

STOCHASZTIKUS OPTIMALIZÁLÁSI MÓDSZEREK A TÖRŐTEHER MEGHATÁROZÁSÁRA

TEGZE JUDIT*

és

LENKEI PÉTER**

A MŰSZAKI TUD. KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1976. február 13-án]

Statikailag határozatlan egyenes rudakból álló síkbeli szerkezetek adott valószínűségű képlékeny törőterhének a szokásos determinisztikus módszer szerinti számításokhoz képest való növekedését vizsgáljuk, feltételezve, hogy a kritikus keresztmetszetek képlékeny nyomatéki teherbírásai korlátlanul osztható valószínűségi változók. A „mechanizmusok kombinációjának módszerét” fejlesztettük tovább a stochasztikus szerkezeti modellre is alkalmassá. A felmerülő matematikai és számítástechnikai nehézségek megoldása után a módszert 30 egyszerű keretszerkezet példáján vizsgáltuk meg. Az eredmények azt mutatták, hogy a stochasztikus modellre nagyobb képlékeny törőteher kisebb szórással és az egyes kritikus keresztmetszetre nagyobb megengedhető tönkremeneteli valószínűség adódik a determinisztikus modellhez képest.

1. Bevezetés

A statikailag határozatlan vasbeton- vagy acélszerkezetek törőterhének meghatározása determinisztikus optimalizálási módszerekkel részletesen kidolgozott [1, 2, 3]. Ezzel szemben a stochasztikus optimalizálási módszerek alkalmazása területén még sok megoldatlan kérdés akad. Ismeretes, hogy a statikailag határozatlan szerkezet tönkremeneteli valószínűsége kisebb, mint a statikailag határozotté [4]. Ez annak köszönhető, hogy majdnem az egész világon a félvalószínűségi méretezést használják, ahol a tönkremeneteli valószínűséget egyetlen kritikus keresztmetszet (elemi hosszúságú rúdszakasz) tönkremenetelére írják elő. Valójában a statikailag határozatlan szerkezet tönkremenetelére nem egyetlen, hanem több kritikus keresztmetszet egyidejű tönkremenetelével következik be. Ennek az egyidejű tönkremenetelnek kisebb a valószínűsége, mint egyetlen keresztmetszet tönkremenetelének.

2. A szerkezet modellje

A szerkezetek vizsgálatát az alábbi feltevések mellett végezzük:

- a) a szerkezet egyenes rudakból álló síkbeli szerkezet;
- b) a teher koncentrált erőkből álló, egy paraméteres, monoton növekvő, azzal a korlátozással, hogy nem alakulhat ki állandó nyomatékú szakasz;
- c) a nyíró- és derékerők, valamint a hosszirányú alakváltozások hatása elhanyagolható;

* Tegze Judit, 1065 Budapest, Rudas László u. 18.

** Dr. Lenkei Péter, 1119 Budapest, Szakasits Árpád u. 4.

d) csak a hajlítási képlékeny csuklók által meghatározott törési mechanizmus létrejöttével bekövetkező tönkremenetelt vizsgáljuk;

e) az anyagmodell merev — képlékeny, az elfordulásokat a képlékeny csuklókba koncentráljuk, s a köztük levő rúdszakaszokat merevnek tekintjük;

f) azokat az elemi hosszúságú rúdszakaszokat (a továbbiakban kritikus keresztmetszetek), ahol képlékeny csukló jöhet létre, azokon a pontokon kell felvenni, ahol a nyomaték vagy a nyomatéki teherbírások függvényei, vagy azok első deriváltjai nem folytonosak;

g) minden, a törőterhet befolyásoló tényezőt determinisztikusnak, a nyomatéki teherbírásokat azonban korlátlanul osztható eloszlású [8] valószínűségi változóknak tekintjük.

A *c)* és *d)* feltevésekből következik, hogy nem vizsgáljuk a stabilitásvesztés következtében beálló tönkremenetelt.

A *b)* feltétel, mely szerint nem alakulhat ki konstans nyomatéki szakasz, biztosítja, hogy a kritikus keresztmetszet helye determinisztikusnak tekinthető. Ha konstans nyomatéki szakasz létezik, akkor a kritikus keresztmetszet helye is valószínűségi változó, s így a nyomatéki teherbírással együtt csak egy extrémális eloszlásfüggvénnyel jellemezhető.

A *g)* feltétel szerinti eloszlásfüggvények többek közt lehetnek normális vagy gamma-típusú eloszlások is.

3. A feladat megfogalmazása és megoldása

A feladat megoldására a képlékenységtan kinematikai extrémumtételét használjuk fel, azaz meghatározzuk azt a legkisebb teherparamétert, melyre törési mechanizmus alakul ki. A megoldásra az ún. „mechanizmusok kombinációjának módszerét” alkalmaztuk, amely független mechanizmusok rendszeréből alkotott lineáris kombinációk közül választja ki a tényleges törési mechanizmust, azt, amelyikhez a legkisebb teherparaméter tartozik. Ezt a módszert, amely determinisztikus modellre már kidolgozott [9, 1, 2], fejlesztettük tovább a stochasztikus modellre is alkalmas számítási eljárássá. Hasonló módszert közgazdasági feladat megoldására tőlünk függetlenül kidolgoztak [10].

A feladat mindkét modell esetére egy matematikai programozási feladatként fogalmazható meg, melynek minimalizálandó célfüggvénye a λ teherparaméter

$$\lambda = \Theta^* \cdot M \rightarrow \min ; \quad (1)$$

el tételrendszere pedig a következő lineáris egyenletrendszerek

$$\Theta^* = t^* \Theta_f, \quad (2)$$

$$t^* e = 1, \quad (3)$$

ahol Θ az s számú kritikus keresztmetszet képlékeny elfordulás vektora
 Θ_f az m számú független mechanizmus képlékeny elfordulásából alkotott mátrix és $m = s - n$, ahol n a statikai határozatlanság foka
 e a terhek által az elemi mechanizmusokon végzett külső munkák vektora
 t a törési mechanizmust megadó lineáris kombinációs együtthatók vektora.

A képlékeny elfordulások vektorát [1, 2] szerint a következőképpen bontjuk fel:

$$\Theta = \Theta^+ - \Theta^- \tag{4}$$

A módszert kiegészítettük annak bizonyításával, hogy a (4) felbontás egyértelműségét biztosító feltétel [6, 7],

$$\Theta^+ \odot \Theta^- = 0 \tag{5}$$

(ahol a jelölés az ún. logikai szorzat) valóban elhagyható. Mind a determinisztikus, mind a stochasztikus modellre bebizonyítottuk, hogy az (5) egyértelműségi feltétel a célfüggvény szélső értékére minden esetben automatikusan teljesül. Ennek következményeként ez a nemlineáris feltétel a feltételrendszerből elhagyható, és a megmaradó feltételek lineárisak.

A t vektor pedig a következő alakba írható:

$$t = t' - t'' \tag{6}$$

ahol t' az új változók vektora, amely alkalmasan választott t'' esetén mindig nem-negatív t'' konstans vektor.

(4) és (6) alapján a célfüggvény a következő lesz:

$$\lambda = M^* \cdot x \rightarrow \min, \tag{7}$$

(2s+m) (2s+m)

és a feltételrendszer a következő lineáris egyenletrendszerrel adható meg

$$A \cdot x = b, \tag{8}$$

(2s+m, s+1) (2s+m) (s+1)

ahol $M^* = [M^{+*}, M^{-*}, O^*]$, $x^* = [\Theta^{+*}, \Theta^{-*}, t^{**}]$,

$$A = \begin{bmatrix} I & -I & -\Theta_f^* \\ O^* & O^* & e^* \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\Theta_f^* \cdot t'' \\ 1 + e^* \cdot t'' \end{bmatrix}.$$

M^+ és M^- a pozitív és negatív képlékeny nyomatéki teherbírások a kritikus a keresztmetszetekben

I és $-I$ az egységmátrix megfelelő előjellel.

A képlékeny nyomatéki teherbírások a determinisztikus modell esetében rögzített értékek, a sztochasztikus modellnél azonban ismert eloszlású

valószínűségi változók. Ezeknek a képlékeny nyomatéki teherbírásoknak a kombinációjaként kapjuk meg a teherparamétert, amely az előzőkből következően ugyancsak valószínűségi változó lesz ugyanolyan típusú eloszlásfüggvénnyel. A törőteherparaméter eloszlásfüggvényének tetszőleges pontja — tehát egy adott valószínűségű törőteher — meghatározható a következőképpen.

Ismeretes [8], hogy a korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók tetszőleges lineáris kombinációja is ugyanolyan típusú eloszlású valószínűségi változó. Ennek várható értéke, szórása kifejezhető az eredeti eloszlásfüggvények várható értékeivel és szórásaival, valamint a kombináció együtthatóival:

$$\bar{\lambda} = (\Theta^+)^* \bar{M}^+ + (\Theta^-)^* \bar{M}^-, \quad (9)$$

$$D^2(\lambda) = \{(\Theta^+)^2\}^* \cdot q^+ + \{(\Theta^-)^2\}^* \cdot q^- \quad (10)$$

ahol q^+ és q^- a megfelelő képlékeny nyomatéki teherbírások szórásnégyzetei, $(\Theta^+)^2$ és $(\Theta^-)^2$ az elfordulások négyzeteiből alkotott vektorok.

A szerkezet tönkremeneteli valószínűségét [11] szerint vettük fel $p_0 = 8,2 \cdot 10^{-5}$ értékre. λ eloszlásfüggvényének ismeretében határozzuk meg azt a Θ^+ és Θ^- vektoroktól függő λ_s értéket, amelynél kisebb törőerő bekövetkezésének valószínűsége kisebb, mint az előre megadott p_0 érték. Jelölje u_0 a standardizált eloszlásfüggvény p_0 kvantilisét, akkor a λ_s érték ezzel kifejezhető:

$$\lambda_s = D(\lambda)u_0 + \bar{\lambda}. \quad (11)$$

A korábbi kifejezéseket felhasználva, λ_s felírható az elfordulásvektorok függvényeként

$$\lambda_s = u_0 \sqrt{x^* \mathbf{Q} x} + \bar{M}^* x, \quad (12)$$

ahol $\mathbf{Q} = \langle q^+, q^- \rangle$ a q^+ és q^- vektorokból alkotott diagonálmátrix.

Az ily módon kapott, most már determinisztikus célfüggvénynek a minimuma adja meg a stochasztikus modell adott valószínűségű törőterhét. Míg a determinisztikus modell célfüggvénye lineáris, s így megoldására alkalmas a szimplex-módszer, a stochasztikus modell minimalizálandó célfüggvénye azonban, mint ezt [6] munkában kimutattuk, konkáv.

Ilyen célfüggvény, s lineáris feltételrendszer esetén a feladat megoldható a metszősíkok módszerével [12], amely számítógépre jól alkalmazható eljárás [13].

4. A módszer gyakorlati alkalmazása

A pontosabb sztochasztikus számítás hatékonyságát néhány különböző paraméterű gyakorlati példán vizsgáltuk.

A determinisztikus és a stochasztikus modell összehasonlítására az egyik lehetőség az, hogy a determinisztikus modellnél az egyes kritikus keresztmetszetekre ugyanakkora (p_i) tönkrementeli valószínűséget írunk elő, mint a stochasztikus modellnél a teljes szerkezetre (p_0) és megvizsgáljuk, hogy a stochasztikus modell teherbírása mennyire haladja meg a determinisztikus modellét.

Bebizonyítottuk [7], hogy ilyen feltételek mellett a determinisztikus modell teherbírása alsó korlátja a stochasztikus modell teherbírásának. Ugyancsak megadtunk két egyszerűen számítható felső korlátot is [6, 7]. Egyenylású, egy szintes, befogott kereteket vizsgáltunk 7 különböző függőleges és vízszintes koncentrált terhekből álló teherrendszerre. A lehetséges megoszló terheket páratlan számú koncentrált erőkből álló teherrendszerrel helyettesítettük.

A kritikus keresztmetszetek képlékeny nyomatéki teherbírásainak eloszlásfüggvényeit normális eloszlásoknak vettük fel.

A fesztáv (l) és a magasság (h) aránya $l/h = 2,4, 1/2$. A képlékeny nyomatéki teherbírások arányait a gerendára (M_l) és az oszlopra (M_h) vonatkozóan az 1. táblázatban mutatjuk be.

1. táblázat

Képlékeny nyomatéki teherbírás típusa				
		1	2	3
M_l/M_h	+	3/2	1	3
	-	1	2/3	3/2

A + és - jelek azokat a nyomatékokat jelölik, melyek a belső, ill. a külső oldalon okoznak húzást az egyes rudakban. A képlékeny nyomatéki teherbírások relatív szórásait a következő értékekre vettük fel:

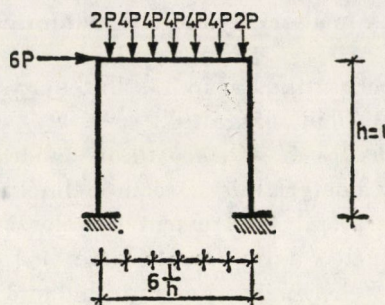
$$r = 0,015, 0,05, 0,15 \text{ és } 0,25.$$

Természetesen ez utóbbinál kis tönkremeneteli valószínűség esetében a normális eloszlás feltételezése jelentős hibát eredményezhet. Nagy szórások esetében a számítás konvergenciája is nagyon lassú volt.

Összesen 30 keretszerkezetet vizsgáltunk meg mind a determinisztikus, mind a stochasztikus modellre. Példaként megadjuk az 1. ábrán bemutatott keretszerkezet számításának eredményeit a 2. táblázatban

- ahol λ_{50} és λ_{d0} a stochasztikus és a determinisztikus modell törőteherparaméterei,
- r_λ a keretszerkezet törőteherparaméterének relatív szórása,
- r a kritikus keresztmetszetek képlékeny nyomatéki teherbírásának relatív szórása,
- p_i a képlékeny tönkremenetel valószínűségei az egyes kritikus keresztmetszetekben, figyelembevétel, hogy a teljes szerkezet tönkremeneteli valószínűsége $p_0 = 8,2 \cdot 10^{-5}$.

A 2. táblázat egyes rovataiban található két érték az iteráció végeredményeként kapott alsó és felső határ, ugyanis csak korlátozott gépidő állt rendelkezésünkre.



1. ábra

2. táblázat

Paraméterek Feladatok sorszáma	l/h	Képlékeny nyomatéki teherbírás típusa	$\frac{\lambda_{s0}}{\lambda_{d0}}$	$\frac{r\lambda}{r}$	P_i
10	2	1	1,104 1,051	0,553 0,782	$1,9 \cdot 10^{-2}$ $1,6 \cdot 10^{-3}$
13	4	1	1,078 1,026	0,663 0,887	$6,1 \cdot 10^{-3}$ $4,1 \cdot 10^{-4}$
16	1/2	1	1,116 1,061	0,500 0,738	$3,0 \cdot 10^{-2}$ $2,7 \cdot 10^{-3}$
22	2	3	1,082 1,032	0,648 0,862	$7,4 \cdot 10^{-3}$ $5,8 \cdot 10^{-4}$

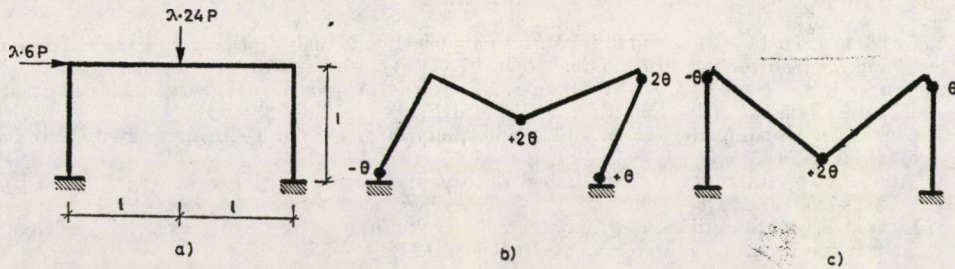
5. Az eredmények vizsgálata

a) Az eredményekből kitűnik, hogy a determinisztikus és a stochasztikus modell teherbírása között jelentős eltérés lehet. Ezeket az eltéréseket adtuk meg a 3. táblázatban.

3. táblázat

r	0,015	0,05	0,15
$\lambda_{s0}/\lambda_{d0}$	2—3%	3—12%	22%

b) A determinisztikus és a stochasztikus modell szerinti vizsgálatok nemcsak különböző törőteher paramétereket eredményeznek, hanem nemegyszer eltérő törési mechanizmusokat is. Ld. 2. ábra. b) — determinisztikus modell; c) — stochasztikus modell.



2. ábra

c) A szerkezet törőteherparaméterének szórása jóval kisebb a stochasztikus modell esetén, mint a determinisztikusnál, ami kiolvasható a 2. táblázatból. Az r_λ/r arány 0,5 és 0,78 között volt.

d) A két modell eredményeinek összehasonlítására van egy másik lehetőség is, mégpedig azoknak a p_i valószínűségeknek a meghatározása, amelyet az egyes kritikus keresztmetszetekre kell előírunk, hogy a teljes szerkezet tönkremeneteli valószínűsége a stochasztikus modell szerint p_0 legyen. Azoknál a feladatoknál, amelyek elég jól konvergálnak, ezek a p_i értékek a 10^{-3} – $2 \cdot 10^{-2}$ tartományba esnek, s így sokkal nagyobbak, mint a determinisztikus modellnél a kritikus keresztmetszetekre előírt — szokásosan a teljes szerkezettől megkívánt tönkremeneteli valószínűséggel megegyező — $p_i = 8,2 \cdot 10^{-5}$ érték.

6. Következtetések

Az egyenes rudakból álló statikailag határozatlan síkbeli keretszerkezet stochasztikus modellje lényegesen nagyobb teherbírást ad, kisebb szórást a törőteherparaméterre és nagyobb megengedhető tönkremeneteli valószínűséget az egyes kritikus keresztmetszetekre, mint a determinisztikus modell. Egyes esetekben a törési mechanizmus is eltérő lehet a két modell esetén.

A további kutatásokra vonatkozóan tervbe vettük a nyomatóki teherbíráásokat a normális eloszlásnál jobban leíró eloszlásfüggvények alkalmazását, az anyag rugalmas-képlékeny tulajdonságának, valamint a kritikus keresztmetszetek helye mint valószínűségi változónak a számításba vételét. Sokkal bonyolultabb szerkezetek esetében szükségessé válhatik a számítási módszer konvergenciájának gyorsítása is.

IRODALOM

1. GRIERSON, D. E.—GLADWELL, G. M. L.: Collapse Load Analysis Using Linear Programming. *Journal of the Struct. Div. ASCE* 97 (1971), 1561—1573
2. COHN, M. Z.—GHOSH, S. K.—PARIMI, S. R.: Unified Approach to Theory of Plastic Structures. *Journal of the Eng. Mech. Div. ASCE*, 98 (1972), 1133—1158
3. CIRAS, A.: Optimization Theory in Limit Analysis of a Solid Deformable Body, Vilnius 1971, 1—123
4. TICHY, M.—VORLICEK, M.: Statistical Theory of Concrete Structures, Prague 1972, pp. 242—260 and 318—331
5. LENKEI P.: Matematikai programozási módszerek alkalmazása tartószerkezetek képlékeny számításához. *ÉTI Tanulmány*, Budapest 1972, 1—56
6. TEGZE J.: Matematikai programozási módszerek vasbeton rúdszerkezetek képlékenységtan szerinti vizsgálatánál. *ÉTI Kutatási Jelentés*, Budapest 1974, pp. 1—42. Mellékletként: „Síkbeli keretszerkezetek sztochasztikus modelljének vizsgálata” pp. 1—48
7. TEGZE J.: Vasbeton rúdszerkezetek törőteherbírásainak meghatározása optimalizációs módszerekkel. *ÉTI Kutatási Jelentés* Budapest 1975, pp. 1—67
8. FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. II. Wiley, New York 1966
9. NEAL, B. G.—SYMONDS, P. S.: The Rapid Calculation of the Plastic Collapse Load for a Framed Structure. *Proceedings ICE*, London Vol. I. Pt. 3, 1952, pp. 58
10. CALLAHAN, J. R.—BECTOR, C. R.: Optimization with General Stochastic Objective Functions, *ZAMM* 55 (1975), pp. 528—530
11. KORDA J.: Megépült tartószerkezetek erőtan felülvizsgálata az új tervezési előírások felhasználásával. *Magyar Építőipar* (1975) 342—348
12. FORGÓ, F.: Cutting Plane Methods for Solving Nonconvex Programming Problems. *Acta Cybernetica*, Tom. I. Fasc. 3. Szeged (1972), 171—192
13. ZSIGMOND I.: Nemlineáris programozási feladatok megoldása metszősík módszerrel. Tájékoztató az Egyetemi Számítóközpont munkájáról. Budapest 1975. 16. sz., 32—35

Stochastic Optimization Methods in Collapse Load Analysis. — The increase of the plastic collapse load of a given probability is investigated for statically indeterminate linear plane structures, assuming the plastic moment capacities at the critical section to be random variables of infinitely divisible distribution. The Combinations of Mechanisms method was developed for the stochastic structural model. The mathematical and computational problems were solved and 30 simple frame examples were investigated. The results showed higher plastic collapse load, lower coefficient of variation and higher possible critical section failure probabilities of the stochastic model as compared to the deterministic one.

Stochastische Optimalisationsmethoden bei Bruchlastrechnungen. — Die Erhöhung der plastischen Bruchlast gegebener Wahrscheinlichkeit wurde bei statisch unbestimmten ebenen Stabwerken unter der Bedingung geprüft, daß die plastische Momenttragfähigkeit in den kritischen Querschnitten eine unbegrenzt dividierbar verteilte Zufallvariante ist. Die Methode der „Kombination der Mechanismen“ wurde im Fall einer stochastischen Konstruktionsmodell weiterentwickelt. Mathematische und rechnungstechnische Fragen wurden gelöst und das Beispiel von 30 einfachen Rahmen geprüft. Die Ergebnisse zeigten eine höhere plastische Bruchlast, kleinere Variationskoeffizient und grössere mögliche Wahrscheinlichkeit der Zerstörung im Fall des stochastischen Modells dem deterministischen Modell entgegen.