

# FERDE FOGAZATÚ HENGERES KEREKEK UJJMARÓJÁNAK LEFEJTŐ GYÁRTÁSA

## III. AZ UJJMARÓ ÁLTAL ELŐÁLLÍTOTT FOGOLDAL EVOLVENS JELLEGÉNEK VIZSGÁLATA

LIPKA ISTVÁN\*

[Beérkezett 1974. április 3-án]

A ferdefogú fogaskerék marására szolgáló ujjmaró forgási felülete, a dolgozat I. részében alkalmazott determinánsos eliminációs módszerünkkel vezethető le, amely az ujjmaró forgási felületét egy felületereg burkoló felületeként állítja elő. Az ilyen módon nyert ujjmaróval mart ferdefogú kerék fogoldala szintén egy burkoló felület lesz, éspedig a marófelület generáló mozgása által előálló felületeregnek a burkoló felülete. Ez a felület evolvens csavarfelület, vagyis olyan csavarfelület, amelynek homlokmetSZete közönséges hegyes körevolvens és így ez a burkoló felület valóban megfelel a ferdefogazatú kerék fogoldalfelületének.

### VIII. A fogoldalfelület paraméteres egyenletrendszerének a levezetése

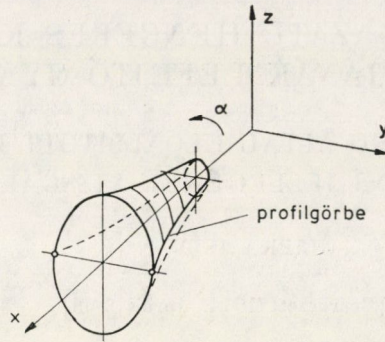
Az ujjmaró forgási felületének — amely egypalástú forgási hiperboloidok seregének burkoló felülete — a profilgörbéjére, amelyet a felületnek az  $(x, y)$ -koordinátákkal való metszése által nyerünk, a következő paraméteres egyenletrendszer vezethető le I. [2]:

$$\begin{aligned}x &= \frac{r_a}{\cos \varphi} + r_a \sin^2 \gamma_a [-\tan \varphi + (\varphi - \varphi_0)] \sin \varphi; \\y &= r_a \sin \gamma_a (1 - \sin^2 \gamma_a \sin^2 \varphi)^{1/2} [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)].\end{aligned}\tag{17}$$

Ha az  $(x, y)$  síkban fekvő — a (17) egyenletrendszerrel megadott — profilgörbét  $\alpha$ -szöggel az  $x$ -tengely körül elforgatjuk (17. ábra), akkor előáll az ujjmaró forgási felülete, amelynek paraméteres egyenletrendszere, ha a (17) alatti kifejezésekre bevezetjük az alábbi rövidítő jelöléseket:

$$\begin{aligned}f &= \frac{r_a}{\cos \varphi} + r_a \sin^2 \gamma_a [-\tan \varphi + (\varphi - \varphi_0)] \sin \varphi; \\g &= r_a \sin \gamma_a (1 - \sin^2 \gamma_a \sin^2 \varphi)^{1/2} [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)],\end{aligned}\tag{17'}$$

\* Lipka István, 1119 Budapest, Szakasits Á. u. 43.



17. ábra. Az ujjmaró profilgörcbájének elforgatásakor létre jövő forgási felület

a következő alakú lesz:

$$x = f,$$

$$y = g \cos \alpha,$$

$$z = g \sin \alpha,$$

amely kétparaméteres egyenletrendszer ( $\varphi$  és  $\alpha$  a paraméterek). Most már a ferdefogú kerék fogoldalának a marásánál ez a forgási felület végez egy csavarmozgást (18. ábra), tehát valamely  $t$ -szöggel való elforgást a  $z$ -tengely körül és egy  $c \cdot t$  darabbal való eltolódást a  $z$ -tengely irányában ( $c = r_a \tan \gamma_a$ ). E csavarmozgás által a felületeknek, az ujjmaró forgási felületének, egy serege keletkezik, amelynek burkoló felülete szolgáltatja a mart fogoldal felületét. Ezek szerint a forgási felületek seregének analitikus előállítását a következő alakú:

$$X = f \cos t - g \cos \alpha \sin t,$$

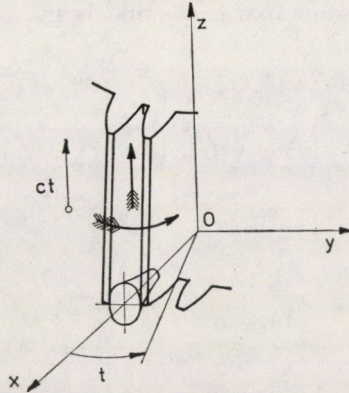
$$Y = f \sin t + g \cos \alpha \cos t, \quad (18)$$

$$Z = g \sin \alpha + ct.$$

Ezzel a háromparaméteres,  $\varphi$ ,  $t$ ,  $\alpha$  a paraméterek, egyenletrendszerrel előállított felületseregnek a burkoló felületét fogjuk meghatározni eliminációval, amelyhez kiszámítjuk a következő harmadrendű függvénydeterminánst:

$$\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\varphi, t, \alpha)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial X}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial t} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = D.$$





18. ábra. Az ujjmaró forgása és csavarmozgása folytán a fogoldal jelentkezik az ujjmaró-sereg burkoló felületeként

Az  $X$ ,  $Y$  és  $Z$  függvények parciális differenciálhányadosai, a változók szerinti differenciálást röviden indexszel, továbbá az  $f$  és  $g$  függvények  $\varphi$ -szerinti differenciálhányadosát meg vesszővel jelölve:

$$\begin{aligned} X_\varphi &= f' \cos t - g' \cos \alpha \sin t, & X_t &= -f \sin t - g \cos \alpha \cos t, \\ & & X_\alpha &= g \sin \alpha \sin t; \\ Y_\varphi &= f' \sin t + g' \cos \alpha \cos t, & Y_t &= f \cos t - g \cos \alpha \sin t, \\ & & Y_\alpha &= -g \sin \alpha \cos t, \\ Z_\varphi &= g' \sin \alpha, & Z_t &= c, \\ & & Z_\alpha &= g \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ezekkel a  $D = \partial(X, Y, Z)/\partial(\varphi, t, \alpha)$  függvénydetermináns

$$D = \begin{vmatrix} f' \cos t - g' \cos \alpha \cdot \sin t & -f \sin t - g \cos \alpha \cdot \cos t & \sin \alpha \cdot \sin t \\ f' \sin t + g' \cos \alpha \cdot \cos t & f \cos t - g \cos \alpha \cdot \sin t & -\sin \alpha \cdot \cos t \\ g' \sin \alpha & c & \cos \alpha \end{vmatrix} g.$$

A determinánst a harmadik sora szerint kifejtve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} D &= g' \sin \alpha \begin{vmatrix} -f \sin t - g \cos \alpha \cdot \cos t & \sin \alpha \cdot \sin t \\ f \cos t - g \cos \alpha \cdot \sin t & -\sin \alpha \cdot \cos t \end{vmatrix} - \\ &- c \begin{vmatrix} f' \cos t - g' \cos \alpha \cdot \sin t & \sin \alpha \cdot \sin t \\ f' \sin t + g' \cos \alpha \cdot \cos t & -\sin \alpha \cdot \cos t \end{vmatrix} + \\ &+ \cos \alpha \begin{vmatrix} f' \cos t - g' \cos \alpha \cdot \sin t & -f \sin t - g \cos \alpha \cdot \cos t \\ f' \sin t + g' \cos \alpha \cdot \cos t & f \cos t - g \cos \alpha \cdot \sin t \end{vmatrix} = \\ &= g' \sin \alpha \cdot g \sin \alpha \cdot \cos \alpha + cf' \sin \alpha + \cos \alpha (ff' + gg' \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Tehát a  $D$  függvénydeterminánsra nyertük, hogy:

$$\frac{1}{g} D = gg' \cos \alpha \sin^2 \alpha + cf' \sin \alpha + \cos \alpha (ff' + gg' \cos^2 \alpha) = 0,$$

vagy  $\cos^2 \alpha$  helyébe  $(1 - \sin^2 \alpha)$  értéket írva:

$$\frac{1}{g} D = cf' \sin \alpha + \cos \alpha (ff' + gg') = 0,$$

ahonnan

$$\tan \alpha = - \frac{ff' + gg'}{cf'}. \quad (19)$$

a  $\tan \alpha$ -nak ezt az értékét kifejezzük a  $\varphi$  paraméterrel. A  $\tan \alpha$  (19) alatti kifejezésének a számlálóját röviden előállítja következő differenciálhányados:

$$ff' + gg' = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(f^2 + g^2)}{d\varphi}.$$

Az  $f$  és  $g$  (17') alatti értéke alapján könnyű számolással adódik, hogy:

$$\begin{aligned} f^2 + g^2 &= \left( \frac{r_a}{\cos \varphi} + r_a \sin^2 \gamma_a (-\tan \varphi + \varphi - \varphi_0) \sin \varphi \right)^2 + \\ &+ (r_a \sin \gamma_a (1 - \sin^2 \gamma_a \sin^2 \varphi)^{1/2} [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)])^2 = \\ &= \frac{r_a^2}{\cos^2 \varphi} + 2r_a^2 \sin^2 \gamma_a [-\tan \varphi + (\varphi - \varphi_0)] \tan \varphi + \\ &+ r_a^2 \sin^2 \gamma_a [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)]^2, \end{aligned}$$

amelynek  $\varphi$ -szerinti differenciálhányadosa:

$$\begin{aligned} \frac{d(f^2 + g^2)}{d\varphi} &= 2(ff' + gg') = \frac{2r_a^2 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} + 2r_a^2 \sin^2 \gamma_a \left( -\frac{1}{\cos^2 \varphi} + 1 \right) \tan \varphi + \\ &+ 2r_a^2 \sin^2 \gamma_a [-\tan \varphi + \varphi - \varphi_0] \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \\ &+ 2r_a^2 \sin^2 \gamma_a [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)] \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) = \\ &= 2r_a^2 \left[ \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} - \sin^2 \gamma_a \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} + \sin^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \right] = \\ &= 2r_a^2 \left[ \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} - \sin^2 \gamma_a \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} + \sin^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \right] = \\ &= 2r_a^2 \left[ \cos^2 \gamma_a \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} + \sin^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \right]. \end{aligned}$$

Tehát a (19) alatti tört számlálójára a következő kifejezést vezettük le:

$$ff' + gg' = r_a^2 \left[ \cos^2 \gamma_a \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} + \sin^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \right]. \quad (19')$$

A (19) alatti képletben szerepel még  $f$ -nek a differenciáhányadosa:  $f'$ ; ez (17') szerint:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\varphi} &= \frac{r_a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + r_a \sin^2 \gamma_a \left( -\frac{1}{\cos^2 \varphi} + 1 \right) \sin \varphi + \\ &+ r_a \sin^2 \gamma_a (-\tan \varphi + \varphi - \varphi_0) \cos \varphi = \frac{r_a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \\ &- r_a \frac{\sin^2 \gamma_a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + r_a \sin^2 \gamma_a \cos \varphi (\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} f' &= \frac{r_a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cos^2 \gamma_a + r_a \sin^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi = \\ &= r_a \left[ \frac{\tan \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \gamma_a + \sin^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi \right], \end{aligned}$$

amely értéket, valamint (19') alattit a (19)-be írva:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{c} \frac{r_a^2 \left[ \cos^2 \gamma_a \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} + \sin^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \right]}{r_a \left[ \cos^2 \gamma_a \frac{\tan \varphi}{\cos \varphi} + \sin^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi \right]} = -\frac{1}{c \cdot \cos \varphi} r_a.$$

Ezzel az  $\alpha$ -paramétert kifejeztük a  $\varphi$ -paraméterrel:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{c \cdot \cos \varphi} r_a,$$

és mivel:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{c^2 \cos^2 \varphi + r_a^2}{c^2 \cos^2 \varphi},$$

azért

$$\cos \alpha = -\frac{c \cos \varphi}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}}; \quad \sin \alpha = \frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Most már, ha az így nyert  $\cos \alpha$  és  $\sin \alpha$  értékeket a (18) alatti egyenletrendszerbe helyettesítjük, akkor megkapjuk a burkoló felület, vagyis a mart felület

kétparaméteres egyenletrendszerét:

$$X = f \cos t + g \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} \sin t,$$

$$Y = f \sin t - g \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} \cos t,$$

$$Z = g \frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} + ct,$$

ahol  $\varphi$  és  $t$  a paraméterek,  $f$  és  $g$  jelentése pedig a (17') alatti.

### IX. A fogoldal homlokmetszetében fellépő profilgörbe paraméteres egyenletrendszerének a levezetése

Meghatározzuk a fogoldal felületnek, amelynek paraméteres egyenlet rendszerét az előző pontban vezettük le, a metszéspontját az  $(x, y)$ -koordináta síkkal (homloksík), amely görbéről meg kell mutatnunk, hogy az közös hegyes körevolvens.

Ha  $Z = 0$ , akkor a fogoldal felület egyenletrendszerének harmadik egyenletéből:

$$t = -\frac{r_a}{c} \frac{g}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}},$$

amely értéket az első két egyenletbe írva, nyerjük a metszéspont paraméteres egyenletrendszerét, a következő egyparaméteres egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x &= f \cos \left( \frac{r_a}{c} \frac{g}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} \right) - \\ &\quad - g \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} \sin \left( \frac{r_a}{c} \frac{g}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} \right), \\ y &= -f \sin \left( \frac{r_a}{c} \frac{g}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} \right) - \\ &\quad - g \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} \cos \left( \frac{r_a}{c} \frac{g}{\sqrt{r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} \right). \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy erről a görbéről kimutathassuk, hogy az hegyes körevolvens, az egyenletekben fellépő kifejezéseket átalakítjuk. Először is a  $g$  (17') alatti

kifejezésében fellépő négyzetgyök értéke, ha abban  $\sin^2 \varphi$  helyébe  $(1 - \cos^2 \varphi)$  értéket írunk, a következő lesz ( $\gamma$  mellől az  $a$  indexet most már elhagyjuk):

$$(1 - \sin^2 \gamma \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2} = (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \varphi)^{1/2}.$$

Mivel pedig  $c/a = \tan \gamma$ , vagyis  $\sin \gamma = (c/a) \cos \gamma$ , azért a négyzetgyök értéke:

$$\begin{aligned} (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \varphi)^{1/2} &= \left( \cos^2 \gamma + \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \varphi \right)^{1/2} = \\ &= \frac{(a^2 \cos^2 \gamma + c^2 \cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \varphi)^{1/2}}{a} = \frac{\cos \gamma}{a} (a^2 + c^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} = \\ &= (1 - \sin^2 \gamma \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ennek figyelembevételével a  $g$  (17') alatti kifejezése:

$$g = a \sin \gamma \frac{\cos \gamma}{a} (a^2 + c^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)],$$

amiből nyerjük, hogy:

$$\frac{g}{(a^2 + c^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} = \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)]. \quad (20)$$

Az

$$f = \frac{r_a}{\cos \varphi} + r_a \sin^2 \gamma (-\tan \gamma + \varphi - \varphi_0) \sin \varphi$$

kifejezést pedig a következőképpen alakítjuk át. Beszorozzuk  $\sin \varphi$ -vel, amikor is:

$$f = \frac{r_a}{\cos \varphi} + r_a \sin^2 \gamma \left[ \frac{\cos^2 \varphi - 1}{\cos \varphi} + (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi \right],$$

azaz

$$f = \frac{r_a}{\cos \varphi} + r_a \sin^2 \gamma \cos \varphi - \frac{r_a \sin^2 \gamma}{\cos \varphi} + r_a \sin^2 \gamma (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi;$$

vagy a jobboldalon az első és harmadik tagot egybefoglalva:

$$f = r_a \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \varphi} + r_a \sin^2 \gamma \cos \varphi + r_a \sin^2 \gamma (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi.$$

Mivel  $c = r \tan \gamma$ , azért

$$\cos^2 \gamma = \frac{r_a^2}{r_a^2 + c^2}, \quad \sin^2 \gamma = \frac{c^2}{r_a^2 + c^2},$$

amelyeket  $f$  előbbi kifejezésébe helyettesítve:

$$\begin{aligned} f &= r_a \frac{r_a^2}{r_a^2 + c^2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} + r_a \frac{c^2}{r_a^2 + c^2} \cos \varphi + r_a \frac{c^2}{r_a^2 + c^2} (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{r_a^2 + c^2} \left\{ \frac{r_a^3}{\cos \varphi} + r_a c^2 (\cos \varphi + \varphi - \varphi_0) \sin \varphi \right\}. \end{aligned}$$

A zárójelben álló tört számlálóját szorozzuk meg  $(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$ -gyel, ekkor a tört:

$$\frac{r_a^3}{\cos \varphi} = \frac{r_a^3 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{\cos \varphi} = r_a^3 \cos \varphi + r_a^3 \tan \varphi \sin \varphi,$$

amelyet a zárójelbe beírva:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{r_a^2 + c^2} \{ r_a^3 \cos \varphi + r_a^3 \tan \varphi \sin \varphi + r_a c^2 \cos \varphi + r_a c^2 (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi \} = \\ &= \frac{1}{r_a^2 + c^2} \{ r_a (r_a^2 + c^2) \cos \varphi + r_a^3 \tan \varphi \sin \varphi + r_a c^2 (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi \} = \\ &= r_a \cos \varphi + \frac{r_a}{r_a^2 + c^2} [r_a^2 \tan \varphi + c^2 (\varphi - \varphi_0)] \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ide a  $c^2 = r_a^2 \tan^2 \gamma$  értéket bevezetve végülis az  $f$  átalakított kifejezése:

$$f = r_a \cos \varphi + r_a [\cos^2 \gamma \tan \varphi + \sin^2 \gamma (\varphi - \varphi_0)] \sin \varphi. \quad (21)$$

Ezek után tekintsük a metszégörbe paraméteres egyenletrendszerét, amelyben a  $\sin$  és  $\cos$  függvények argumentuma:

$$\frac{r_a}{c} \frac{g}{(r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Mivel  $r/c = \cot \gamma$  és (4) szerint:

$$\frac{g}{(r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} = \sin \gamma \cos \gamma [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)],$$

azért a  $\sin$  és  $\cos$  függvények argumentuma:

$$\frac{r_a}{c} \frac{g}{(r_a^2 + c^2 \cos^2 \varphi)} = \cos^2 \gamma [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)],$$



amelyet jelölünk rövidség kedvéért  $\psi$ -vel:

$$\psi = \cos^2 \gamma [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)].$$

Ezt a jelölést a metszégörbe paraméteres egyenletrendszerébe bevezetve, az a (20) és (21) szerint a következő alakú lesz:

$$x = \{r_a \cos \varphi + r_a [\cos^2 \gamma \tan \varphi + \sin^2 \gamma (\varphi - \varphi_0)] \sin \varphi\} \cos \psi - \\ - r_a \sin^2 \gamma \cos \varphi [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)] \sin \psi,$$

$$y = -\{r_a \cos \varphi + r_a [\cos^2 \gamma \tan \varphi + \sin^2 \gamma (\varphi - \varphi_0)] \sin \varphi\} \sin \psi - \\ - r_a \sin^2 \gamma \cos \varphi [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)] \cos \psi.$$

Ha rövidség kedvéért  $r_a = 1$  értéket veszünk fel, és  $\sin^2 \gamma$  helyébe  $(1 - \cos^2 \gamma)$  értéket írunk, akkor  $x$  és  $y$  kifejezését a következőképpen alakíthatjuk át:

$$x = \{\cos \varphi + [\cos^2 \gamma (\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)) + \varphi - \varphi_0] \sin \varphi\} \cos \psi - \\ - [\sin \varphi - (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi - \cos^2 \gamma \cos \varphi [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)]] \sin \psi,$$

ahol  $\cos^2 \gamma [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)]$  helyébe a rövidítő  $\psi$  jelet bevezetve:

$$x = \{\cos \varphi + (\psi + \varphi - \varphi_0) \sin \varphi\} \cos \psi - [\sin \varphi - (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi - \\ - \psi \cos \varphi] \sin \psi = \cos (\varphi + \psi) + (\psi + \varphi - \varphi_0) \sin (\varphi + \psi);$$

tehát:

$$x = \cos (\varphi + \psi) + (\psi + \varphi - \varphi_0) \sin (\varphi + \psi).$$

Hasonlóképpen az  $y$  koordináta előállítására:

$$y = -\{\cos \varphi + (\psi + \varphi - \varphi_0) \sin \varphi\} \sin \psi - \\ - [\sin \varphi - (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi - \psi \cos \varphi] \cos \psi = \\ = -\sin (\varphi + \psi) + (\psi + \varphi - \varphi_0) \cos (\varphi + \psi).$$

Ha ezután a görbét az  $x$ -tengelyre vonatkozóan tükrözzük, vagyis  $y$  helyet  $-y$  értéket írunk, akkor a metszégörbe paraméteres egyenletrendszere a következő alakú lesz:

$$x = \cos (\varphi + \psi) + (\psi + \varphi - \varphi_0) \sin (\varphi + \psi); \\ y = \sin (\varphi + \psi) - (\psi + \varphi - \varphi_0) \cos (\varphi + \psi).$$

Végül forgassuk el a görbét az  $O$  origó körül  $(-\varphi_0)$ -szöggel, vagyis végezzük el az

$$X = x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0,$$

$$Y = -x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0$$

transzformációt, akkor a görbére a következő paraméteres egyenletrendszert kapjuk:

$$X = \cos(\varphi + \psi - \varphi_0) + (\varphi + \psi - \varphi_0) \sin(\varphi + \psi - \varphi_0),$$

$$Y = \sin(\varphi + \psi - \varphi_0) - (\varphi + \psi - \varphi_0) \cos(\varphi + \psi - \varphi_0),$$

ami nyilván a közösleges hegyes körevolvens paraméteres egyenletrendszerének felel meg, mert ha bevezetjük a

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi + \psi - \varphi_0 = \varphi - \varphi_0 + \cos^2 \gamma [\tan \varphi - (\varphi - \varphi_0)] = \\ &= (\varphi - \varphi_0) \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \tan \varphi \end{aligned}$$

paramétert, akkor az egyenletrendszer a következő ismert alakú lesz:

$$\left. \begin{aligned} X &= \cos \Phi + \Phi \sin \Phi \\ Y &= \sin \Phi - \Phi \cos \Phi \end{aligned} \right\}, \quad (r_a = 1)$$

**Generation of End Milling Cutters for Helical Gears, Part III. Investigation of the Involute Character of the Tooth Flank.** The surface of revolution of the end cutter for milling helical gears can be calculated by the determinant elimination method presented in Part I. of this paper, where the surface of the end cutter has been calculated as the envelope of a set of surfaces. The tooth flank of the helical gear milled by this end cutter will be an envelope surface too, i. e. the envelope surface of the set of surfaces produced by the generating movement of the cutter surface. This surface is an involute helicoidal surface: a helicoidal surface the normal section of which is a correct involute of a circle and hence the enveloping surface is indeed a true flank surface of a helical gear.

**Herstellung der Fingerfräser für Schrägverzahnte Stirnräder nach dem Wälzverfahren Teil III. Untersuchung des Evolventencharakters der von einem Fingerfräser erzeugten Zahnflanke.** Die Umdrehungsoberfläche eines Fingerfräasers für Schrägzahnräder kann mittels der im I. Teil des vorliegenden Aufsatzes abgeleiteten Determinanten-Eliminations-Methode als Hüllfläche einer Flächenschar berechnet werden. Die Zahnflanke eines mit einem solchen Fingerfräser gefrästen Schrägzahnrades ist ebenfalls eine Hüllfläche, u. zw. diejenige der durch die Bewegung der Fräseroberfläche entstehenden Flächenschar. Diese Hüllfläche ist eine Evolventen-Schraubenfläche, d. h. eine Schraubenfläche, deren Stirnschnitt eine gewöhnliche Kreisevolvente ist. Derart entspricht die Hüllfläche in der Tat der Zahnflankenfläche eines Schrägzahnrades.