inferior az 1-től. Ha ez az eltérés nem nagy — mint később látni fogjuk, kisebb mint 18% —, akkor valamennyi rácsrudat egyforma hosszúra lehet legyártani, és a hosszdifferenciákat a csomóponti illesztéseknél lehet megadni.

HAECKEL [5, 6] munkássága nyomán tudjuk, hogy a természetben is előfordulnak gömbrácsok, mégpedig egyes mélytengeri egysejtűek, a *sugárállatkák* (Radiolaria) vázaként. Ezeknek a vázaknak a matematikai, elsősorban topológiai és szimmetria tulajdonságait többek között MORDUHAJ-BOLTOVSZKOJ [11], THOMPSON [18] és WEYL [19] kutatta. A mérnök szemszögéből először R. LE RICOLAIS [8, 9] tanulmányozta a sugárállatkákat. A vázak statikai működésével kapcsolatban több lényeges megállapítást tett. A vázak méretviszonyaival, nevezetesen a vázak $\eta$ élhányadosával azonban egyikük sem foglalkozott.

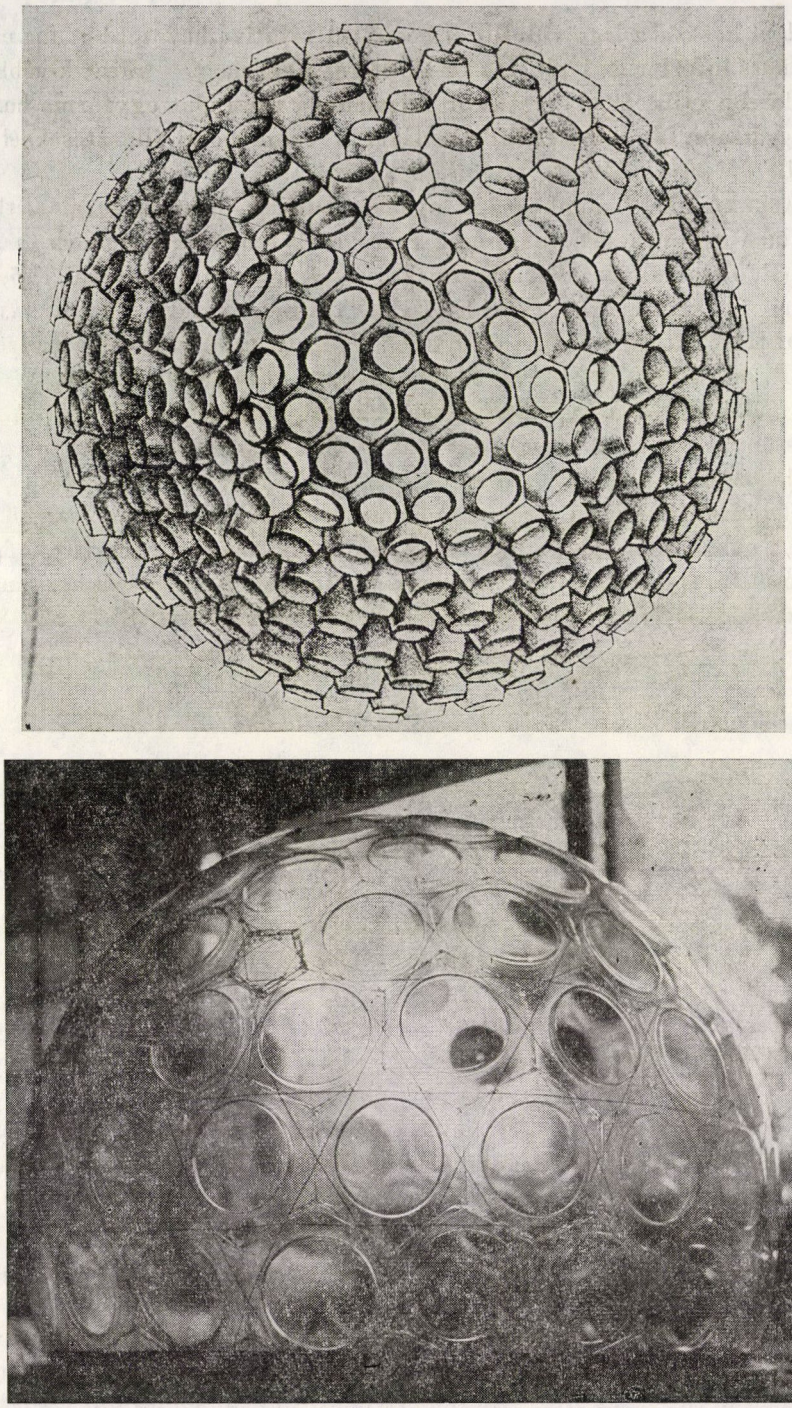
Célul tűztük ki végül, hogy a radiolaria-vázakkal foglalkozó szerzők eredményeit a vázak méretei alapján néhány megjegyzéssel kiegészítsük, és ezek segítségével támpontot adjunk azokhoz az elméleti fejtegetésekhez, amelyek a dolgozat főcéljának eléréséhez szükségesek.

## 2. A radiolaria-vázak tulajdonságai. Analógia mérnöki szerkezetekkel

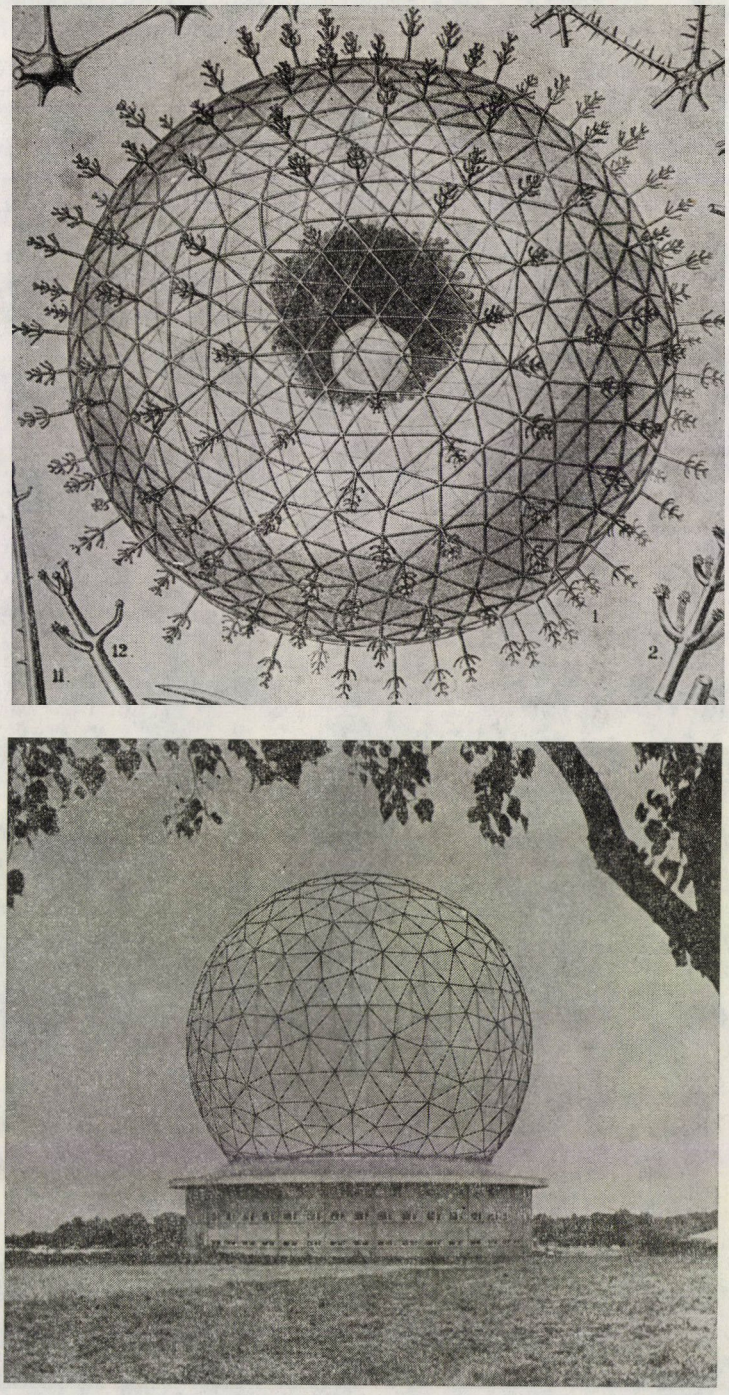
Az építészek az építészeti alapformákat igyekeznek a természetből levezetni. Térbeli rácsos szerkezetek esetében szívesen hivatkoznak a kristályok rácsára, vagy a különböző élő szervezeteket, például az egysejtű kovamoszatokat szilárdító vázakra [7]. Gömbalak esetében szoros analógia mutatható ki egyes mérnöki szerkezetek és bizonyos radiolaria-fajok váza között (1. ábra). Rácsos gömbformákra a hasonlóságot a 2. és 3. ábrák szemléltetik.

A radiolariák vázának részletes vizsgálata nem feladatunk, de talán nem lesz érdektelen röviden utalnunk azokra a körülményekre, amelyek a rácsos vázak morfológiai sajátságait magyarázzák.

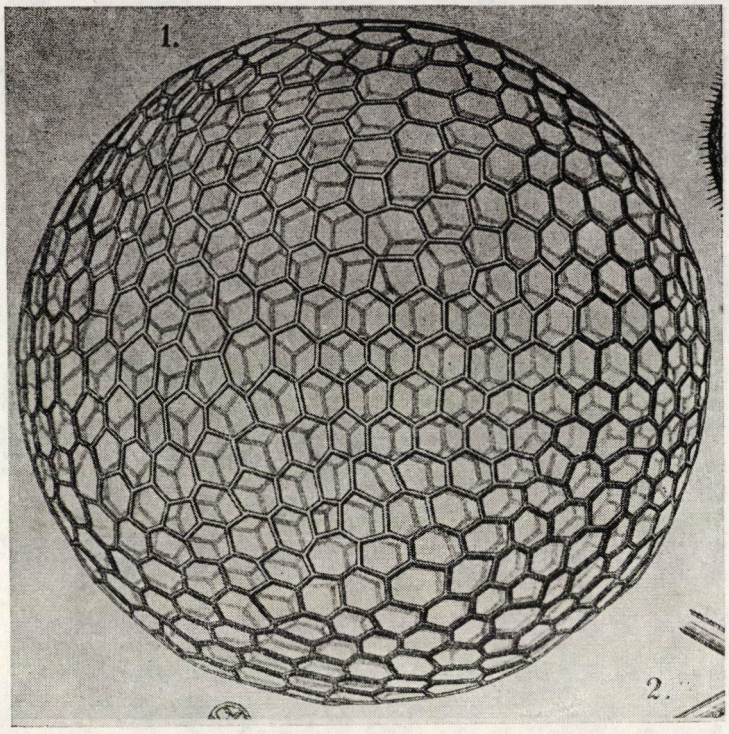
A radiolariák [1, 5, 6, 12] kovavázú, tengerben lebegő, egysejtű állati szervezetek. Egyes fajoknál a váz egy- vagy többrétegű gömbrács formájában alakul ki. A rácsrudak hengeres csövek, melyek a csomópontokban vagy csuklósan vagy merev kapcsolattal csatlakoznak. Ha a rács egyrétegű — és mi a továbbiakban csak ilyenekkel foglalkozunk —, akkor vagy valódi „rácsos szerkezettel" van dolgunk, vagy térbeli „keretszerkezettel". Az előbbi szerkezettípus legjellegzetesebb fajtája az olyan rács, amelynek a hálózata csupa háromszögből áll (2a ábra), az utóbbi típusnál viszont a legjellegzetesebb az előbbi duálisa, vagyis az olyan rács, amelynek minden csomópontjában három rúd találkozik (3a ábra).

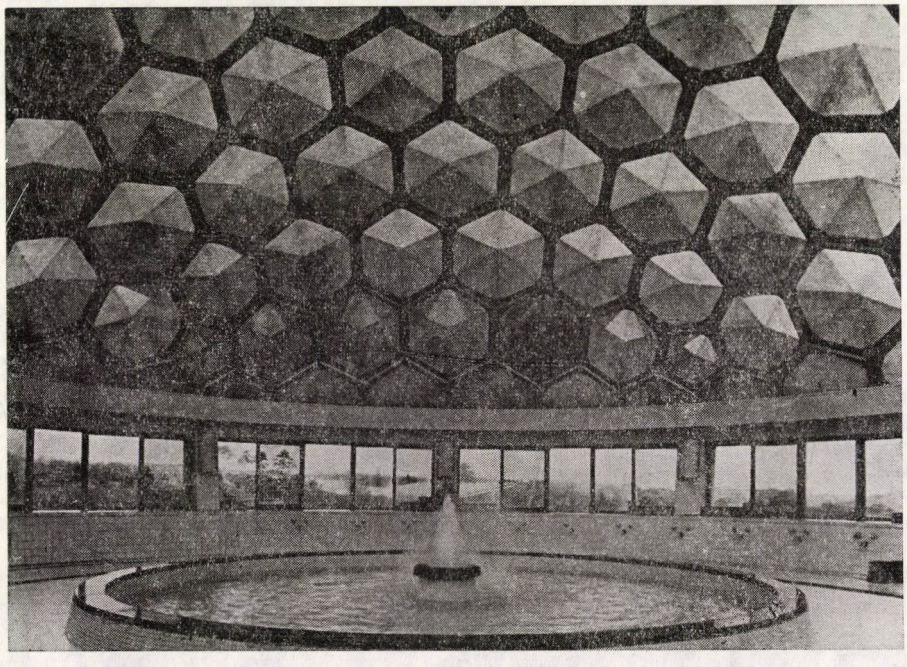


*1. ábra.* a) Ethmosphaera conosiphonia Hkl., b) FULLER úgynevezett „pávaszemes" (Fly's Eye) kupola modellje




*2. ábra.* a) Aulosphaera dendrophora Hkl., b) 49 m átmérőjű rácsos gömbkupola rádióantenna számára



*3. ábra.* a) Aulonia hexagonia Hkl., b) Egy tokiói fürdőépület megközelítően 15 m átmérőjű rácsos gömbkupolája

A rács csomópontjaiból rendszerint radiális, többnyire ágbogas rudacskák állnak ki (2a ábra), amelyekre az állatka testét határoló hártya feszül. A víznyomás közvetlenül a hártyát terheli. A hártya a nyomást a radiális elemekre továbbítja. Így a rács elsősorban csak csomóponti terhelést kap. Itt jegyezzük meg, hogy FULLER gömbsátrai lényegében ugyanezen az elven alapulnak.

A gömb alakú radiolariáknak több faja a tengerben igen mélyen él (4000 ÷ 5000 m). Minthogy átmérőjük ehhez a mélységi mérethez képest kicsi (<5 mm), a víznyomás nagyságát a gömb felszínén azonosnak lehet tekinteni. Ezért nincs kitüntetett irány, amely a rácsforma kialakulására fizikailag döntő befolyással lenne. Energetikai megfontolásokból pedig az adódik, hogy a rácsrudakban megközelítően azonos rúderőknek kell ébredniök. Következésképp a rudaknak a gömbön megközelítően egyenletes elrendeződésben kell elhelyezkedniük, azaz ha a rács háromszögekből áll, akkor az egyes rudak hossza nem térhet el nagy mértékben egymástól. Hasonlót mondhatunk a duális esetben is.

Felmerül már most a kérdés, hogy a radiolariák esetében a rudak megközelítően egyenletes elrendeződése milyen hálózati formákban jut kifejezésre.

Az *Aulosphaera dendrophora* (2a ábra) vázát szemügyre véve, megállapíthatjuk, hogy a csomópontokban a radiális rudacskákat leszámítva vagy 5, vagy 6, vagy 7 rúd találkozik. Van ugyan az ábrán egy csomópont, ahová 8 rúd fut be, de ez — mint a későbbiekből is kiderül — nem jellemző a rácsra.

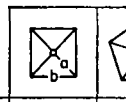
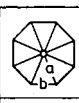
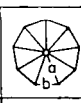
Az *Aulonia hexagonia* (3a ábra) esetében pedig azt találjuk, hogy a rács egyes cellái vagy 5-, vagy 6-, vagy 7-szögűek.

HAECKEL [5] monográfiájában az *Aulosphaera spathillata*-nál, melynek rácsa lényegében csak a radiális elemek alakjában különbözik az Aulosphaera dendrophora-étól, leírja, hogy a gömb átmérője 3,2 mm, a rácsrudak hossza pedig 0,12 mm és 0,16 mm között változik. Ez azt jelenti, hogy a rács megközelítően 3800 darab háromszögből áll, és hálózatának egyenlőtlenségi hányadosa: $\eta = 0{,}16/0{,}12 \approx 1{,}33$. HAECKEL az Aulosphaera dendrophora és az Aulonia hexagonia esetében nem közli a rácsrudak hosszának határait.

Vizsgáljuk meg ezek után, mi az oka annak, hogy a rácsban 5-, 6- és 7-élű csúcsok, ill. 5-, 6- és 7-szögek fordulnak elő. A választ az Aulosphaera spathillata háromszöghálózatú rácsa esetén egyszerűen megadhatjuk.

Tekintsük az állatka rácsának, ill. az általa meghatározott, gömbbe írt konvex poliédernek egy rögzített csúcsát és ennek egy olyan kis gömbi környezetét, amely magába foglalja a szomszédos csúcsokat is. Ezt a környezetet merőlegesen vetítsük rá a gömbnek a rögzített csúcsbeli érintősíkjára. Így a csúcsnak egy síkbeli környezetét kapjuk, amely az Aulosphaera spathillata rácsának méreteiből következően igen jól approximálja az említett gömbi környezetet. A vetítéskor ugyanis a rögzített csúcsba összefutó háromszöglapok éleinek hossza legföljebb 0,5%-ot változik.

Nézzük meg ezután, hogy az érintősíkban, a rögzített csúcs körül, a szomszédos csúcsok és élek vetületének milyen szabályos elrendeződései jöhetnek szóba. A 4. ábrán feltüntetett síkbeli szabályos sokszögekre kiszámítottuk a sokszög oldalának és a sokszög köré írható kör sugarának a hányadosát, illetve, ha ez 1-nél kisebb volt, akkor a reciprokát. Ezek a számok megközelítőleg a rögzített csúcs körüli szabályos gömbi alakzatok $\eta$ értékei. Ha az ilyen oldalszámú síkbeli alakzatok szabályosságát elrontjuk, az $\eta$ hányados nő, a 4. ábrától eltérő oldalszámokra pedig mindenképpen $\eta > 1{,}33$ (sőt $\eta > 1{,}462$).

| |  | | | |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}$ | 1,414 | 1,176 | 1,000 | 1,153 | 1,307 | 1,462 |

*4. ábra.* Szabályos síkbeli sokszögekhez tartozó alakzatok $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányadosai

A rácsban (a gömbön) a síkhoz képest a szabályos négy- és ötszög esetében csökken az $\eta$, hat- vagy annál több oldalú szabályos sokszög esetében viszont nő. A 4. ábra adatai alapján, figyelembe véve az itt elmondottakat, megállapítható, hogy a rácsban négyélű csúcs esetében az $\eta$ hányados értéke nagyobb a HAECKEL által talált 1,33 számértéknél, nyolcélű csúcs esetében pedig csak kevéssel marad 1,33 alatt. Kilencélű csúcs esetében $\eta > 1{,}33$ lesz.

Az eddigiekből következik, hogy az Aulosphaera spathillata rácsában sem négy- vagy annál kevesebb élű, sem kilenc- vagy annál több élű csúcs nem található. Nyolcélű csúcs előfordulása is eléggé kérdéses. A rácsban a nyolcélű csúcs környezetének $\eta$ hányadosa ugyanis a síkban számított $1/(2 \sin 22{,}5°) \approx$ $\approx 1{,}307$ értéknél nagyobb lesz és esetenként túl is lépheti az 1,33-at, egyrészt a gömbi és a síkbeli környezet különbözősége miatt, másrészt a rácsban mutatkozó torzulások miatt. Így nyolcélű csúcs előfordulása nem jellemző. Ez a megállapítás a 2a ábrán látható rácsra is fennáll.

A tapasztalat szerint olyan, megközelítően egyenletes hálózatú mérnöki rácsszerkezeteknél, amelyeknél a csomópontokba 5, 6 és 7 rúd fut be, az $\eta$ egyenlőtlenségi hányados 1,33-nál nagyobb. Ez azért következik be, mert gyártási szempontok miatt a különböző hosszúságú rudak számát kevésre választják. Például egy SCHÖNBACH [15] által ismertetett, megépült szerkezet esetében (2b ábra) a teljes gömbrács 860 db háromszögből áll, a különböző hosszúságú rudak száma pedig 6. A hálózat egyenlőtlenségi hányadosa: $\eta = 1{,}41$. SCHÖNBACH egy másik hálózatán [14] a teljes gömbrács 1700 db háromszögből áll, és a különböző hosszúságú rudak száma 14. A hálózat egyenlőtlenségi hányadosa: $\eta = 1{,}82$. Bizonyos megfontolások alapján az a sejtésünk, hogy egy rögzített topológiai jellemzőkkel rendelkező, háromszögekből

álló gömbrács esetében az $\eta$ hányados csökkentése rendszerint a különböző hosszúságú rudak számának növelésével jár együtt. Ez arra enged következtetni, hogy az Aulosphaera spathillata rácsában valószínűleg sokféle hosszúságú rúd található.

Az Aulosphaera spathillata példáján keresztül láttuk, hogy a természetben megközelítően egyenletes hálózat lényegében 5-, 6- és 7-élű csúcsok segítségével áll elő. Ennek ismeretében a gyakorlati rácskonstrukciókkal kapcsolatosan felmerül a kérdés, hogy szükséges-e mind a három csúcsfajtát alkalmazni a megközelítően egyenletes hálózat szerkesztésekor, vagy elegendő ezek közül csak kettő, esetleg csupán egy fajta. A kérdést általánosabban is megfogalmazhatjuk: Milyen háromszöghálózatú gömbrácsok léteznek, és ezek közül mely típusoknál biztosítható a megközelítően egyenletes hálózat? Erre a kérdésre a következőkben fogunk válaszolni.

## 3. A háromszögekből álló gömbi hálózat topológiai jellemzése

Tekintsünk egy gömbháromszögekből álló gömbi hálót. Ha a háló csomópontjait főkörívek helyett egyenesszakaszokkal kötjük össze, akkor egy háromszöglapokkal határolt poliédert kapunk, amelyet a *gömbi hálóhoz tartozó poliéder*nek nevezünk. Vizsgáljuk meg, hogy az így nyert poliédereknél általános esetben milyen összefüggések szabályozzák a különböző élszámú csúcsok számát. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$e$: a poliéder éleinek a száma,
$c$: a poliéder csúcsainak a száma,
$l$: a poliéder lapjainak a száma,
$c_i$: azon csúcsoknak a száma, amelyekben $i$ darab él találkozik; $3 \leq i \leq m$, ahol $m$ jelenti az egy csúcsba befutó élek számának a maximumát.

Az Euler-féle poliéder-tétel szerint

$$c - e + l = 2. \tag{1}$$

Amiatt, hogy a poliéder valamennyi lapja háromszög, fennáll a következő egyenlőség:

$$2e = 3l. \tag{2}$$

Az élek száma azonban nemcsak a lapok, hanem a csúcsok számával is kifejezhető:

$$2e = \sum_{i=3}^{m} ic_i . \tag{3}$$

Végül a különböző csúcsok számának összege a poliéder összes csúcsainak a számát adja meg:

$$c = \sum_{i=3}^{m} c_i . \tag{4}$$

Az (1—4) egyenletekből az alábbi ismert összefüggéshez jutunk [3, 18]:

$$\sum_{i=3}^{m}(6-i)c_i = 12\,. \tag{5}$$

Ha csak egyfajta csúcstípus fordul elő, akkor (5) a

$$(6-m)c_m = 12 \tag{6}$$

alakra egyszerűsödik. A (6) jelű egyenletből látszik, hogy $m$ értéke csak 3, 4 és 5 lehet. Ezek a számok a szabályos tetraéderre, oktaéderre és ikozaéderre az $m$ értékei. Nem konstruálható tehát olyan poliéder, amelynek minden csúcsába ugyanannyi él fut be, és ezen éleknek a száma 6 vagy annál nagyobb. Az 5-, 6- és 7-élű csúcsok esetében (5) így alakul:

$$c_5 - c_7 = 12\,. \tag{7}$$

Ha az előző háromféle csúcsból csak kétfélét akarunk felhasználni, akkor kiderül, hogy nem konstruálható olyan poliéder, amelynek csúcsaiban 6, ill. 7 él találkozik, de konstruálható egyrészt olyan, amelynek csúcsaiban 5, ill. 7 él fut össze, másrészt olyan, amelynek csúcsai 5-, illetve 6-élűek. *Az 5- és 6-élű csúcsokkal rendelkező poliédereknél az ötélű csúcsok száma mindig* 12. Ennek az állításnak a helyessége nyilvánvaló, hiszen, ha a poliédernek nincs 7-élű csúcsa, akkor $c_7 = 0$, és így (7)-ből $c_5 = 12$ adódik.

A kérdés ezek után az, hogy mennyi lehet az utóbb említett poliéderfajtánál a hatélű csúcsok száma. Az egyenletekből ugyanis ez nem derül ki. Erre a kérdésre feleletet adni elég nehéz. Csak azt tudjuk, hogy a hatélű csúcsok száma nem lehet tetszőleges. Például 1 nem lehet. Hasonló problémákkal foglalkozik [3], igaz, hogy a duális megfogalmazásban. A 49. oldalon ezt a kérdést veti fel általánosabban, és megmutatja többek között, hogy minden $k$-ra létezik ilyen típusú poliéder 12 darab 5-élű és $5k$ darab 6-élű csúccsal (lásd az idézett mű 206. oldalán az $A_n$, poliédert).

A csúcsok és a lapok között dualitás áll fenn. Cseréljük fel a szövegben értelemszerűen a csúcsokat és a lapokat. Ekkor ennek a szakasznak valamennyi állítása igaz lesz azokra a poliéderekre, amelyeknek minden csúcsában három él találkozik.

## 4. A háromszöghálózatú gömbrácsokra vonatkozó felosztási feladat

A háromszögekből álló gömbi rácsszerkezetek tervezésénél fontos szempont a hálózat helyes, célszerű felvétele. A hálózat szerkesztését (a gömbfelületnek gömbháromszögekre történő felosztását) bizonyos kikötésekkel kell

elvégezni. Rúdszerkezet esetében ezek a kikötések például az alábbiak lehetnek [17]:

*α)* a leghosszabb gömbháromszög-oldal is rövidebb legyen egy előre megadott hosszúságnál,

*β)* lehetőleg minél kevesebb fajta gömbháromszög-oldal forduljon elő, ill. lehetőleg minél több legyen az egyenlő gömbháromszög-oldal,

*γ)* a gömbháromszög-oldalak lehetőleg csak kevéssé térjenek el egymástól, azaz a felosztás megközelítően egyenletes legyen,

*δ)* a felosztással előálló gömbi hálóalakzat konvex poliédert határozzon meg.

A feladat ebben a megfogalmazásban eléggé általános. A négy követelmény közül ugyanis csak az $\alpha$ és $\delta$ követelmény jelent egyértelmű feltételt. Hogy magát a feladatot korrektté tegyük, a $\beta$ és $\gamma$ követelmények általánosságát meg kell szüntetnünk. A feladat felállítása korrekt lesz például akkor, ha az $\alpha$ és $\delta$ feltételek mellett $\gamma$-ban rögzítjük az $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányados felső korlátját, $\beta$-ben pedig megköveteljük, hogy az $\alpha$, $\gamma$, $\delta$ feltételeknek eleget tevő felosztásokra legyen minimális a különböző hosszúságú oldalfajtáknak a száma.

Az így előálló feladatot a következőképpen próbálhatnánk meg megoldani. Előre felvesszük a különböző hosszúságú oldalak számát és az összes oldal számát, majd keresünk olyan felosztásokat (feltéve, hogy ilyenek vannak), amelyekre az $\eta$ hányados az adott korlát alatt marad, és teljesül a $\delta$ feltétel. Az eredményként kiadódó hálózatokra megnézzük, hogy van-e köztük olyan, amelyre a maximális élhossz kisebb az $\alpha$ feltételben megjelöltnél. Majd a különböző hosszúságú élek számát és az összes él számát (vagy legalább egyiküket) tetszőleges módon megváltoztatva újra és újra megismételjük az eljárást. (Természetesen, ha kaptunk egy megfelelő felosztást, a különböző élek számát az ottaninál nagyobbra nem kell választani.) Végül a kapott, az $\alpha$, $\gamma$, $\delta$ feltételeknek eleget tevő felosztások közül kiválasztjuk azokat, amelyekre a különböző hosszúságú oldalak száma minimális.

Ez az út azonban járhatatlan, mivel a számítás nem véges hosszú.

A legegyszerűbb esetben, amikor a különböző hosszúságú élek száma csak kettő, igen nagy számítási nehézségek vannak (itt sem tudjuk, hogy a számítás véges hosszú lesz-e, mivel a lenti $k'$ tetszőleges nagy lehet, és minden értékére el kellene végezni a lenti számítást).

Induljunk ki az (5) egyenletből. Ebből következik, hogy létezik legalább egy $i' \leq 5$ természetes szám, amelyre $c_{i'}$ pozitív, és ha $c_i = \Sigma c_i > 12$, akkor létezik legalább egy $k' \geq 6$ természetes szám, amelyre $c_{k'}$ pozitív. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $c > 12$. Legyen mondjuk $c_5$ és $c_6$ pozitív ($i'$ és $k'$ más értékeire hasonlóképpen okoskodhatunk).

Gömbünk sugarát válasszuk egységnyinek. A gömbnek gömbháromszögekre való felosztásánál tehát most kétféle gömbháromszög-oldalhossz

szerepel, $u$ és $v$. Ezekből alkothatunk $u$, ill. $v$ oldalú egyenlőoldalú gömbháromszöget, és olyan egyenlőszárú gömbháromszöget, amelynek alapja $u$, szára $v$, ill. alapja $v$, szára $u$. Ennek a négyfajta gömbháromszögnek kiszámíthatók a szögei $u$ és $v$ függvényében. Ezek között a szögek között hat (általában) különböző van, jelöljük ezeket $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$-tal. Mivel van 5-, ill. 6-élű csúcs, ezek közül a szögek közül ötnek, ill. hatnak az összege 360° (az összegben egy szög többször is szerepelhet). Azaz:

$$m_1\alpha_1 + \ldots + m_6\alpha_6 = 360°, \qquad n_1\alpha_1 + \ldots + n_6\alpha_6 = 360°, \tag{8}$$

ahol $m_j$, $n_j$ nemnegatív egész,

$$m_1 + \ldots + m_6 = 5, \qquad n_1 + \ldots + n_6 = 6. \tag{9}$$

Most minden, a (9)-nek eleget tevő $m_j$, $n_j$ értékrendszerre meg kell oldani a (8) egyenletrendszert, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ az $u, v$ fenti függvényei. Így megkapjuk a lehetséges $u, v$ értékpárokat. Ezután külön nehézség, hogyan illesszük össze a gömbháromszögeket hálózattá. Mindenesetre a szögösszegnek minden csúcsnál 360°-nak kell lennie. Továbbá szükséges feltétel, hogy a négyfajta gömbháromszög területét alkalmas nemnegatív egészekkel megszorozva és ezeket összeadva $4\pi$-t kapjunk.

Bizonyos megszorításokkal a feladat egyszerűbbé tehető. Szorítkozzunk pl. az 5- és 6-élű csúcsok esetére és tekintsük $u < v$-re az $u, u, v$ és $v, v, v$ oldalú gömbháromszögekből álló hálózatokat. Ekkor a figyelembe veendő (8) alakú egyenletrendszerek száma nem túl sok, viszont közülük néhány bonyolult egyenletekre vezet. Ennek a speciálisabb feladatnak egy megoldása a [17]-ben közölt, 140 lapú $(3, 3, 3, 3, 5)_g$ test.

A fenti gondolatmenet három vagy több különböző élhosszúság esetén nem alkalmazható, ugyanis ekkor is csak két egyenletből álló egyenletrendszerünk van (mint fent (8)).

Jelöljük $e_k$-val a különböző hosszúságú élek számát. Ami nagy lapszám esetén az $\eta$ hányados és $e_k$ egymástól való függését illeti (azaz milyen értékpárok lehetségesek az $\eta$-ra és $e_k$-ra, az egyiküket rögzítve a másik milyen értékeket vehet fel), erről semmit sem tudunk. Azt gondoljuk, hogy ha a lapszám a végtelenhez tart, nem maradhat mindkettő korlátos. [17]-ben szerepelnek bizonyos gömbháromszöghálózatok, amelyek tetszőlegesen nagy lapszám esetében is megkonstruálhatók és amelyek maximális élhossza tetszőlegesen kicsi. Ezekre a hálózatokra az $\eta$ hányados korlátos, és $e_k$ a lapszám négyzetgyökével azonos nagyságrendű. Másrészt a gömbbe írt szabályos (legalább ötszög alapú) kettősgúlákra $e_k = 2$, viszont az $\eta$ hányados a lapszámmal azonos nagyságrendű.

Az előzőkben részletezett nehézségek miatt a gyakorlatban a feladatot mindig csak az eredeti, határozatlan alakjában vizsgálják.

A radiolariák esetében láttuk, hogy megközelítően egyenletes hálózatot 5-, 6- és 7-élű csúcsokkal lehet biztosítani. A mérnöki szerkezetek tervezői, nem tudni, hogy ennek ismeretében-e, de mindenesetre ezzel összhangban alakították ki a különböző felosztástípusokat.

A 3. szakaszban bebizonyítottuk, hogy 5-, 6- és 7-élű csúcsok segítségével — leszámítva azokat a 12-csúcsú testeket, amelyeknek minden csúcsa 5-élű — csak az alábbi típusú poliéderek (felosztások) képezhetők:

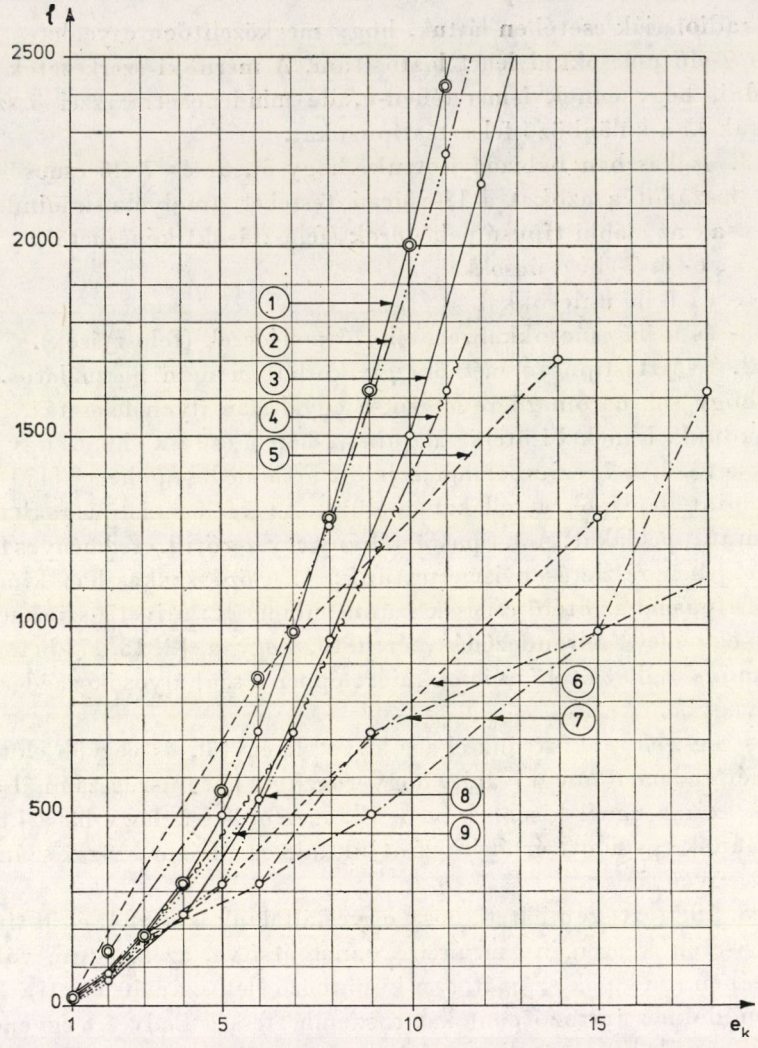
1. 5-, 6- és 7-élű csúcsokkal,
2. 5- és 7-élű csúcsokkal,
3. 5- és 6-élű csúcsokkal rendelkező poliéderek (felosztások).

A 2. felosztástípus a mérnöki gyakorlatban nem használatos. Nem is tudjuk, hogy sok háromszögre létezik-e egyáltalán ilyen felosztás. Egy poliéderről tudunk. Ennek 14 ötélű valamint 2 hétélű csúcsa van, és úgy állítható elő, hogy a (3, 3, 3, 7) szimbólummal jelölt archimedesi poliéder [17] hétszögű lapjaira, mint alaplapokra, gúlákat emelünk. Az 1. felosztástípusra SCHÖNBACH [14, 15] mutat példákat. A 3. típusra néhány egyszerű, ill. eredményes felosztásmódot [17]-ben részletesen ismertettünk. Az előző szakaszban kimutattuk, hogy a 3. típusnál az ötélű csúcsok száma mindig 12. Mivel a szimmetria elősegíti az egyenletes elrendeződést, érthető, hogy a [2, 13, 17]-ben tárgyalt felosztásmódoknál az ötélű csúcsok miért éppen a szabályos ikozaéder csúcsaival esnek egybe.

Most egyelőre tekintsünk el a $\gamma$ követelménytől, és vegyük előtérbe a $\beta$ követelményt, amely megkívánja, hogy rögzített háromszögszámnál a különböző élek száma minél kisebb legyen, ill. megfordítva, hogy ha a különböző élek számának egy adott értékét tekintjük, akkor a háromszögek száma minél nagyobb legyen.

Az 5. ábra azt szemlélteti, hogy egyes általunk ismert 1. és 3. típusú felosztások esetén ez az igény mennyire van teljesítve, az $l$ hogyan változik $e_k$ függvényében ($l$ a lapok számát, $e_k$ a különböző élek számát jelenti). Az egyes felosztásmódokhoz tartozó pontokat a szemléletesség kedvéért egyenesszakaszokkal kötöttük össze. A diagramból leolvasható, hogy egy adott $e_k$ esetén melyik felosztásmód adja a legtöbb háromszöget az ott szereplő felosztásmódok között, azaz melyik az a felosztás, amelyik legjobban kielégíti a $\beta$ követelményt. Az adott $e_k$-hoz tartozó legnagyobb $l$ lapszámot kettős kör jelöli az ábrán. Úgy tűnik, hogy $e_k \geq 7$-re az (1) jelű felosztás szolgáltatja a maximális lapszámot. Az $\alpha$ feltételt az a felosztás fogja teljesíteni, amelyikhez tartozó leghosszabb él (éppen) az adott korlát alatt marad.

Az eddigiek során csak azt vizsgáltuk, hogyan lehet viszonylag kevés különböző oldalhosszal a gömböt gömbháromszögekre bontani, illetve hogyan lehet gömbbe írt, háromszöglapokkal határolt konvex poliédert előállítani. Nem vizsgáltuk azonban azt, hogy a felosztás sűrítésével a $\gamma$ követelmény mennyire lesz kielégítve. A hálózat egyenletességét az $\eta$ hányados jellemzi.




*5. ábra.* A különböző felosztási módok

A görbék melletti számok jelentése: ① az ikozaéder [17]-ben javasolt felosztása, ② a $(3, 3, 3, 3, 5)_g$ felosztása, ③ az $(5, 5, 5)_g$ Fuller-féle egyenlőszárú háromszöges felosztása, ④ az $(5, 6, 6)_g$ felosztása, ⑤ a Schönbach-féle felosztás [14, 15], ⑥ az ikozaéder oldalfelezéses felosztása, ⑦ Fuller ikozaéderes felosztása (5.1. szakasz), ⑧ az ikozaéder Fuller—Patzelt-féle felosztása [13], ⑨ az ikozaéder hálózatának sűrítése a háromszögek köré írható körök középpontjainak segítségével. Az irodalmi hivatkozás nélküli felosztási módokat lásd pl. [17]-ben.

A továbbiakban tehát elsősorban az $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányadosról kell minél többet megtudnunk.

Nézzük meg, hogy a [17] tanulmányban tárgyalt néhány felosztás esetében miként viselkedik ez a hányados. Tekintsük a Fuller-féle ikozaéderes felosztássorozat néhány első tagját egységsugarú gömb esetében. Mint isme-

retes, ilyen felosztáshoz úgy jutunk, hogy a szabályos ikozaéder lapjait egyenesszakaszokkal egyenként $n^2$ darab egybevágó szabályos háromszögre osztjuk fel (amelyek egymáshoz teljes élek mentén csatlakoznak), majd az osztóvonalakat az ikozaéder centrumából az ikozaéder köré írható gömb felületére vetítjük. A keletkező gömbháromszögek csúcsai egy háromszöglapokkal határolt konvex poliédert határoznak meg. A sorozat első hat tagja esetén az $\eta$ hányadosokat az I. táblázatban tüntettük fel. Ezek az $\eta$ számértékek monoton nőnek.

**I. táblázat**

*Az $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányados értéke a Fuller-féle ikozaéderes felosztássorozat első tagjai esetében*

| $n$ | $l$ | $e_k$ | maximális élhossz | minimális élhossz | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 1 | 1,0515 | 1,0515 | 1 |
| 2 | 80 | 2 | 0,6180 | 0,5465 | 1,1308 |
| 3 | 180 | 3 | 0,4124 | 0,3486 | 1,1830 |
| 4 | 320 | 6 | 0,3249 | 0,2532 | 1,2834 |
| 5 | 500 | 9 | 0,2616 | 0,1981 | 1,3202 |
| 6 | 720 | 9 | 0,2166 | 0,1626 | 1,3325 |

Itt jegyezzük meg, hogy a különböző élek számára, $e_k$-ra a következő becslés érvényes:

$$\left.\begin{aligned} e_k &\leq \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right), && \text{ha } n \text{ páros és nem osztható 3-mal,} \\ e_k &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2, && \text{ha } n \text{ páratlan és nem osztható 3-mal,} \\ e_k &\leq \frac{n(n+3)}{6}, && \text{ha } n \text{ osztható 3-mal.} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

(10) bizonyítása a felosztás szimmetriáinak figyelembevételével történik (ill. ha $n$ osztható 3-mal, további élek is egyenlők lesznek, azt is figyelembe kell venni).

Az $(5, 5, 5)_g$ [17] Fuller-féle egyenlőszárú háromszöges felosztássorozatára (5.2. szakasz) vonatkozik a II. táblázat. A felosztás sorszámát a felosztássorozatban $n$-nel jelöltük. A felosztássorozatnak a táblázatban szereplő kezdő tagjaira, mint előbb, most is megállapítható, hogy az $\eta$ monoton nő. Az I. táblázat részben, a II. táblázat egészében J. D. CLINTON számításai alapján készült [2].

Az 5. szakaszban vizsgált felosztássorozatok közül egyesekre beláttuk a konvexitást és az $\eta$ hányados monoton voltát. Valószínűleg hasonló teljesül más felosztássorozatokra is (bár egyes esetekben a monotonitás csak a hárommal való oszthatóság szerinti részsorozatokra áll fenn), de ezeket nem vizsgáltuk. A konvexitás és az $\eta$ hányados monotonitása teljesül például az ikozaéder oldalfelezéses felosztássorozatára (5.3. szakasz). Ennél a felosztásfajtánál a gömbháromszögek oldalfelező pontjait összekötő főkörívek (a középvonalak) segítségével végezzük ismételten a felosztást (III. táblázat).

**II. táblázat**

*Az $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányados értéke az $(5, 5, 5)_g$ Fuller-féle egyenlőszárú háromszöges felosztássorozatának első tagjai esetében*

| $n$ | $l$ | $e_k$ | maximális élhossz | minimális élhossz | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 2 | 0,7136 | 0,6409 | 1,1136 |
| 2 | 240 | 4 | 0,3895 | 0,3134 | 1,2429 |
| 3 | 540 | 6 | 0,2643 | 0,2060 | 1,2826 |
| 4 | 960 | 8 | 0,1994 | 0,1553 | 1,2835 |

**III. táblázat**

*Az $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányados értéke az ikozaéder oldalfelezéses felosztássorozatának első tagjai esetében*

| $n$ | $l$ | $e_k$ | maximális élhossz | minimális élhossz | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 1 | 1,0515 | 1,0515 | 1 |
| 2 | 80 | 2 | 0,6180 | 0,5465 | 1,1308 |
| 3 | 320 | 5 | 0,3249 | 0,2758 | 1,1775 |
| 4 | 1280 | 15 | 0,1646 | 0,1383 | 1,1906 |
| 5 | 5120 | $\leqslant$ 51 | 0,04130 | 0,03459 | 1,1940 |
| 6 | 20480 | $\leqslant$ 187 | 0,02067 | 0,01730 | 1,1948 |
| 7 | 81920 | $\leqslant$ 715 | 0,01034 | 0,008649 | 1,1950 |

A III. táblázatban $n \geq 5$-re $e_k$-t nem számoltuk ki, hanem az ennél a felosztássorozatnál minden $n$-re érvényes

$$e_k \leq \frac{1}{3} + 2^{n-2} + \frac{4^{n-1}}{6} \tag{11}$$

becslést alkalmaztuk, ahol $n$ jelöli a felosztás sorszámát a felosztássorozatban. (11) bizonyítása teljes indukcióval történik, figyelembe véve a felosztás szimmetriáit, és azt, hogy az $(n-1)$-edik felosztás egy éle felezésekor két azonos hosszúságú él keletkezik az $n$-edik felosztásban.

Ha a hálózatot sűrítjük, azaz a háromszögek számával a végtelen felé tartunk, akkor a következő kérdések merülnek fel:

a) A különböző felosztássorozatok esetén korlátos-e az $\eta$ hányadosok sorozata? (Itt csak a felső korlát a kérdéses, mivel az 1 nyilvánvalóan alsó korlát.)

b) Ha korlátos és ezenfelül konvergens, akkor a különböző esetekben mi a sorozat határértéke?

c) Tekintsük az összes lehetséges, minden határon túl sűrűsödő (finomodó) felosztássorozatot és tekintsük a hozzájuk tartozó $\eta$ hányadossorozatokat. Ezen utóbbiak közül a konvergensek határértékeinek mi lesz a legnagyobb alsó korlátja, azaz mi lesz az $\eta$ számok rögzített $l$ lapszám melletti infimumának limes inferiorja, amikor a felosztás $l$ lapszáma a végtelenhez tart?

## 5. Az $\eta$-sorozatok határérték-vizsgálata

Most megvizsgáljuk néhány konkrét felosztássorozatra [17] az $\eta$ hányados határértékét. *Ha* azt is tudjuk, hogy egy felosztássorozatra *az $\eta$ hányados monoton nő, akkor a határérték egyben a legkisebb felső korlát.* A gömb sugarát egységnyinek választjuk. A határértékek meghatározásakor csak aszimptotikus számításokat végzünk.

Az egyes részszakaszokban $n$ a megfelelő felosztássorozatban a felosztás sorszámát (indexét) jelöli. Egyébként az egyes részszakaszok jelölései egymástól függetlenek.

Először is megnézzük, hogy egy gömbháromszöghálózathoz tartozó háromszöglapú poliéder (3. szakasz) mikor lesz konvex. Könnyen belátható, hogy a konvexitás szükséges és elegendő feltétele a következő: bármely két, éllel csatlakozó poliéderlapra a közös oldallal szemközti szögek összege legfeljebb 180° legyen. (Ugyanis két, éllel csatlakozó gömbháromszög a közös él különböző partján fekszik, és az említett két szög összege pontosan akkor lesz legfeljebb 180°, ha a két háromszöglap lapszöge legfeljebb 180°.) Tehát a poliéder konvex, ha pl. minden lapja hegyesszögű háromszög. Ezt többféleképpen tudjuk biztosítani. Ha a felosztásban szereplő gömbháromszögek hegyesszögűek, akkor a poliéder lapjai is hegyesszögűek. Ha egy felosztássorozatnál az $\eta$ hányados határértéke kisebb $\sqrt{2}$-nél, a poliéderlapok — elég nagy $n$ esetében — akkor is hegyesszögűek. Ekkor viszont a felosztássorozat valahány kezdő tagjára nem tudjuk, hogy fennáll-e a konvexitás. Valószínűnek tartjuk, hogy az 5.2. és 5.4. szakaszokban vizsgált felosztássorozatok is konvex poliédert szolgáltatnak minden $n$-re.

### 5.1. *A Fuller-féle ikozaéderes felosztás*

A gömbbe írt szabályos ikozaéder lapjait felosztjuk egyenként $n^2$ számú egybevágó szabályos háromszögre, majd ezt a hálózatot a gömbközéppontból a gömbfelszínre vetítjük. Az eredeti hálózat élei egyenlők voltak. Nézzük meg, milyen arányban változnak meg a kivetítéskor. Legyen az eredeti hálózat egy élének egyenese a gömbközépponttól $t$ távolságra, és az él egyenesére merőleges, a gömbközépponton áthaladó egyenes zárjon be $\vartheta$ szöget azzal az egyenessel, amely a gömbközéppontot az él középpontjával köti össze. Akkor ez a kérdéses arány aszimptotikusan $(\cos^2 \vartheta)/t$. Jelöljük az ikozaéder lapjának, illetve élének a gömbközépponttól való távolságát $t_1$-gyel, illetve $t_2$-vel. Ekkor

$$\frac{\cos^2 \vartheta}{t} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t_1}. \tag{12}$$

Legyen adott $t$-re $\vartheta$ maximuma: $\psi(t)$, akkor[3]

$$\frac{\cos^2\vartheta}{t} \geq \frac{\cos^2\psi(t)}{t} \sim \frac{t}{t^2 + \frac{1}{3}\left(\pm\sqrt{t^2 - t_1^2} + \frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}, \tag{13}$$

ahol $d$ az ikozaéderél hossza (euklideszi értelemben). A gyök előtt $t_1 \leq t \leq t_2$ esetében plusz jel, $t_2 < t \leq 1$ esetén mínusz jel áll. A legutolsó kifejezés $t = t_2$-re éri el a minimumát, ennek értéke $t_2$. Az $\eta$ hányados értéke aszimptotikusan a $(\cos^2\vartheta)/t$ maximumának és minimumának aránya. Így:

$$\eta \sim \frac{1}{t_1 t_2} \approx 1{,}480\,. \tag{14}$$

A poliéder minden $n$-re konvex lesz. Ugyanis bármely lapjának mindegyik súlyvonala nagyobb a megfelelő oldal felénél (ez a (12)-höz és (13)-hoz hasonló egyenlőtlenségekből látható), így minden lap hegyesszögű.

### 5.2. *Az* $(5, 5, 5)_g$ *Fuller-féle egyenlőszárú háromszöges felosztása* [17]

A kiinduló hálózat az $(5, 5, 5)_g$ poliédernek a köré írt gömb középpontjából a köré írt gömb felszínére vetített hálózata. (Az $(5, 5, 5)_g$ poliéder [17] felülete a gömbbe írt szabályos dodekaéder lapjaira kifelé állított szabályos gúlák palástjaiból áll, midőn a gúlák csúcsai a gömbön vannak.) Ebben a hálózatban egyenlőszárú gömbháromszögek szerepelnek. Jelöljük ezek alapjait $2a^*$-gal és a hozzájuk tartozó magasságokat $b^*$-gal. Legyen

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq 2b_1, \quad b_1 \leq b^*, \tag{15}$$

továbbá

$$b_1 = \frac{i^*}{n}\, b^*, \quad b_2 = \frac{j^*}{n}\, b^*, \quad 0 \leq i^* \leq n, \quad 0 \leq j^* \leq 2n \tag{16}$$

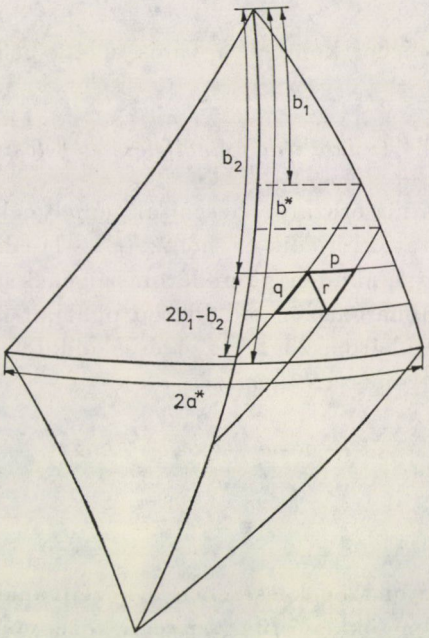
($i^*, j^*, n$ egész számok, $n$ nagy).

A 6. ábrán a kiinduló hálózat két egyenlőszárú háromszöge szerepel, amelyek egymáshoz alappal csatlakoznak. A felsőnek a magasságára (ill. lefelé való meghosszabbítására) a csúcstól kezdve felmérünk $b_1$, $b_2$, $2b_1$ hosszúságú íveket. A $b_1$ hosszúságú ív végpontjában a magasságra merőleges főkörívet állítunk és annak a szárral való metszéspontját összekötjük főkörív segítségével a $2b_1$ hosszúságú ív végpontjával. Továbbá megrajzoljuk a $b_2$ hosszúságú ív végpontjában a magasságra állított merőleges főkörívet is. Ha $i^* < n$

[3] A $\sim$ jel aszimptotikus egyenlőséget jelent.

és $j^* < 2n$, ugyanezt $i^*$ és $j^*$ helyett $(i^* + 1)$-re és $(j^* + 1)$-re is megcsináljuk (azaz a magasságra, ill. meghosszabbítására felmérjük a megfelelő hosszú íveket, és a fentihez hasonlóan állítunk egy merőleges főkörívet, összekötő főkörívet és még egy merőleges főkörívet).

Mindkét esetben tekintsük az utoljára említett két-két főkörívet (ezeket a 6. ábrán folytonos vonal jelöli). Ezek egy négyszöget határolnak, amely közelítően parallelogramma (az ábrán vastag vonal jelöli). Ennek a négyszögnek




*6. ábra.* A hálózat egy elemi környezetének adatai a Fuller-féle egyenlőszárú háromszög felosztásban

a magasságra állított merőlegesen fekvő oldalát jelöljük $p$-vel, az egyik szomszédos oldalt $q$-val (az ábra szerint), a berajzolt átlóját pedig, amely a háromszögfelosztás egyik éle, $r$-rel. Legyen $z = 2b_1 - b_2$, ekkor:

$$p \sim \frac{b^*}{n} \frac{\cos 36^\circ}{1 - \sin^2 36^\circ \cos^2 z} \cos z \cdot 2 \sin 36^\circ ,$$

$$q \sim \frac{b^*}{n} \frac{\cos 36^\circ}{1 - \sin^2 36^\circ \cos^2 z} , \qquad (17)$$

$$r \sim \frac{b^*}{n} \frac{\cos 36^\circ}{1 - \sin^2 36^\circ \cos^2 z} .$$

A háromszöglapok szárainál, ill. szimmetriatengelyénél fekvő felosztásélekre ugyanezek a képletek értelemszerűen érvényesek.

Fennáll $0 \leq z \leq b^*$. Könnyen látható, hogy adott $z$-re aszimptotikusan $q = r \leq p$ (azaz a kifejezésükben az $1/n$-es nagyságrendű tagokra ez fennáll). $p$ és $q$ kifejezése $z$-ben monoton, így:

$$\eta \sim \frac{\max p}{\min q} \sim \frac{3}{2} \frac{\operatorname{tg} 36°}{\cos 36°} \approx 1{,}347. \tag{18}$$

Nagy $n$-re a poliéder konvex, ugyanis a (18)-beli érték kisebb $\sqrt{2}$-nél.

### 5.3. *Az ikozaéder oldalfelezéses felosztása*

Most azt a felosztássorozatot vizsgáljuk, amelynek első tagja a szabályos gömbi ikozaéderhálózat, az $n$-edik tagból az $(n + 1)$-ediket pedig úgy kapjuk, hogy az $n$-edik hálózat minden gömbháromszögének megrajzoljuk a középvonalait (azaz a gömbháromszög oldalfelező pontjait összekötő főköríveket). Az $a, b, c$ oldalú gömbháromszögre az $a$ és $b$ oldal felezőpontjait összekötő gömbi középvonal koszinusza:

$$\frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}}. \tag{19}$$

Hegyesszögű gömbháromszögek esetében a középvonalak hossza mindhárom oldalnak monoton nemcsökkenő függvénye, a középvonalak a megfelelő oldalak felénél nem kisebbek, és nagyobb oldalhoz nagyobb középvonal tartozik. Ha egy hegyesszögű gömbháromszöget középvonalaival felosztunk, hegyesszögű gömbháromszögeket kapunk. Ezért ebben a felosztássorozatban bármelyik felosztáshoz tartozó poliéder konvex.

A fentiek miatt a felosztásban a legnagyobb oldalhossz az ikozaéderlap középpontját tartalmazó szabályos háromszög oldalhossza, a legkisebb oldalhossz pedig a gömbi ikozaéderélen fekvő oldalak hossza. *A két* (euklideszi) *oldalhossz hányadosa az n-edik felosztásnál,* $\eta_n$, *monoton nő.* $\eta_n$-et a következő kifejezés adja meg:

$$\eta_n = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin w}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) \sin^2 w}} \Bigg/ \sin \frac{w}{2^{n-1}}, \tag{20}$$

ahol $2w$ a gömbi ikozaéderél hossza.

Innen[4]

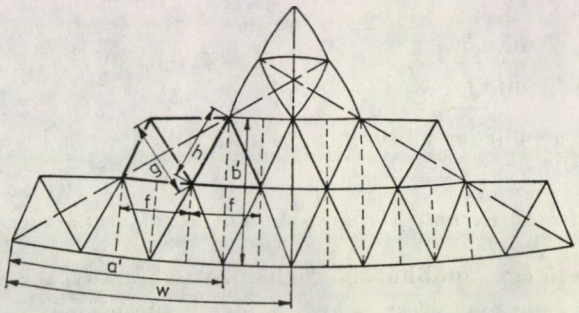
$$\lim \eta_n = \sup \eta_n = \frac{\sin w}{w\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2 w}} \approx 1{,}195 \tag{21}$$

(a nevezőben szorzóként álló $w$ radiánban mérve).

(Részletesebben lásd [10].)

### 5.4. *A* [17]*-ben javasolt gömbfelosztás*

Ezen eljárás során a gömbi ikozaéderélt $n$ egyenlő részre osztjuk. A 7. ábrán ennek a gömbfelosztásnak egy részlete szerepel. (Ez a részlet a szabályos ikozaéder gömbi hálózata egy lapjának harmadrésze. Az ikozaéderlap szimmetriatengelyei a hosszabb szakaszokkal rajzolt szaggatott vonalakkal vannak jelölve.) Az ábrán vannak egyenlőszárú háromszögek, amelyeknek a szimmetriatengelyei merőlegesek a teljes hosszában megrajzolt ikozaéderélre. (Ezek a szimmetriatengelyek az ábrán szaggatott vonallal vannak jelölve.)




*7. ábra.* A hálózat egy elemi környezetének adatai a [17]-ben javasolt felosztásban

Tekintsük ezek közül a háromszögek közül csak azokat, amelyek teljesen az ikozaéderlap megrajzolt harmadrészébe esnek, alapjukkal (ill. csúcsukkal) a teljes hosszában megrajzolt ikozaéderél felé. Ezek sorokba rendezhetők (az ábrán a sorok vízszintesek). Az egy sorba esők egybevágók. Az alapjukkal az ikozaéderél felé eső háromszögek közül azokat tekintsük, amelyek saját sorukban a legszélsők.

Egy ilyen háromszög szimmetriatengelye metszi az ábrán teljes hosszában megrajzolt ikozaéderélt az él végpontjától $a'$ távolságra. Jelölje $b'$ ugyanezen háromszög szimmetriatengelyének az ikozaéderél és a háromszög csúcsa közti szakasza hosszát. Legyen $a' \leq w$, ahol $2w$ a gömbi ikozaéderél hossza.

[4] Egy felülről korlátos számsorozat (számhalmaz) szuprémumán a számsorozat (számhalmaz) legkisebb felső korlátját értjük. Az $\eta_n$ sorozat szuprémumát sup $\eta_n$ jelöli.

($w$, $a'$ és $b'$ az ábrán nyilakkal be van jelölve.) Jelöljük a tekintett háromszög alapját $f$-fel, szárát pedig $h$-val. Hozzá csúcsban, ill. élben csatlakozik két egyenlőszárú háromszög, amelyek szára $f$, ill. $h$; közös alapjukat pedig jelöljük $g$-vel. (Az említett három háromszög az ábrán vastag vonallal van jelölve.) Ekkor:

$$f \sim \frac{2w}{n} \cos b',$$

$$g \sim \frac{2w}{n} 2 \cos b' \sin 36° \cos a', \tag{22}$$

$$h \sim \frac{2w}{n} \frac{1}{2} \cos b' \frac{\sqrt{8 \sin^2 36° \cos^2 a' + 1}}{\sqrt{1 - \sin^2 36° \cos^2 a'}}.$$

Adott $a'$-re $f \leq g \leq h$ aszimptotikusan (azaz kifejezésükben az $1/n$-es nagyságrendű tagokra ez fennáll). $b'$ együtt nő $a'$-vel, és $f$ és $h$ kifejezése ezeknek monoton csökkenő függvénye. Így

$$\eta \sim \frac{\max h}{\min f} \sim \frac{\sqrt{2 \sin^2 36° + \frac{1}{4}}}{\cos^2 36°} \cos 30° \approx 1{,}284. \tag{23}$$

Nagy $n$-re a poliéder konvex, mert a (23)-beli érték kisebb $\sqrt{2}$-nél.

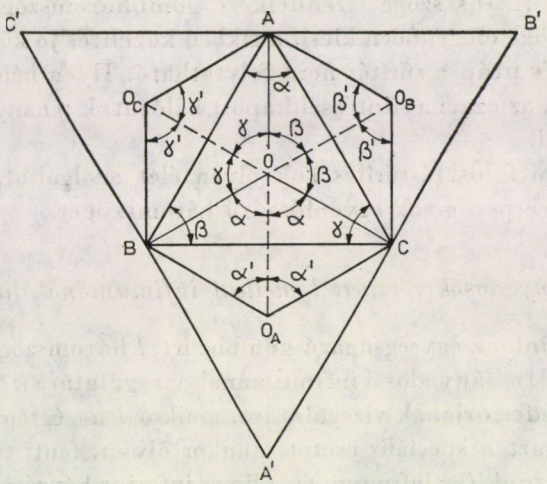
5.5. *A háromszögek köré írható körök középpontjainak segítségével történő felosztás*

Elképzelhető egy gömbháromszöghálózatnak a következő sűrítési módja is: az új hálózat csúcsai egyrészt a régi hálózat csúcsai, másrészt a régi háromszögek köré írt körök középpontjai. Az új hálózat élei a régi háromszögek köré írt körök középpontjait a megfelelő háromszögek csúcsaival kötik össze (ha ezek az illető háromszögekben vannak), ill. két, éllel csatlakozó régi háromszög köré írt kör középpontját kötik össze. Ha a régi hálózatban van olyan háromszög, amely nem tartalmazza a belsejében a köré írt kör középpontját, az új hálózatot nem értelmezzük.

Alkalmazzuk most ezt a sűrítést síkbeli háromszöghálózatokra. Ha (egymáshoz teljes élek mentén csatlakozó) szabályos háromszögekből álló rácsra alkalmazzuk, hasonló rácsot kapunk, kisebb élhosszal. Először megmutatjuk egy példán, hogy ez a sűrítés síkbeli háromszöghálózatokra nem mindig alkalmazható tetszésszerinti sokszor egymás után (úgy, hogy a háromszögek köré írt körök középpontjai mindig a háromszögek belsejében legyenek). Tartalmazzon a rács két egyenlőszárú háromszöget, amelyek alapjukkal csatlakoznak és szárszögük $60° + \varphi$. Közös alapjukat lefedi az új hálózat két egyenlőszárú háromszöge. Ezek alapjukkal csatlakoznak, és szárszögük $60° - 2\varphi$. Hasonlóan

látható, hogy a soron következő hálózatokban lesznek egyenlőszárú háromszögek, melyeknek szárszögei $60° + 4\varphi$, $60° - 8\varphi$, stb., ami $\varphi \neq 0$-ra elég nagy lépésszám mellett lehetetlen.

Hasonló módon megmutatjuk, hogy ha egy síkbeli háromszöghálózat tartalmaz nem szabályos háromszöget, akkor ez a felosztássűrítés nem alkalmazható tetszésszerinti sokszor egymás után. Azaz: ha a felosztássűrítés tetszésszerinti sokszor alkalmazható egymás után, akkor a hálózat minden háromszöge szabályos. Legyen a hálózat egy háromszöge $ABC$, szögei $\alpha, \beta, \gamma$, a köré írt kör középpontja $O$ (8. ábra). A szomszédos háromszögek legyenek $A'BC$,




*8. ábra.* Felosztás a háromszögek köré írt köröknek középpontjai segítségével

$AB'C$ és $ABC'$. Ezeknek $A'$-nél, $B'$-nél és $C'$-nél levő szögüket jelöljük $\alpha'$, $\beta'$ és $\gamma'$-vel, a köréjük írt körök középpontjait pedig $O_A$, $O_B$ és $O_C$-vel. Tegyük fel, hogy $\alpha + \alpha' \neq 120°$. Ekkor az $OBO_A$ és $OCO_A$ háromszögek az $O_AO$ oldaluk mentén csatlakoznak, $O$-nál, ill. $O_A$-nál fekvő szögük $\alpha$, ill. $\alpha'$. Ha a köréjük írt körök középpontjait $O'_B$-vel és $O'_C$-vel jelöljük, az $O'_BO'_CO$ és $O'_BO'_CO_A$ háromszögek alapjukkal csatlakozó egyenlőszárú háromszögek, és szárszögük $2(\alpha + \alpha') - 180°$, ami 60°-tól különböző. Így a fentiek szerint a sűrítés nem folytatható tetszésszerinti sokszor egymás után. Ugyanez igaz, ha $\beta + \beta'$ és $\gamma + \gamma'$ valamelyike 120°-tól különböző. Ha pedig

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = 120°, \tag{24}$$

akkor tekintsük az $O_CBO$ és $O_ABO$ háromszögeket. Ezeknek $O_C$-nél, ill. $O_A$-nál fekvő szögeik $\gamma'$ ill. $\alpha'$. Ha $\gamma' + \alpha' \neq 120°$, a fentihez hasonlóan a sűrítés nem folytatható tetszésszerinti sokszor egymás után. Ugyanezt kapjuk, ha $\alpha' + \beta'$ és $\beta' + \gamma'$ közül valamelyik 120°-tól különböző (a megfelelő háromszögek

figyelembevételével). Ha pedig:

$$\gamma' + \alpha' = \alpha' + \beta' = \beta' + \gamma' = 120°, \tag{25}$$

akkor:

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 60°, \tag{26}$$

és így (24)-ből

$$\alpha = \beta = \gamma = 60°. \tag{27}$$

Alkalmazzuk most ezt a felosztássűrítést gömbháromszöghálózatra. A hálózat mindig tartalmaz legfeljebb 5-élű csúcsot (3. szakasz, (5)), így tartalmaz legalább 72°-os szöggel rendelkező gömbháromszöget. Ha a hálózat minden háromszöge elegendően kicsi, a síkbeli közelítés jó közelítés lesz, és így korlátos sok lépés után a sűrítés nem folytatható. Ilyen hálózatnál természetesen értelmetlen az ezzel a sűrítéssel kapott hálózatok $\eta$ hányadosainak határértékéről beszélni.

Ez a gömbi felosztássűrítés sok olyan élet szolgáltat, amelyek hossza egyenlő, ismételve pedig sok egyenlőszárú háromszöget.

### 5.6. *Az $\eta$ hányadosok rögzített $l$ melletti infimumának limes inferiorja*

Most áttérünk az egységsugarú gömbbe írt, $l$ háromszöglap által határolt konvex poliéderek $\eta$ hányadosai infimumának vizsgálatára (rögzített $l$ mellett), ill. ennek limes inferiorjának vizsgálatára, amikor $l$ a végtelenhez tart. Külön vizsgáljuk majd azt a speciális esetet, amikor olyan, fenti tulajdonságú poliéderekre szorítkozunk (az infimum, és a limes inferior képzésekor), amelyeknek csak öt- és hatélű csúcsai vannak. (Természetesen abból, hogy ha az eredeti feladatot megoldanánk, nem következik, hogy a speciális poliéderekre a feladatot meg tudjuk oldani, hiszen nem biztos, hogy az infimum egy speciális poliédernél lép fel.) [10]-ben a következő van bebizonyítva: egy fenti tulajdonságú poliéderre — *itt nincs a csúcsok élszámára megkötés* —, amelynek lapszáma $l$, az $\eta$ hányados legalább

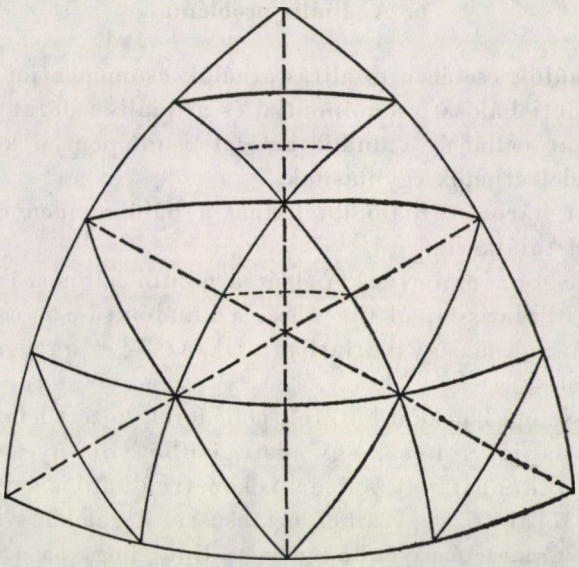
$$\sin 36°/\sin\left(30° + \frac{120°}{l}\right).$$

Ennek határértéke $l \to \infty$ esetében $2 \sin 36°$. Így a kérdéses *limes inferior értéke* — itt a csúcsok élszámára nincs megkötés — *legalább* $2 \sin 36° \approx 1{,}1756$. Ennek a bizonyítása [4] szerzőjének egy ötletén alapul és egy, a [4]-ben található tételt használ fel.

Valószínűnek tartjuk, hogy a fenti tulajdonságú poliéderekre — még akkor is, ha kikötjük, hogy csak öt- és hatélű csúcsok vannak — a limes inferior értéke pontosan $2 \sin 36°$. Bebizonyítani azonban csak annyit tudunk, hogy a *limes inferior értéke — akkor is, ha kikötjük, hogy csak öt- és hatélű csúcsok vannak — legfeljebb* 1,1780. Most ismertetjük a [10]-ben megadott konstruk-

ciót, amellyel tetszőleges nagy lapszámú fenti tulajdonságú poliéderek konstruálhatók — ezek csak öt- és hatélű csúcsokat tartalmaznak —, amelyekre $\eta$ legfeljebb 1,1780.

Osszuk fel a szabályos gömbi ikozaéderhálózat minden háromszögét 16 háromszögre. Rendelkezzen a felosztás a szabályos ikozaéder szimmetriáival és az ikozaéderél eközben négy egyenlő részre legyen felosztva (a 9. ábra folytonos vonalai). Legyen az ikozaéderlap középpontját tartalmazó gömbháromszög oldala $\approx 18° 26{,}30'$. A minimális, ill. maximális oldalak egyike az ikozaéder csúcsánál elhelyezkedő egyenlőszárú háromszög szára, ill. alapja.



*9. ábra.* A konstrukció vázlata

Az ábrán a rövidebb szakaszokból álló szaggatott vonalakkal jelölt két középvonal pontosan egyenlő. Az összes gömbháromszög hegyesszögű. Most rajzoljuk meg az összes gömbháromszög középvonalait, így kapunk egy felosztást.

Legyen az így kapott felosztás a felosztássorozat első tagja, és az $(n+1)$-edik felosztást az $n$-edikből a gömbi középvonalak berajzolásával nyerjük. A felosztássorozatban bármelyik felosztáshoz tartozó poliéder konvex. A maximális és minimális (euklideszi) élhossz hányadosa az $n$-edik felosztásra, $\eta_n$, monoton nő. Az 5.3. szakaszban alkalmazott számításokhoz hasonlóan $\eta_n$-re most is kapható egy képlet, amelyből

$$\lim \eta_n = \sup \eta_n \approx \frac{\sin \dfrac{9° 18{,}59'}{2}}{0{,}069197 \sqrt{1 - \dfrac{4}{3} \sin^2 \dfrac{9° 18{,}59'}{2}}} \approx 1{,}1780 \qquad (28)$$

(9° 18,59′ a fent említett két egyenlő középvonal hossza, míg 0,069197 a gömbi ikozaéderél 16-od része, radiánban mérve, közelítőleg). Innen bármely $n$-re

$$\eta_n \leq 1{,}1780 \ldots . \tag{29}$$

Ezért a fenti tulajdonságú poliéderekre — még akkor is, ha kikötjük, hogy csak öt- és hatélű csúcsaik vannak — az $\eta$ hányados adott $l$-re való infimumának limes inferiorja is legfeljebb 1,1780.

## 6. A duális probléma

A gömbi hálók esetében dualitás a hálók csomópontjai és cellái között áll fenn. Az eredeti hálózat csomópontjai és a duális hálózat cellái, valamint az eredeti hálózat cellái és a duális hálózat csomópontjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.

Egy gömbi háromszögháló duálisánál a háló minden csomópontjában három hálóvonal találkozik.

A 2. szakaszban mutattunk példát a gömbi háromszögháló duálisára. A bemutatott radiolaria-fajnál (3a ábra) a hálóban 5-, 6- és 7-szögű cellák fordulnak elő. A mérnöki gyakorlatban csak az 5- és 6-szögű cellákból álló hálózat terjedt el.

Az 5- és 6-szögű lapokkal határolt poliéderek között létezik végtelen sok olyan, amelynek lapjai érintenek egy adott gömböt. Bizonyos esetekben olyan 5- és 6-szögű lapokkal határolt poliéder is konstruálható, amelynek élei érintik a gömböt [16] (3b ábra), vagy amelynek csúcsai a gömbön vannak.

Nagy lapszám esetén azonban nem tudjuk, hogy az utóbbi két típusú poliéder létezik-e.

Legyen egy 5- és 6-szögű lapokkal határolt olyan poliéderünk, amelynek minden csúcsában három él találkozik és amelynek élei érintenek egy egységsugarú gömböt. A csúcsok száma legyen $c$. Ekkor az ötszöglapok száma 12, a hatszöglapoké $(c/2) - 10$, az éleké pedig $3c/2$ (3. szakasz). A csúcspontok összesen $3c$ adattal jellemezhetők. Öt, ill. hat csúcs egy síkba esése két, ill. három egyenletet ad, míg az, hogy az élek távolsága a gömbközépponttól 1, $3c/2$ egyenletet. Ez összesen $3c - 6$ egyenlet a $3c$ adatra. Emiatt azt gondolhatjuk, hogy ilyen poliéder — adott $c$ csúcsszám mellett — talán létezik. Az, hogy az egyenletek száma kisebb az adatok számánál, ezt természetesen *nem* bizonyítja. (Ez biztosan nem igaz az egyetlen hatszöglappal rendelkező poliéder esetére, mert, mint a 3. szakaszban említettük, ilyen poliéder nincs is. Mint említettük, bizonyos $c$-kre viszont igaz. Pl. az (5, 6, 6) szimbólummal jelölt archimedesi test is ilyen.)

Egy gömbbe írt, 5- és 6-szögű cellákból álló rács egyes celláit általában térbeli sokszögek határolják. Ezeknél a rácsoknál, mint a későbbiek során látni

fogjuk, valószínűleg mindig megkövetelhetjük, hogy a sokszögek élei azonos hosszúságúak legyenek. Ilyenkor azon túl, hogy a rács csomópontjai a gömbön lesznek, a rács rúdjai érinteni fognak egy, az adott gömbnél kisebb sugarú gömböt is.

A továbbiakban két dolgot fogunk megvizsgálni: először azt, hogy az 5. szakaszban tárgyalt felosztások révén előálló, gömbbe írt, háromszöglapokkal határolt poliéderek duális (poláris) poliédereinél hogyan változik az $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányados; másodszor azt, hogyan állíthatók elő gömbbe írt egyenlő rúdhosszúságú rácsok.

### 6.1. *A duális poliéderek $\eta$ hányadosai*

Itt a következő matematikai kérdést lehet felvetni. Tekintjük a gömb köré írt, csupa háromélű csúccsal rendelkező konvex poliédereket. Külön vizsgáljuk majd azt a speciális esetet, amikor olyan, fenti tulajdonságú poliéderekre szorítkozunk, amelyeknek csak öt- és hatszögű lapjaik vannak. Kérdezhetjük, mi az $\eta$ hányados rögzített lapszám melletti infimumának limes inferiorja, amikor a lapszám a végtelenhez tart. Erre a limes inferiorra nem tudunk olyan jó becsléseket adni, mint a gömbbe írt háromszöglapú poliéderek esetében. Értéke mindenesetre legalább 1 — itt nincs a lapok oldalszámára megkötés —; ennél jobb alsó becslést nem is tudunk.

Célunk most olyan fenti tulajdonságú poliéderek konstruálása, amelyek $\eta$ hányadosa lehetőleg kicsi, miközben a lapszám tetszőleges nagy lehet. A megkonstruált poliédereknek csak öt- és hatszöglapjaik lesznek.

Legyen megadva egy egységsugarú gömbbe beírt és egy, ugyanazon gömb köré írt konvex poliéder. Ezeket egymás *polárisának* hívjuk, ha a beírt poliéder csúcsai megegyeznek a köréírt poliéder lapjainak és a gömbnek érintési pontjaival.

Legyen $n$ egy elég nagy természetes szám és tekintsük a [17]-ben javasolt gömbfelosztást, ahol a gömbi ikozaéderélt $n$ egyenlő részre osztjuk, és a gömb sugara egységnyi. Vizsgálni fogjuk az ehhez tartozó beírt poliéder polárisát. Ez az egységsugarú gömb köré írt konvex poliéder. Megmutatjuk, hogy erre aszimptotikusan:

$$\eta \sim \operatorname{ctg}\left(2 \arcsin \frac{\cos 36^\circ}{\sqrt{8 \sin^2 36^\circ + 1}}\right) \cdot \frac{3}{2 \cos 36^\circ} \approx 1{,}595\,. \tag{30}$$

Ezért *a fenti tulajdonságú poliéderekre — akkor is, ha kikötjük, hogy csak öt- és hatszöglapjaik vannak — az $\eta$ hányados rögzített lapszám melletti infimumának limes inferiorja* (amikor a lapszám a végtelenhez tart), *nem nagyobb a (30)-beli értéknél.*

Minden számítást csak $n$ nagy értékeire, aszimptotikusan végzünk. Tudjuk, hogy a tekintett beírt poliéderre az $\eta$ hányados aszimptotikusan

$\approx$1,284. Eszerint a lapok hegyesszögű háromszögek, sőt a legnagyobb szögük sem halad meg egy bizonyos, 90°-nál kisebb rögzített szöget. Nagy $n$ esetében a poliéderfelület egy kis darabja jó közelítéssel síkbelinek tekinthető. Síkbeli, hegyesszögű háromszögekből álló hálózat esetében a poláris élhálózat a háromszögek oldalfelező merőlegeseiből áll, minden oldalfelező merőlegesnek azt a szakaszát véve, amely az illető oldalhoz csatlakozó két háromszög köré írt körök középpontjai közé esik.

Tekintsünk egy síkbeli egyenlőszárú háromszöget, amelynek alapja $x$, szára $y$. Az alaphoz — ill. szárhoz — tartozó oldalfelező merőlegesnek az alap — ill. szár — és a háromszög köré írt kör középpontja közötti szakaszának hossza:

$$\frac{2y^2 - x^2}{2\sqrt{4y^2 - x^2}}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{xy}{2\sqrt{4y^2 - x^2}} \tag{31}$$

(másképpen: a köré írt kör átmérőjének és a szemközti szög koszinuszának a szorzata).

Megtartjuk az 5.4. szakasz jelöléseit. A felosztásban szereplő háromszögek oldalai $f, h, h$; $f, f, g$ és $g, h, h$. Adott $a'$-re tekintsük ezen háromszögekre az oldalfelező merőlegeseknek a megfelelő oldal és a köré írt kör középpontja közti szakaszait (szintén $1/n$-es tagokig számolva). Ez az $f, h, h$ oldalú háromszög alapjára lesz maximális. Ez az oldalfelezőszakasz maximumát (aszimptotikusan) $a' = 0$-ra éri el. Van két (aszimptotikusan) ilyen hosszú csatlakozó oldalfelező szakasz, amelyek együtt a poláris hálózat egy élét alkotják. Így ez a poláris hálózat (aszimptotikusan) maximális éle.

A poláris hálózat minimális élét nehezebb meghatározni. Tekintsük az éllel csatlakozó háromszögpárokat, adott $a'$-nél, és kiszámítjuk a köréjük írt körök középpontjai távolságát. (Azaz a két háromszög közül az egyik az adott $a'$-höz tartozó, a 7. ábrán vastag vonallal jelölt háromszögek valamelyike, ill. az $f, h, h$ oldalú vastag vonallal jelölt háromszöggel egy sorban van.) Az oldalak nagyságviszonyai miatt látható, hogy ezen távolságok között egyesek nagyobbak másoknál. Amelyekről ez nem látható, azoknak megkeressük a hosszára vonatkozó kifejezés minimumát, ezek $a' = w$-ben lesznek felvéve. Ha a közös él egyik végpontja ikozaédercsúcs, a háromszögek köré írt körök középpontjainak távolsága nagyobb az előbbi minimumoknál. Ha $a'$ közel van $w$-hez, azaz az ikozaéderlap középpontjához közeli háromszögeket tekintjük, azok közelítően szabályosak, így a poláris hálózat élei ott lesznek (aszimptotikusan) minimálisak. A maximális és minimális élhossz hányadosa (aszimptotikusan) a (30)-beli érték.

A poláris hálózatra is teljesül, hogy a különböző élek száma, sőt a különböző lapok száma is az összes lapszám négyzetgyökének egy konstansszorosa alatt marad. (Ugyanez igaz az 5.2. szakaszban tárgyalt felosztás polárisára is, szintén nagy $n$ esetében.)

Az $\eta$ hányados valószínűleg tovább csökkenthető, ha a kiindulásul használt felosztást az ikozaéderlap közepén levő háromszögek növelésével és a szélsők csökkentésével módosítjuk. A módosított felosztásban az egy sorban levő háromszögek csúcsai továbbra is koncentrikus köríveken vannak és az azokhoz csatlakozó oldalaik („alapjaik") egyenlők, viszont a háromszögek nem lesznek többé egyenlőszárúak.

Tekintsük a többi, az 5. szakaszban vizsgált háromszöghálózatnak megfelelő beírt poliéder polárisát (kivéve az 5.5. szakaszbeli polárisát). Ezekre aszimptotikusan nagyobb lesz az $\eta$ hányados, mint a [17]-ben javasolt gömbfelosztásra.

Tekintsünk ugyanis egy síkbeli, 72°-os szárszögű egyenlőszárú háromszöget, és középvonalaival bontsuk fel négy kisebb háromszögre. Tekintsük az éllel csatlakozó, most kapott kisebb háromszögekre a köréjük írt körök középpontjainak a távolságát. Ezek közül a maximális és a minimális aránya:

$$\frac{\cos 54°}{\cos 72°} \approx 1{,}902. \tag{32}$$

Ha a 72° helyett nagyobb hegyesszögű szárszöget veszünk, ez az arány még nagyobb lesz.

Tekintsük a Fuller-féle ikozaéderes felosztást vagy az $(5, 5, 5)_g$ Fuller-féle egyenlőszárú háromszöges felosztását, nagy $n$ esetében. Ezekben a felosztásokban az ikozaédercsúcs közelében előfordul a fenti helyzetben levő négy, 72°-os egyenlőszárú háromszög (közelítőleg). Így a poláris hálózatra az $\eta$ hányados egy, a (32)-höz közeli értéknél nem kisebb.

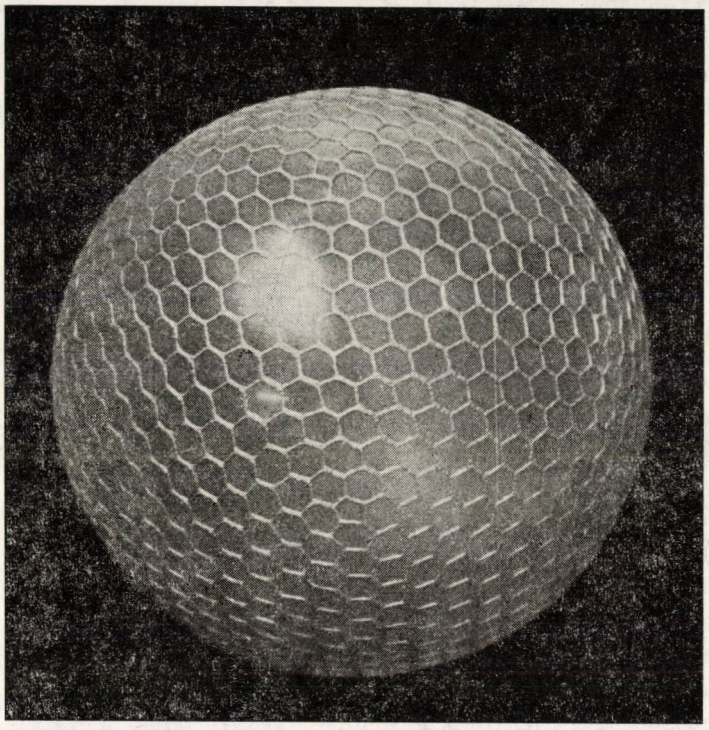
Tekintsünk az egységsugarú gömbön egy gömbháromszöghálózatot, és ezt gömbi középvonalakkal osszuk fel. A kapott hálózathoz tartozó poliéder lapjai legyenek elég kicsi, (euklideszi értelemben) hegyesszögű háromszögek. Az eredeti hálózatban egy legfeljebb 5-élű csúcsnál volt egy legalább 72°-os gömbháromszög-szög. Így a fentihez hasonlóan látható, hogy a felosztott hálózat polárisára az $\eta$ hányados egy, a (32)-höz közeli értéknél nem kisebb.

Nem is ismerünk olyan gömbháromszöghálózat-sűrítési eljárást, amely tetszőleges hálózathoz egy sűrűbb hálózatot rendel, és amelyre a sűrűbb hálózathoz tartozó poliéder polárisára az $\eta$ hányados elég kicsi lenne (mondjuk aszimptotikusan kisebb, mint valamely, a (32)-beli értéknél kisebb szám). Egy ilyen hálózatsűrítési eljárás esetében az új csúcsokat valószínűleg több háromszög figyelembevételével kell elhelyezni.

### 6.2. *Egyforma élhosszúságú duális gömbrácsok*

A gömbbe írt, 5- és 6-élű cellákból álló, háromélű csúcsokkal rendelkező rács egyes celláit általában térbeli sokszögek határolják. Az, hogy ezek a sokszögek mind síkbeliek legyenek, elég sok megkötést jelent. Ha a csúcsok száma $c$,

azok $2c$ adattal jellemezhetők, és a megfelelő csúcsok egy síkba esése $(3c/2) - 6$ egyenletet ad. Ebből azt gondolhatjuk, hogy létezik ilyen poliéder. Kis lapszám esetén valóban nem nehéz konstruálni öt- és hatszögű lapokkal határolt, háromélű csúcsokkal rendelkező, gömbbe írt poliédereket. Példaként említjük az (5, 6, 6) szimbólummal jelölt archimedesi testet. Nagy lapszám esetén azonban nem tudjuk, hogy létezik-e a fenti tulajdonságokkal rendelkező poliéder.



*10. ábra.* Öt- és hatszögű cellákból álló gömbi háló modellje

A továbbiakban eltekintünk a cellák síkbeli voltától, és azt a kérdést vizsgáljuk, lehetnek-e a sokszögek élei egyforma hosszúak.

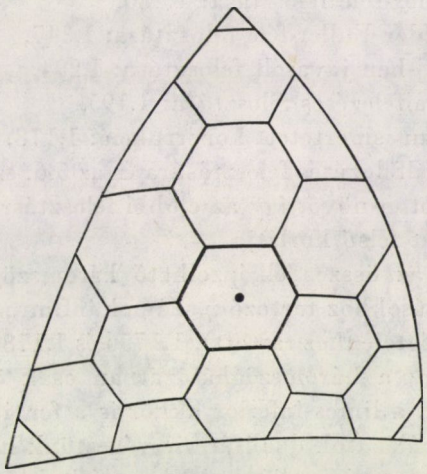
Ha létezik ilyen rács, akkor azt a gömb középpontjából a felületre vetítve a gömbnek egy felbontását kapjuk gömbi öt- és hatszögekre, miközben az összes él egyforma hosszú. Ezentúl ilyen gömbi hálózatokat tekintünk, és kikötjük még az öt- és hatszögek konvexitását is (10. ábra).

Kiindulunk az ikozaéder gömbi hálózatából. Olyan gömbi hálózatokat keresünk, amelyekben a tizenkét ötszög szabályos, középpontjaik az ikozaéder csúcspontjai és csúcsaik az ikozaéder élein vannak. Továbbá a hálózat ugyanolyan szimmetriákkal rendelkezik, mint az ikozaéder, és a hatszögek olyan módon csatlakoznak, mint a 11. ábrán. Az egyik hatszöglap (amelyiket közép-

sőnek hívhatunk) szabályos, középpontja egybeesik az ikozaéderlap középpontjával, oldalai pedig merőlegesek az ikozaéderlap magasságvonalaira (az ábrán vastag vonal jelöli).

Az ikozaéderoldalnak az ötszögeken kívül eső szakaszán felváltva hatszögoldalak, ill. hatszögátlók fekszenek, a hatszögoldalak száma $n'$, $n'=1,2,\ldots$. Az ábrán az ikozaéderoldal által félbevágott hatszögek másik fele nincs lerajzolva.

Gömbi trigonometriai számításokkal $n'=1$, ill. $n'=2$-esetén a hatszögoldal $\approx 23^\circ\,17'$, ill. $11^\circ\,35'$ ($n'=1$-re az (5, 6, 6) szimbólumú archimedesi test gömbi hálózatáról van szó).



*11. ábra.* Egyenlő élhosszúságú hálózat elrendezési sémája a gömbi ikozaéder egy lapján

$n'=3$ esetén valószínű, hogy a feladatunknak egyetlen megoldása van. (Itt a felosztást jellemző adatok száma megegyezik az egyenletek számával.) $n' \geq 4$ esetében a felosztást jellemző adatok száma nagyobb az egyenletek számánál. Emiatt valószínű, hogy a keresett típusú hálózat létezik, sőt bizonyos számú paraméter szabadon megválasztható. Ezeket bizonyítani viszont nem tudjuk.

## 7. Összefoglalás és értékelés

Bizonyos tengeri egysejtű állatok, a radiolariák vázának tulajdonságaiból kiindulva magyarázatát adtuk annak, hogy megközelítően egyenletes hálózatú rács esetében miért az ötös, hatos és a hetes szám dominál a rácsban. Nevezetesen, háromszöghálózatú, megközelítően egyenletes rácsban az egy csomópontba befutó rudak száma miért 5, vagy 6, vagy 7.

A továbbiakban a háromszöghálózatú gömbrácsok közül csak az öt- és hatélű csomópontokkal rendelkezőkkel foglalkoztunk. Megállapítottuk, hogy az ismert felosztástípusok esetében a rácsban levő leghosszabb és legrövidebb rúd hosszának aránya, azaz az $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányados a rács hálózatának sűrítésével növekszik, vagyis a hálózat egyenletessége romlik. Egyes felosztássorozatokra — melyekre a felosztás mindig sűrűbb és sűrűbb hálózattal tetszőlegesen sokszor megismételhető volt — kimutattuk, hogy a hozzájuk tartozó $\eta$-sorozatok korlátosak és létezik határértékük. Sőt igen jól megbecsültük ezeknek a határértékeknek az infimumát is.

A különböző felosztásmódoknál a határértékek az alábbiak voltak:

az ikozaéder Fuller-féle felosztása: 1,480,

az $(5, 5, 5)_g$ poliéder Fuller-féle felosztása: 1,347,

az ikozaéder [17]-ben javasolt felosztása: 1,284,

az ikozaéder oldalfelezéses felosztása: 1,195,

az 5.6. szakaszban ismertetett konstrukció: 1,178.

Az ikozaéder oldalfelezéses felosztására és az 5.6. szakaszban ismertetett konstrukcióra $\eta_n$ monoton növő, így az előbbi felosztásra 1,195, míg az utóbbira 1,178 az $\eta_n$ sorozat felső korlátja.

Ha tekintettük az összes elképzelhető háromszögfelosztást, akkor az adott lapszámú felosztásokhoz tartozó $\eta$ számok infimumának limes inferiorja (amikor a lapszám a végtelenhez tartott), 1,1756 és 1,1780 között volt. Amikor eleve kikötöttük, hogy a háromszöghálózatban csak öt- és hatélű csomópontok szerepelhetnek, a limes inferior akkor is a fenti két érték közé esett.

A háromszöges hálózatok duálisára is végeztünk határérték-vizsgálatot. A [17]-ben javasolt felosztás poliédereinek polárisai segítségével megállapítottuk, hogy a gömb köré írt, öt- és hatszögű lapokkal határolt poliédereknél az $\eta$ hálózat-egyenlőtlenségi hányados adott lapszámú poliéderekre vett infimumának limes inferiorja 1 és 1,595 között van.

Végezetül nem nagyszámú cella esetén kimutattuk, hogy létezik olyan öt- és hatszögű cellákból álló gömbi háló, amelyben minden cellát azonos hosszúságú oldalak határolnak. Ez a szemlélet alapján várható volt.

*Dolgozatunk legfontosabb eredményei a háromszöghálózatú gömbrácsokkal kapcsolatosak.* Gyakorlati szempontból két dolog érdemel külön is figyelmet.

1. A [17] jelű tanulmányban végzett vizsgálatok megállapították és dolgozatunkban az 5. ábrán is látható, hogy bármely értékét rögzítjük is a különböző hosszúságú élek számának, a [17]-ben javasolt felosztás mindig több háromszöget, azaz sűrűbb hálózatot eredményez mint a mérnöki gyakorlatban legelterjedtebb két Fuller-féle felosztás. Mostani vizsgálataink során pedig még azt is sikerült kimutatni, hogy a [17]-ben javasolt felosztás aszimptotikusan egyenletesebb hálózatot biztosít mint Fuller két hálózata, hiszen az $\eta$ hányadosának határértéke kisebb, mint a Fuller-féle hálózatok $\eta$ hányadosainak határértékei. Mindent egybevetve az adódik, hogy egy háromszög-

hálózatú gömbi rúdszerkezet — elég nagy háromszögszám mellett — a [17]-ben javasolt felosztás segítségével kevesebb különböző hosszúságú rúddal építhető meg mint a Fuller-féle felosztások esetében, és a rudak hossza is kevesebbet fog egymástól eltérni, mint a Fuller-féle felosztások esetében.

2. Ha a minél egyenletesebb hálózat biztosítása a főcél, akkor nem túlzottan lényeges, hogy a különböző hosszúságú rudak száma mennyi lesz a rácsban. Az 5.6. szakaszban ismertetett felosztási konstrukciónál a különböző hosszúságú rudak száma aránylag nagy, mégis valamennyi rudat egyforma hosszúra lehet gyártani. A konstrukció ugyanis olyan felosztássorozat, amelyhez tartozó $\eta$-sorozat minden tagjára 1,1780 felső korlát (ez az érték az elméleti aszimptotikus alsó korlátnál, 1,1756-nál alig nagyobb). Következésképp — a felosztássorozat bármelyik tagját tekintve — a rácsban a leghosszabb rúd hossza a legrövidebb rúd hosszától 17,8%-nál kevesebbet tér el. Az ilyen mértékű hossz-differenciákat pedig a csomóponti illesztéseknél is biztosítani lehet.

## IRODALOM


1. Campbell, A. S.—Moore, R. C.: Treatise on Invertebrate Paleontology, Part D, Protista 3, Protozoa (Chiefly Radiolarians and Tintinnines). Geological Society of America and University of Kansas Press, 1954
2. Domebook 2. Second edition. Shelter Publications, Bolinas 1972, 106—112.
3. Eberhard, V.: Zur Morphologie der Polyeder, Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1891
4. Fejes Tóth, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953
5. Haeckel, E.: Report on the Radiolaria. Report on the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. Challenger during the Years 1873—76. Zoology Vol. XVIII. (Part1, 2 and Tables), Edinburgh 1887
6. Haeckel, E.: Kunstformen der Natur. Verlag des Bibliographischen Instituts, 1904
7. Helmcke, J. G.—Otto, F.: Lebende und technische Konstruktionen. Bemerkungen zu Schalen und Raumtragwerken in Natur und Technik. *Deutsche Bauzeitung* **67** (1962), 855—861.
8. Le Ricolais, R.: Essai sur des systèmes réticulés à 3 dimensions, *Annales des Ponts et Chaussées*, 1940 — VII. No 4 (63—70. old.) és 1940 — VIII. No 11 (153—166. old.)
9. Le Ricolais, R.: 30 Ans de Recherches sur les Structures, *L'Architecture d'Aujourd'hui* No 108, Juin—Juillet 1963, 86—101.
10. Makai, E. Jr.: On polyhedra with approximately equal edges, *Annales Univ. Sci., Budapest. Eötvös, Sect. Math.* (megjelenés alatt)
11. Мордухай-Болтовской, Д. Д.: Геометрия радиолярий. Ученые Записки Ростовского на Дону Государственного Университета, выпуск VIII. 1936. 3—91.
12. Решетняк, В. В.: Фауна СССР. Радиолярии. Глубоководные радиолярии *Phaeodaria* северо-западной части Тихого Океана. Издательство »Наука« Москва, Ленинград, 1966.
13. Rühle, H.: Räumliche Dachtragwerke. Konstruktion und Ausführung, Band 2. Stahl Plaste VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1970. (Abschnitt 2. O. Patzelt: Raumfachwerke aus Metall)
14. Schönbach, W.: Netzkuppeln als Radome. *Der Stahlbau* **38** (1969), 33—43.
15. Schönbach, W.: Als Netzkuppel ausgebildetes Radom mit 49 m Durchmesser. *Der Stahlbau* **40** (1971), 45—55.
16. Suzuki, E.—Kitamura, H.—Yamada, M.: Space trussed domes in Tokyo. Space Structures. Edited by R. M. Davies. A study of methods and developments in three-dimensional construction resulting from The International Conference on Space Structures University of Surrey, September 1966. Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967, Chapter 60.
17. Tarnai, T.: Spherical Grids of Triangular Network. *Acta Techn. Hung.* **76** (1974), 307—336.

18. THOMPSON, D'ARCY W.: On Growth and Form I—II. (2nd edition, reprinted), Cambridge University Press, 1963
19. WEYL, H.: Symmetry. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1952

**Köszönetnyilvánítás**

R. B. FULLER és D. MITCHELL uraknak az 1b ábra, W. SCHÖNBACH úrnak a 2b ábra, E. SUZUKI, H. KITAMURA és M. YAMADA uraknak a 3b ábra fotójának rendelkezésünkre bocsátásáért ill. közlésre való átengedéséért.

Az 1a, 2a és 3a ábrákat E. HAECKEL Report on the radiolaria [5] című munkájából vettük át.

**Morphology of Spherical Grids.** Some problems of construction of grid networks fitted onto spherical surfaces are dealt with. First of all, the uniformity of the grid networks is investigated and in this connection the problem how a polyhedron inscribed into, or circumscribed about a sphere having a great number of faces can be constructed, for which the quotient of the longest and shortest edges is the minimum. The most important result of the paper is that under different, from the practical point of view interesting conditions, estimates are given for the value of this quotient.

**Morphologie der Kugelgitterwerke.** Es werden einige Probleme der Konstruktion von Gitterwerknetzen, die sich einer Kugelfläche anschmiegen, behandelt. Vor allem wird die Gleichmäßigkeit der Gitterwerknetze und in diesem Zusammenhang auch das untersucht, ob und wie man ein in eine Kugel eingeschriebenes oder einer Kugel umgeschriebenes derartiges Polyeder mit großer Seitenflächenzahl konstruieren kann, bei welchem der Quotient der längsten und kürzesten Kanten minimal ist. Das wichtigste Resultat der Abhandlung ist, daß bei verschiedenen, vom praktischem Standpunkt aus interessanten Nebenbedingungen, für diesen Quotienten Schätzungen gegeben werden können.