ÖSSZETETT SZERKEZETEK SZÁMÍTÁSA

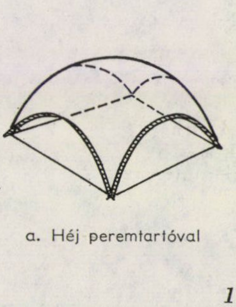
HORVÁTH ZOLTÁN*

[Beérkezett 1975. január 14-én]

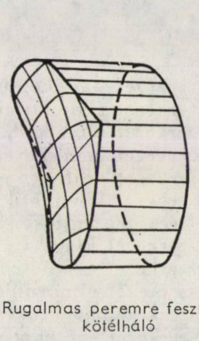
Jelen tanulmányban bemutatjuk, hogy összetett szerkezetek esetén az egyik rész-szerkezetre felírt általános egyenletrendszerbe hogyan lehet beleépíteni egy másik, ún. merevítő rész-szerkezet hatását. A közölt gondolatmenet célszerűen alkalmazható peremtartós héjszerkezet, rugalmas peremre feszített kötélháló, rugalmas féltérre helyezett lemez és más hasonló összetett szerkezetek számításánál.

1. Bevezetés

A műszaki gyakorlatban előfordulnak olyan összetett szerkezetek, amelyek egyes részeitegymástól eltérő számítási módszerrel számítjuk (1. ábra). Eltérő számítási módszer használata jelentheti például, azt hogy a szerkezet egy részét mozgásmódszerrel, más részét pedig „vegyes" mozaik módszerrel számítjuk. Erre az esetre példa lehet egy peremtartós héj vizsgálata, amikor a héjat „vegyes" mozaik módszerrel, a peremtartót pedig mozgásmódszerrel számítjuk (1a. ábra). Ugyancsak eltérő számítási módszert jelenthet az, ha egy szerkezet egy részét elsőrendű, más részét pedig harmadrendű elmélet alapján vizsgáljuk. Ez az eset fordulhat elő egy rugalmas peremre feszített kötélháló vizsgálatakor, amikor is a peremtartót alkotó és megtámasztó rúdszerkezetet elsőrendű, a kötélhálót pedig harmadrendű elmélet alapján számítjuk (1b. ábra).



a. Héj peremtartóval



b. Rugalmas peremre feszített kötélháló

1. ábra

* Horváth Zoltán, 2040 Budaörs, Ifjúság u. 12.

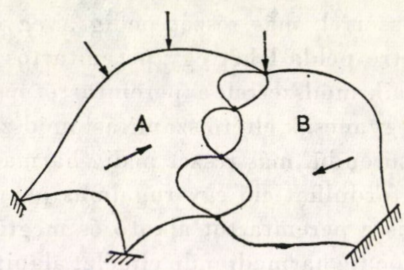
Amikor eldöntjük, hogy egy összetett szerkezet részeit milyen módszerrel számítjuk, akkor azt tulajdonképpen rész-szerkezetekre bontjuk. A rész-szerkezetek csatlakozási helyeit nevezzük *kapcsolási pontoknak.* Az együttdolgozást az biztosítja, hogy a kapcsolási pontokban néhány (vagy akár az összes) mozgás-komponens értékét azonosnak írjuk elő a csatlakozó rész-szerkezeteken. Nevezzük ezeket a mozgáskomponenseket *kapcsolati mozgásoknak*

Egy összetett szerkezet természetesen kettőnél több rész-szerkezetre is bontható. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az összetett szerkezeteket mindig két részszerkezetre bontva képzeljük el. Azokat a rész-szerkezeteket, melyeket merevségi mátrixuk reprezentál, nevezzük *merevítő* vagy *kiegészítő-szerkezet*nek, azokat pedig melyeket hajlékonysági és geometriai stb. mátrixuk reprezentál, *merevített* vagy *fő-szerkezetnek.* Az így felbontott összetett szerkezetek számítását mátrix szimbolikával tömören és egységesen tárgyalhatjuk.

2. Jelölések

A használt jelöléseket a 2. ábrával kapcsolatosan vezetjük be.

Jelölje A a merevített szerkezetet, B a merevítő szerkezetet.



2. ábra.

Legyen:

F = az összetett szerkezet hajlékonysági mátrixa
G = az összetett szerkezet geometriai mátrixa
u = az összetett szerkezet elmozdulás vektora
s = az összetett szerkezet igénybevételi vektora
q = az összetett szerkezet erőteher-vektora
t = az összetett szerkezet kinematikai teher-vektora
F_A = a merevített szerkezet hajlékonysági mátrixa
D = a merevített szerkezet kiegészítő merevségi mátrixa
$\hat{G}_A$ = a merevített szerkezet geometriai mátrixa
$\hat{u}_A$ = a merevített szerkezet elmozdulás vektora
s_A = a merevített szerkezet igénybevételi vektora
q_A = a merevített szerkezet erőteher-vektora
t_A = a merevített szerkezet kinematikai tehervektora
$\hat{K}_B$ = a merevítő szerkezet merevségi mátrixa
$\hat{u}_B$ = a merevítő szerkezet elmozdulás vektora
$\hat{q}_B$ = a merevítő szerkezet erőteher-vektora

A rész-szerkezeteket tekintsük véges méretű elemek halmazának, melyek elmozdulásait az elemek sarokpontjainak elmozdulásaival, igénybevételeit pedig az elemeken keletkező igénybevételekkel reprezentáljuk.

3. Összetett szerkezetek általános egyenlete

Kiindulásként megemlítjük, hogy ha a 2. ábrán látható összetett szerkezetet elsőrendű elmélettel, egységes számítási eljárással kívánjuk számítani (tehát nem szükséges a rész-szerkezetekre bontás) akkor a szerkezetre vonatkozó egyensúlyi és kinematikai egyenleteket egy mátrix egyenletben foglalhatjuk össze [1].

$$\begin{bmatrix} & G^* \\ G & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ t \end{bmatrix} = 0. \tag{1}$$

Ez a mátrix egyenlet a minormátrixok megfelelő előállításával lehet egy kontinuum diszkrét modelljének — vagy egy rúdszerkezet alapegyenlete. A következőkben tekintsünk két példát az összetett szerkezetek általános egyenletének felírására.

a) Mindkét rész-szerkezetet elsőrendű elmélettel kívánjuk számítani, tehát $D = O$.

A két rész- szerkezetre a következő mátrix-egyenleteket írhatjuk fel.

Az A jelű rész-szerkezetre:

$$\begin{bmatrix} & \hat{G}_A^* \\ \hat{G}_A & F_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_A \\ s_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{q}_A \\ t_A \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

A B jelű rész-szerkezetre:

$$\hat{K}_B \hat{u}_B + \hat{q}_B = 0 \tag{3}$$

A mátrixokat és a vektorokat particionálva a kapcsolati és nem kapcsolati mozgások szerint (a kapcsolati mozgásokat K-val jelölve):

$$\hat{u}_A = \begin{bmatrix} u_A \\ u_{KA} \end{bmatrix}, \quad \hat{q}_A = \begin{bmatrix} q_A \\ q_{KA} \end{bmatrix}, \quad \hat{u}_B = \begin{bmatrix} u_{KB} \\ u_B \end{bmatrix}, \quad \hat{q}_B = \begin{bmatrix} q_{KB} \\ q_B \end{bmatrix},$$

$$G_A = [G_A \, G_K], \quad \hat{K}_B = \begin{bmatrix} K_K & K_{KB} \\ K_{BK} & K_B \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítve a particionált mátrixokat, vektorokat a (2) és (3) jelű egyenletekbe:

$$\begin{bmatrix} & & G_A^* \\ & & G_K^* \\ G_A & G_K & F_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_{KA} \\ s_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_A \\ q_{KA} \\ t_A \end{bmatrix} = 0\,, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} K_K & K_{KB} \\ K_{BK} & K_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{KB} \\ u_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{KB} \\ q_B \end{bmatrix} = 0\,. \tag{5}$$

Mivel a kapcsolati mozgások megegyeznek a terheket pedig összegezhetjük: legyen

$$u_K = u_{KB} = u_{KA} \quad \text{és} \quad q_K = q_{KB} + q_{KA}$$

A (4) és (5) jelű egyenleteket összevonva felírhatjuk az összetett szerkezet általános egyenletét.

$$\begin{bmatrix} & & & G_A^* \\ & K_K & K_{KB} & G_K^* \\ & K_{BK} & K_B & \\ G_A & G_K & & F_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_K \\ u_B \\ s_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_A \\ q_K \\ q_B \\ t_A \end{bmatrix} = 0\,. \tag{6}$$

Abban az esetben, ha a merevítő-szerkezet minden pontja kapcsolási pont és e pontokban minden mozgás-komponens kapcsolati mozgás, K_B particionálása szükségtelen. Ekkor (6) helyett ezt írhatjuk:

$$\begin{bmatrix} & & G_A^* \\ & \hat{K}_B & G_K^* \\ G_A & G_K & F_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_K \\ s_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_A \\ q_K \\ t_A \end{bmatrix} = 0\,. \tag{7}$$

b) Az A jelű rész-szerkezetet harmadrendű- a B jelű rész-szerkezetet elsőrendű elmélettel kívánjuk számítani, tehát $D \neq O$.

Felírva az ismert mátrix egyenleteket ([1], [2]) az A jelű rész-szerkezet állapotváltozási differenciálegyenlet-rendszere mátrix jelöléssel:

$$\begin{bmatrix} D & \hat{G}_A^* \\ \hat{G}_A & F_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\hat{u}_A \\ ds_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\hat{q}_A \\ dt_A \end{bmatrix} = 0\,. \tag{8a}$$

Ezt a nemlineáris együtthatójú differenciálegyenletrendszert végesen kicsiny teher- és állapotváltozás esetén jól közelíti a

$$\begin{bmatrix} D & \hat{G}_A^* \\ \hat{G}_A & F_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}_A \\ \Delta s_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\hat{q}_A \\ \Delta t_A \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

mátrixegyenlet. A [2]-ben leírt iterációs módszert (140. oldal) alkalmazva a (8a) jelű egyenlet a (8) jelű egyenlet segítségével oldható meg. A B jelű szerkezetre felírható a (3) jelű egyenlet. Azért, hogy a két rész-szerkezet számítását összevonhassuk, írjuk fel a (3) jelű egyenletet végesen kicsiny teher és alakváltozások esetére:

$$\hat{K}_B \Delta \hat{u}_B + \Delta \hat{q}_B = 0. \tag{9}$$

Az a) pontban leírt particionálást elvégezve, D-t is particionáljuk:

$$D = \begin{bmatrix} D_A & D_{AK} \\ D_{KA} & D_K \end{bmatrix}.$$

Az (8) jelű egyenlet ekkor:

$$\begin{bmatrix} D_A & D_{AK} & G_A^* \\ D_{KA} & D_K & G_K^* \\ G_A & G_K & F_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_A \\ \Delta u_{KA} \\ \Delta s_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta q_A \\ \Delta q_{KA} \\ \Delta t_A \end{bmatrix} = 0. \tag{10}$$

A (9) jelű egyenlet pedig:

$$\begin{bmatrix} K_K & K_{KB} \\ K_{BK} & K_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_{KB} \\ \Delta u_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta q_{KB} \\ \Delta q_B \end{bmatrix} = 0. \tag{11}$$

Az előző pontban már bevezetett u_K éd q_K vektorok végesen kicsiny megváltozásaira bevezetve a Δu_K és Δq_K vektorokat, és a $C_K = D_K + K_K$ mátrixot a (10) és (11) jelű egyenletek összevonásával felírthatjuk az összetett szerkezet általános egyenletét, amely végesen kicsiny teher és állapotváltozás között ad összefüggést.

$$\begin{bmatrix} D_A & D_{AK} & & G_A^* \\ D_{KA} & C_K & K_{KB} & G_K^* \\ & K_{BK} & K_B & \\ G_A & G_K & & F_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_A \\ \Delta u_K \\ \Delta u_B \\ \Delta s_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta q_A \\ \Delta q_K \\ \Delta q_B \\ \Delta t_A \end{bmatrix} = 0 \tag{12}$$

4. A megoldás módja

Az a) pontban bemutatott feladat megoldása a (6) vagy a (7) jelű lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti. A b) pontban vázolt probléma megoldása a végesen kicsiny teher és állapotváltozásokra felírt lineáris egyenletrendszer segítségével iteratív úton történhetik. A megoldás részletes ismertetése helyett [2] itt csak arra mutatunk rá, hogy annak során szükségessé válik a (12) jelű egyenlettel azonos felépítésű lineáris egyenletrendszerek megoldása is. A lineáris egyenletrendszerek megoldása gyakorlati feladatoknál csak gépi úton valósítható meg. A megoldó program írásakor célszerű figyelembe venni az együttható mátrixok szimmetrikus és hiányosan kitöltött felépítését.

IRODALOM

1. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971.
2. SZABÓ, J.—KOLLÁR, L.: Függőtetők számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974.
3. GÁSPÁR, ZS.: Rúdszerkezetek nagy elmozdulásának számítása különböző modellek esetén. *Építés-Építészettudomány* 4 (1973), 345—356.

Calculation of Compound Structures. It is pointed out in case of a compound structure, how the effect of a so-called stiffening structural part could be built into the general set of equations established for only a part of the compound structure. The described order of ideas may conveniently be applied to the calculation of shell structures supported by an edge beam, cable networks stressed on elastic edge beams, slabs placed on elastic half-space and other compound structures.

Berechnung komplexer Konstruktionen. Es wird beschrieben, wie man im Fall von zusammengesetzten Tragwerken, in ein für eine Teilkonstruktion aufgeschriebenes allgemeines Gleichungssystem den Einfluß eines anderen sog. Verspannungsbauteils einbauen kann. Das behandelte Verfahren kann zweckmäßig bei der Berechnung von an den Rändern abgestützten Flächentragwerken, von auf elastische Ränder gespannten Seilnetzen, sowie von auf elastischem Halbraum liegenden Platten und anderen ähnlichen komplexen Konstruktionen angewandt werden.