

MŰSZAKI MECHANIKAI KUTATÁSAINK A FINIT MÓDSZEREK TERÜLETÉN

HELYZETKÉP*

ROLLER BÉLA**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A dolgozat a műszaki mechanika finit módszereit a modellalkotás, a matematikai módszerek és a mechanikai problémák szerint csoportosítja. Értékeli az 1972–75. évek kutatási tervidőszakának főbb hazai eredményeit, felveti a kialakult problémákat és igyekszik megfogalmazni az elektronikus számológépek alkalmazásával történő műszaki mechanikai kutatás soron következő hazai feladatait.

1. Bevezetés

E sorok írója az MTA Műszaki Mechanikai Bizottságának megbízásából áttekintette azokat a kutatásokat, amelyeket hazánkban az 1972–75. években a finit módszerek területén végeztek. Ennek érdekében érintkezésbe lépett a témában érdekelt, finit módszerek kutatásával foglalkozó hazai kutatóhelyekkel annak megállapítására, hogy beszámolója miként segíthetné elő azoknak a tudománypolitikai irányelveknek érvényesülését, amelyeket a Bizottság szolgál.

Az információ a következő kutatóhelyekre támaszkodott:

- a) BME Acélszerkezetek Tanszéke
- b) BME Építőmérnökkari Mechanika Tanszék
- c) BME Gépészmérnökkari Műszaki Mechanika Tanszék
- d) BME Villamoskari Műszaki Mechanika Tanszék
- e) BME Geotechnika Tanszék
- f) BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék
- g) BME Vasbetonépítési Tanszék
- h) BME Közlekedésmérnöki Kar Mechanika Tanszék
- i) NME Mechanika Tanszék
- j) ÉVM Építéstudományi Intézet
- k) ÉVM Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalat.

* Tárgyalta és megvitatás után jóváhagyta az MTA Műszaki Mechanikai Bizottság 1975. december 9-i ülésén.

** Dr. Roller Béla 1027 Budapest, Mártírok u. 54.

A kutatásokról készült beszámolóban a finit módszereket először a modellalkotás szerint csoportosítottuk. Azután vázoltuk a problémák megoldásakor használatos matematikai apparátust, majd a tárgyidőszak kutatásait a mechanikai problémák szerint rendeztük. Ismertetésre került az időszak néhány fontosabb kutatási eredménye, utaltunk a jelentősebb problémákra és tennivalókra, végül összeállítottuk azoknak a főbb forrásmunkáknak jegyzékét, amelyekre a beszámoló támaszkodik.

A beszámolót a Bizottság 1975. december 3-i ülésén megvitatta. Az anyagot — a hozzászólások alapján véglegesítve — alább közöljük.

2. A finit módszerek csoportosítása a modellalkotás szerint

Finit, vagyis véges szabadságfokú mechanikai feladatokat két esetben lehet kapni:

- a) ténylegesen véges szabadságfokú rendszerek elemzésekor,
- b) kontinuumok vizsgálatakor.

Az *a)* esetben a mérnöki munka során előforduló modell vagy rugókkal összekötött tömegpontok, illetve merev testek rendszere, vagy még inkább olyan tömegpontok rendszere, amelyeket szilárd kapcsolórudak kötnek össze. E rudak mechanikai jellemzőit kontinuummodellre alapozott számításokkal kapjuk meg, de a jellemzők száma véges.

A fenti felfogással alkotjuk meg például a térbeli keretek modelljét.

A *b)* esetben ismét kétféle módon járhatunk el.

b—1. A vizsgált mechanikai rendszerre (pl. felületszerkezetre) jellemző folytonos tartományban a szerkezetet kontinuummodellel jellemezzük és felírjuk az ennek megfelelő összefüggéseket (pl. parciális differenciálegyenleteket), de ez után a matematikai összefüggéseket finitizáljuk (pl. differenciaegyenletek alkalmazásával).

b—2. A kontinuumot véges számú, véges méretű kontinuumelemre bontjuk. Ezekben belül, esetleg a peremeiken maradéktalanul érvényesítjük a kontinuummechanika összefüggéseit (pl. a kompatibilitási differenciálegyenleteket), de különben a feladatban csak véges számú mechanikai feltételt kívánunk kielégíteni, és csak véges számú ismeretlen meghatározásával foglalkozunk.

b—1-re példa a differenciámódszer, vagy a hagyományos Ritz-módszer, *b*—2-re példa a véges elemekkel eszközölt elmozdulásmódszer.

Itt említjük meg azt a tényt, hogy a napjainkban esedékes mérnöki feladatok túlnyomó többsége olyan kérdésekre vezet, amelyeket csak numerikus úton lehet megoldani. Az analitikus eljárások javarésze is olyan függvények meghatározását követeli meg, amelyek csak végtelen sorokkal jellemezhetők. Ezek tényleges kiszámítása a sor egy megfelelő szeletének megállapításával jár,

ami vagy nyíltan numerikus munka, vagy — amennyiben táblázatokat használunk — burkoltan az.

Ilyen módon az analitikus eljárásokat is besorolhatnánk, és pedig úgy, hogy:

b—3. A szerkezetet kontinuummodellel jellemezzük, a feladatot ennek megfelelően oldjuk meg, és a számítást olyan értelemben finitizáljuk, hogy véges számú értékelési pontban véges közelítő összegeket veszünk figyelembe. A *b*—3. gondolatkörrel nem foglalkozunk tovább.

Hangoztatni kell azonban, hogy a „numerikus” és az „analitikus” tárgyalási és megoldási módoknak egymással való szembeállítását céltalan, hiszen nyilvánvaló, hogy mindegyiknek megvan a maga alkalmazási területe és ezek a módszerek nem ellenkeznek egymással, hanem kiegészítik egymást.

Mind a *b*—1, mind pedig a *b*—2 modellalkotásból kiindulva lehet vegyes eljárásokat is alkalmazni. Például:

b—4.1. A szerkezetet kontinuummal modellezzük és a megfelelő többváltozós összefüggéseket egyes változók szerint finitizáljuk (pl. differenciadifferenciálegyenleteket alkalmazunk).

b—4.2. A szerkezetet véges számú kontinuumelemre bontjuk, ezeken belül maradéktalanul érvényesítjük a kontinuummechanika összefüggéseit. A feladatban a további mechanikai feltételeket csak előre megszabott vonalak mentén teljesítjük, így csak véges számú ismeretlen függvényt keresünk (véges sávok módszere).

b—4.3. A szerkezetet véges kontinuumelemekre bontjuk, de ezek tulajdonságait a differenciámódszerrel elemezzük.

3. A matematikai módszerek áttekintése

a) A véges szabadságfokú szerkezetek vizsgálatának alapja a lineáris egyenletek rendszerének megoldása.

*a*1) A megoldás létezésének és egyértelműségének kérdése az együtthatómátrix rangjával és belső struktúrájával, továbbá a szabad taggal függ össze. A megoldás hatékony módszereit az együtthatómátrix elemeinek elrendezése befolyásolja.

*a*2) Ha a mechanikai rendszer — akár fizikai, akár geometriai okból, akár mindkettő együttese miatt — nem lineáris, akkor előtérbe kerül a nemlineáris egyenletrendszerek problémaköre, amely az előbbinél jóval kevésbé tisztázott, és az esetek java részében rá támaszkodik.

*a*3) Az egyenletrendszerek kérdéséhez csatlakozik még a lineáris és nemlineáris optimumszámítás (matematikai programozás) is, amelyeket a képlékenységtani határállapotvizsgálatban, az elasztoplasztikus vizsgálatban, az egyoldalú kényszerek figyelembevételkor és a szerkezeti szintézis területén alkalmaznak.

b) A kontinuumok vizsgálata véges szabadságfokú modell esetén ugyanezeket a kérdéseket veheti fel. Általánosabb mérlegelés végett azonban kontinuummodell esetében abból kell kiindulni, hogy ha a probléma teljesen determinisztikus és a feladat a szerkezeti analízis, akkor egy — többnyire parciális — differenciálegyenlet-, vagy rendszer határérték-, kerületérték-, kezdeti érték-, vagy kerületi-kezdeti értékfeladatával állunk szemben. Ennek megoldására többnyire numerikus eljárásokat alkalmazunk.

b1) Az első lehetőség a differenciálegyenlet helyettesítése differenciálegyenletek rendszerével, az egyszerű, vagy a bővített differenciamódszer, esetleg a többhely-módszer szerint. A második a differencia-differenciálegyenletekkel, illetve közönséges differenciálegyenlet-rendszerrel való helyettesítés.

b2) Más irányzat egy megfelelő, egyenértékű funkcionál felírása és a rá vonatkozó stacionaritási feladat közelítő megoldása. Funkcionál gyanánt akár a potenciális energia extrémum-tétele, akár a komplementer-energia extrémum-tétele, akár egy összetett extrémum-tétel (pl. Reissner-elv, vagy Ho-Washizu-funkcionál) alkalmazható, mindezeknek mechanikai tartalma van. Ezen kívül célt érünk a megoldás hibájára vonatkozóan felírt legkisebb négyzetek módszerével, vagy a súlyozott maradékoknak egyéb módszereivel, illetve a Galjorkin-módszerrel is.

b3) Ismét másik elgondolás, ha a differenciálegyenletek helyett integrál-egyenletekkel [2], [34], esetleg integrodifferenciálegyenletekkel jellemzik a feladatot, és ezeket oldjuk meg számszerűen.

A közelítés úgy válik numerikus módszerré, hogy a feladat megoldását előírt függvények kombinációival közelítjük meg, és csak a kombinációs tényezőket, a léptékeket keressük. Az egyes előírt függvényeket vagy a vizsgálati tartomány egészén, vagy csak egyes résztartományokon fogadjuk el érvényesnek. A közelítés lehet olyan, hogy a peremfeltételeket szigorúan kielégíti, de a mechanikai állapotegyenleteket a tartományon belül nem, de lehet fordított is, és lehet olyan is, hogy sem a peremeken, sem a tartományban nem egzaktt.

E szempont szerint például a differenciamódszert az jellemzi, hogy a megoldásfüggvényt egy-egy pont környezetében egy-egy magasabbfokú polinommal helyettesítjük. Itt a léptékek, azaz a Lagrange- vagy Hermite-alappolinomok szorzói a keresett függvény ordinátái, illetve parciális deriváltjainak helyettesítési értékei.

Az eljárás a tartományban és a peremen egyaránt csak a mechanikai egyenletek pontonkénti kielégítésére törekszik.

A Ritz-módszer hagyományos alakjában a peremfeltételeket kielégíti, bázisfüggvényei a vizsgálati tartomány egészén érvényesek, de ezen belül sehol sem nyújt szabatos megoldást. A véges elemek módszere, amelynek alkalmazásakor a léptékek ugyancsak a megoldásfüggvények és deriváltjaik helyettesítési értékei, és a bázisfüggvények csak egyes résztartományokon

érvényesek, elsősorban a tartományi elemek csatlakozás pontjain igyekeznek pontos eredményt nyújtani. E tekintetben a tartományi kollokáció egy fajtája.

Itt említjük meg, hogy a szilárd testek mechanikájának integrálegyenleteit ugyancsak lehetséges az előbbiekkal párhuzamos alapon tárgyalni.

Teljesen külön problémakör a sztochasztikus hatások figyelembevétele, amelyenél a valószínűségszámítás matematikáját kell alkalmazni. Itt az egyik kérdés a mérési eredményeket híven jellemző adateloszlásfüggvények megállapítása, a másik a stohasztikus adatoktól determinisztikusan (pl. differenciálegyenletek, vagy lineáris egyenletek stb. révén) függő eredmények valószínűségi jellemzőinek meghatározása. Az előforduló határozott integrálokat többnyire numerikusan célszerű megállapítani, így a finit és numerikus eljárásoknak nagy terük van.

4. A feladatok csoportosítása a mechanikai probléma szerint

A mechanikai problémák, illetve műszaki felhasználásuk terén, ezek nagy száma miatt, az egyes kutatóhelyeken folyó munkát csak vázlatosan lehet áttekinteni.

A kutatás kisebb része a dinamikai, nagyobb része a statikai-szilárdságtani területre vonatkozik. Ez utóbbin nehéz szétválasztani a problémákat, mert a hatékony módszerek mindkét területen egyaránt alkalmazhatók és alkalmazást is nyernek.

A kutatások téma szerinti összeállítása az alábbi:

Dinamikai kutatások:

a) Térbeli rúdrendszerek sajátrezgési vizsgálatának elméleti kérdései és számítási módszerei.

b) Véges szabadságfokú rendszerek vizsgálata a dinamikus igénybevételek megállapítása és a méretezés szempontjából.

Szerkezetek statikájára vonatkozó kutatások:

a) Rúdszerkezetek hatékony számítása az elsőrendű elmélet szerint, különös tekintettel a speciális műszaki kérdésekre.

b) Lemezek és lemezművek számítása

c) Héjszerkezetek számítása az elsőrendű elmélettel

d) Sík- és térbeli viselkedésű kontinuumok számítása elsőrendű elmélettel

- e) A másod- és harmadrendű elmélet alkalmazása a nagy elmozdulású szerkezetek állapotvizsgálatára, illetve stabilitási vizsgálatokra
- f) Nagy hatékonyságú számítási programrendszerek kialakítása
- A felsorolt fő témákon belül a következő részletesebb kutatásokat lehet megkülönböztetni:

Dinamikai kérdések

- a1) Kontinuumnak modellezett rudakból összekapcsolt térbeli rúd-szerkezetek sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása [5]
- a2) A dinamikus merevségmátrix numerikus alkalmazására vonatkozó vizsgálatok [4]
- a3) Újabb numerikus eljárások sajátértékek számítására [6], [12], [36]
- b1) Diszkrét rendszerekkel helyettesített járművek dinamikus igénybevételeinek vizsgálata megadott útprofilon való áthaladása esetén [27]
- b2) Magasépületek lengéstani modellezése és a sajátrezgések vizsgálata
- b3) Lökésszerű terhelésnek alávetett tartók dinamikus-képlékenységtani vizsgálata

Statika-szilárdságtani kérdések

- a1) Rúdszerkezetek számítása egyoldalú kényszerek esetében [32], [33], [34]
- a2) Rúdszerkezetek számítása pontatlan gyártás, vagy korlátozott mértékű kapcsolati elmozdulások esetében [17]
- a3) Rúdszerkezetek számítása előírt intervallumokban változtatható alapadatok esetében
- a4) Rúdszerkezetek számítása előírt eloszlású, stochasztikusan változó alapadatok esetében [23], [24], [25], [26], [28]
- a5) Rúdszerkezetek elasztoplasztikus vizsgálata és határállapotvizsgálata
- a6) Térrácsok és rácsos kupolák számítása helyettesítő kontinuummodellek közvetítésével [19], [20], [21]
- a7) Hálók interaktív tervezése
- a8) Magasházak statikai vázainak különleges számítási módszerei [39]
- b1) Lemezek számítása egyszerű differenciámódszerrel, az együtthatómátrixok spektrálfelbontásának alkalmazásával
- b2) Tetszőleges alaprajzú, és tetszőleges kerületi feltételű lemezek számítása egyszerű differenciámódszerrel [50]
- b3) Lemezek számítása összetett peremfeltételek esetén többhely-módszerrel [15]

- b4)* Lemezek számítása a véges elemek módszerével, nagy szabadságfokú véges elemek segítségével
- b5)* Lemezek és lemezművek számítása a véges sávok módszerével [49]
- b6)* Lemezek számítása a nagy véges elemek módszerével [13]
- c1)* Héjszerkezetek számítása differenciamódszerrel [15], [29], [30]
- c2)* Forgáshéjak számítása véges elemekkel [14]
- c3)* Általános elrendezésű héjszerkezetek számítása véges elemekkel [3]
- d1)* Tárcsák számítása izoparametrikus véges elemekkel
- d2)* Tárcsák számítása összetett, illetve elfordulási szabadságfokokat is figyelembe vevő véges elemekkel [31]
- d3)* Sík alakváltozási állapotú, csak nyomásnak ellenálló közegek számítása véges elemekkel.
- d4)* Feszített tartóvégek vizsgálata véges elemekkel modellezett tárcsaként [52], [54]
- d5)* Betonelemekből és acélbetétekből összetett tárcsák számítása a véges elemek módszerével [1]
- d6)* Cölöpök és cölöpcsoportok süllyedésszámítása véges elemekkel [35]
- d7)* Izotróp és anizotróp, nemlineárisan rugalmas közegek vizsgálata véges elemekkel [41]
- d8)* Végtelen félterek állapotának közelítő számítása különböző típusú véges elemekkel
- e1)* A másodrendű merevségi mátrix energetikai meghatározása [37]
- e2)* A szendvics-lemezek stabilitási és lengéstani vizsgálata
- e3)* Változó vastagságú hengerhéjak stabilitási vizsgálata véges elemekkel
- e4)* Hálók alakjának, illetve nagy elmozdulásainak számítása [44], [46]
- e5)* Rúdszerkezetek nagy elmozdulásainak számítása [48]
- e6)* Rúdszerkezetek, illetve lapos héjak stabilitási és posztkritikus állapotának vizsgálata [11], [38], [45]
- f1)* Probléma-orientált nyelvek és fordítóprogramok a tartószerkezetek tervezésében [16]
- f2)* Összetett tartószerkezetek számítására szolgáló komplex programok és programcsomagok célszerű kidolgozásának módszerei [16], [53]

5. A vizsgált időszak néhány tudományos eredménye

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a főbb kutatások néhány eredményét. Ezzel igyekszünk az 1972—1975 évi kutatásokról reprezentatív áttekintést adni.

a) A gyakorlatban leginkább előforduló térrácsok, például a kétrétegű térrácsok számítására a merevség szempontjából egyenértékű kontinuum-

modell született [19], [20], [21]. Ennek metszeterőiből az eredeti térrács rúd-erőit jó közelítéssel vissza lehet számítani. A helyettesítő kontinuum vizsgálata, tekintettel a bonyolult peremfeltételekre, Hermite-féle interpoláción alapuló, numerikus differenciáloperátor meghatározással történt. A számítási eredményeket a térbeli rácsos tartóra vonatkozó program alkalmazásával, elektronikus számológépen is ellenőrizték.

b) A rúdszerkezetek általános elméletéből [43], [47], [48] kiindulva, megoldottak több fontos gyakorlati kérdést (pl. az Ohde-féle ágyazaton nyugvó, ablaknyílásokkal gyengített faltárcsák számítását véges elemekkel), majd energetikai alapon meghatározott kiegészítő merevségi mátrixok [37] felhasználásával, a Newton—Raphson-módszerrel kiépítették a rúdszerkezetek nagy elmozdulásainak hatékony gépi számítását, amellyel azután a szerkezet kritikus [11], [38] és posztkritikus [45] állapotát is vizsgálni lehetett. Ezt alkalmazták keretszerkezetek globális stabilitási vizsgálatára.

c) Lineáris és kvadratikus programozással és az utóbbiakat helyettesítő szigorú és közelítő módszerek segítségével megvizsgálták a rúdszerkezetek törési határállapotát [9], az egyoldalú kényszerekkel kapcsolat, az elasztoplasztikus [9], [18] és a korlátozott kapcsolatú — esetenként a záruló kapcsolatú (merevedő) szerkezetek [17] viselkedését, beleértve például az elasztoplasztikus lemezek számítását véges elemekkel. Az apparátus a szimplex-módszer, a Wolfe-módszer, a komplementer-probléma módszere és a kinematikai terhek módszere [22] volt. Az eredmények segítségével értékelni lehetett egyes előregyártott épületvázak statikai viselkedését.

d) Elméletet és ennek alapján álló numerikus módszert sikerült kiépíteni a térbeli, változó keresztmetszetű rudakból álló keretszerkezetek sajátfrekvenciáinak javítható közrefogására, éspedig a változó együtthatójú differenciáloperátoroknak állandó együtthatójúvá való dekomponálása révén, projektoroperátorokkal, valamint az ortogonális invariánsok Fichera-féle elméletének alkalmazásával [4]. Újabb, paraméteres és paraméter nélküli eljárások születtek a sajátértékek számítására [4], [6]. Számításokból és mérésekből összetett eljárásokat alkalmaztak turbogenerátorok összetett dinamikai rendszereinek elemzésére [5].

e) Eljárást alakítottak ki a cölöpök és cölöpcsoportok süllyedésszámítására a véges elemek módszerével. Az eredmények egyeztek a kísérletek eredményeivel [35].

f) Számítást alakítottak ki a nyílással áttört teherhordó vasbetonfalak erőjátékának követésére, ennek kapcsán sikerült szobaméretű fal-elemek viselkedését tisztázni, és a kapcsolt hevederes rendszerben a repedéseket és képlékeny csuklókat figyelembe venni [7].

g) A vasbeton tárcsák és feszített tartóvégek erőjátékának elemzésére többféle eljárást is sikerült találni, illetve hatékonyá tenni. Az egyik, amely a kihúzóadás problémáját egyszerűbb modellel vizsgálja, a mátrixanalízis

eszközeivel képletszerű megoldást ad az acélbetét és a beton közt átadódó feszültségek eloszlására, a másik, amely a véges elemek módszerén alapul, ezt a kérdést általánosabb elrendezés esetén is megoldja, de nem képletek, hanem egyenletrendszer segítségével [52], [54]. Egyszersmind a vasbeton tárcsa erőjátékát az acélbetéteknek, mint változó húzófeszültségű, és a betonban meglazulható szerkezeti elemeknek figyelembevételével vizsgálja [1].

h) A rúdszerkezetek gyártási pontatlanságából adódó hézagot stochasztikusan változó kinematikai tehernek tekintve meghatározták azt a függvénykapcsolatot, amely a kinematikai teher vektorát igénybevételi vektorrá transzformálja. A mérési adatok sokaságából kiválasztott mintákat közvetlenül, a magasabb momentumaik révén jellemezték és a méretpontatlanságok stochasztikus hatását kevés számú minta esetén is figyelembe tudták venni, alkalmas korrekciókkal [23]–[26].

Valószínűségi elméletet alakítottak ki a határozatlan tartók teherbírásának megállapítására is, a határteherbírási mértékek különböző meghatározása alapján [28].

i) A surlódásmentes érintkezési probléma megoldására eredményesen alkalmazták a Fridmann és Csernyina által javasolt különleges gradiens módszert, majd a kérdést elsőfajú Fredholm-féle integrálegyenletek alakjában is felvetették, a numerikus megoldást a rugalmas rendszer sajátfüggvényei szerint haladó sorok révén keresve [33], [34]. A problémát kvadrátikus programozási kérdés alakjában is megfogalmazták, és mivel héjak meg lemezek érintkezési és más problémái esetében igen eredményes a véges elemek módszere, megkeresték ennek egy hatékony változatát, amely minimálisan 12 szabadságfokú, vékony rugalmas héjelemeket használ [14].

j) Hatékony izoparametrikus véges elemeket dolgoztak ki a síkbeli és a térbeli rugalmasságtani feladatok megoldására. Ezeket anizotróp nemlineárisan rugalmas kontinuumok vizsgálatára is alkalmazták [41], [42], és a feladaton realizálták azokat az elvi megfontolásokat, amelyekkel a véges elemek módszerét elhelyezték a diszkrét eljárások csoportjában [40].

k) Különlegesen hatékony algoritmusokat [15], [50] és programokat dolgoztak ki a differenciámódszert általánosításaira, az ennek kapcsán jelentkező egyenletrendszerek megoldására és az így vizsgálható felületszerkezetek kapcsolt rendszereinek vizsgálatára.

6. Problémák és tennivalók

Az előző pontokból látható, hogy a hazai kutatás 1972 és 1975 között a finit módszerek területén jelentős eredményeket ért el és nemzetközi viszonylatban is megállja a helyét. Érdeklődésének középpontjában a differenciámódszer és a véges elemek módszerének alkalmazásai, meg a sajátérték-számítással megoldható kérdések álltak. Ezek területén több témát sikerült

lezárni, és pedig nemcsak elméletben, de hatékony számítási programok készítésével is.

Néhány ponton a kutatás igen érdekes és korszerű gondolatokat vetett fel, ezek tisztázása még folyamatban van. Megkönnyíti a helyzetet, hogy némelyikkel több kutatóhely is foglalkozik, de nem azonos aspektusból.

a) Napirendre került a tartószerkezetek számítása véletlenszerűen változó hatások esetében. Ha meggondoljuk, hogy a végcél a sok szabadságfokú szerkezetek vizsgálata, mégpedig elvben minden olyan esetben, amelyet determinisztikusan is vizsgálunk, és a legkülönbözőbb eloszlású, ráadásul esetleg kevés adattal jellemzett hatás esetén is, továbbá, hogy az elemzéstől műszaki értékelést és iránymutatást is várunk, akkor nyilvánvaló, hogy az eddigi eredmények még tovább fejleszthetők.

b) Egyre összetettebb feladatokat kell a véges elemek módszerével megvizsgálni. Megindult a munka a vizsgálati funkcionálok összefüggésének, az esetenként célszerű stacionaritási feltételeknek, a terhelés miatt folytonosan változó szerkezeti alakot követő, ún. izoparametrikus véges elemeknek és a konvergencia-feltételeknek vizsgálata irányában. A már elért eredmények jelentősek, de mind elméleti téren, különösen a nemlineáris feladatok megoldó eljárásának konvergenciavizsgálata terén, mind gyakorlati téren, a célszerű alakfüggvények megválasztásában további kutatás szükséges.

c) Kidolgozást nyert a véges elemek módszerének egy olyan változata is, amely az elemeken belül nem biztosítja a kompatibilitást, csak a csatlakozási vonalakon, ugyanakkor túlhatározott algebrai egyenletrendszert eredményez [3].

d) Igen hatékony egyenletrendszer-megoldó eljárások vannak szimmetrikus szalagmátrixokkal jellemzett esetekre, de ez annyira fontos része a gépi számításnak, hogy szüntelen fejlesztést kíván. Hiányos, de különleges elrendezésű együtthatómátrixszal rendelkező egyenletrendszerek megoldására ugyancsak többféle eljárás nyert kidolgozást, a határozatlan törzstartók módszere nyomán [10]. Ez a probléma sem lezárt. Tovább folyik a kutatás olyan feladatokkal kapcsolatban is, amelyek együtthatómátrixait képletszerűen lehet invertálni, vagy ilyenekre lehet visszavezetni [8], [51].

e) A sok szabadságfokú szerkezetek gépi számításának lényeges gyakorlati kérdései a célszerű, lehetőleg automatikus adatgenerálás [53], és a célszerű, minél keskenyebb együtthatószalagokat eredményező csomópontszámozás.

A felsoroltakból látható, hogy a finit módszerek kutatása terén a műszaki mechanika művelőinek fokozottan kell a matematikusokkal együttműködni. Például az a) alatt említett kérdésekhez a valószínűségszámítással és operációkutatással, a b) alattiakhoz a funkcionálműveléssel, az e) alattiakhoz pedig a gráfelmélettel foglalkozó matematikusok tudnak segítséget nyújtani.

Ugyancsak fokozni kell az együttműködést más kutatóhelyekkel és tervezőintézetekkel, amelyek nem közvetlenül a műszaki mechanikával foglalkoznak, de azt alkalmazzák. Ezekről a gyakorlati kérdések felvetésében lehet segítséget kapni. Ilyen igény ösztönzi például az érintkezési feladatok megoldását a fogaskeréktervezésben, vagy a termoelaszticitási kérdéseket a vasbeton elemek előregyártásában.

Másrészt, noha a Bizottság égisze alatt dolgozó kutatóhelyeknek van számítógépi bázisuk, mégis fokozni kellene az együttműködést a számolóközpontokkal, több „terminált” biztosítani a kutatóhelyeknek a nagy számítógépekhez és jobban elősegíteni az eredmények automatikus, rajzi feldolgozását.

Ilyen körülmények között remélhető, hogy a sajátérték-problémákkal, a véges-elemfeladatokkal és a sztochasztikus kérdésekkel az élen a finit módszer minden eddig művelt területén további eredményeket sikerül majd felmutatni.

IRODALOM

1. ALMÁSI J.: Vasbetonszerkezeti elemek vizsgálata a véges elemek módszerével *Építés-Építéstudomány* 6 (1974), 279—323.
2. ÁRVAY, K.: Numerical Solution of the Integral Equation of a Hinged Bridge Structure *Periodica Polytechnica Civ. Eng.* 18 (1974), 3—12.
3. BÉRES E.: Hajlított héjak számítása ÉM. Számológép kiadvány, Budapest 1974
4. BOSZNAY, Á.: Einzelne Probleme der Dynamik zusammengesetzter Systeme *Periodica Polytechnica* 17 (1973), 7—27.
5. BOSZNAY, Á.: Kontinuumnak modellezett rúdszerkezet sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása. Akadémiai doktori értekezés, Budapest 1974
6. CZEGLÉDY, GY.: Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen von Stabwerken. *Periodica Polytechnica* 18 (1974), 191—202.
7. DRASKÓCZY A.: Nyílássorral áttört teherhordozó vasbeton falak számítógépes számítása. „Számítástechnika az építőiparban” konferencia ÉTE kiadvány 1974. II. szekció, 25—33. old.
8. ECSEDI I.: Diszkrét argumentumú függvények alkalmazása prizmatikus rudak, rugalmas, szabad csavarásának elemzésére. *Műszaki Tudomány* 47 (1973), 320—328.
9. FARKAS GY.: Vasbeton rúdszerkezetek képlékenységtani vizsgálata a lineáris programozás módszerével. Egyetemi doktori disszertáció, Budapest 1975.
10. FEKETE S.: Lineáris egyenletrendszerek megoldása vetületekre való bontással. ÉM. Számológép. kiadvány, Budapest 1975.
11. GÁSPÁR, Zs.: Stabilitätsprüfung von Stabkonstruktionen. *Acta Techn. Hung.* 72 (1972), 315—322.
12. GYÖRCYI, J.: Undamped, Free Vibrations of Bar Structures. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.* 18 (1974), 13—22.
13. HEGEDÜS, I.: Analysis of Circular Arc Shaped Deck Bridges by the Method of Large Finite Elements. *Periodica Polytechnica* 18 (1974), 23—37.
14. HERPAI B.: Forgásszimmetrikus héjszerkezetek szilárdsági feladatainak számítása a véges elemek módszerével II. Magyar Mechanikai Konferencia anyaga Miskolc, 1975. szeptember 4—6.
15. HOLNAPY D.: Numerikus algoritmus peremérték-feladatok differenciaoperátorainak meghatározására. *Műszaki Tudomány* 48 (1974), 357—367., *Acta Technica Hung.* 76 (1974), 413—423.
16. HORVÁTH Z.: Genesys (ismertetés) ÉM. Számológép kiadvány
17. KALISZKY S.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek vizsgálata *Építés-Építéstudomány* 6 (1974), 325—340.

18. KALISZKY S.—KURUTZNÉ KOVÁCS M.—NÉDLI P.: Képlékenységtani feladatok közelítő és numerikus megoldásai MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Munkaközösség Tudományos Ülésszaka. Budapest, 1974, 107—117.
19. KOLLÁR L.: Kétrétegű, alaprajzban átlós-négyzetes térrácsok számítása a kontinuum-módszerrel. *Műszaki Tudomány* 46 (1973), 179—196.
20. KOLLÁR L.: Különböző merevséggel bíró alsó—felső övsíkú, kétrétegű térrácsok számítása a kontinuum-módszerrel *Műszaki Tudomány* 47 (1973), 226—236.
21. KOLLÁR L.—HEGEDÜS I.: Kétrétegű, általános háromszög hálózatú rácsszerkezet megoldása folytonos számítási modellel. *Műszaki Tudomány* 46 (1973), 53—70
22. KURUTZNÉ, KOVÁCS, M.: Analysis of Plastic Load Capacity of Plane Frameworks by Kinematic Loading. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.* 18 (1974), 71—82.
23. MICHELBERGER, P.: Berechnung der durch die Fertigungsungenauigkeiten des Fahrgestell hervorgerufenen Montagespannungen mit Hilfe des Matrizen-Kraftgössenverfahrens. *Acta Techn. Hung.* 73 (1972) 335—347.
24. MICHELBERGER, P.: Auswirkung der Fertigungs- und Montierungsungenauigkeiten auf die Beanspruchung der Stabkonstruktionen. *Acta Techn. Hung.* 75 (1973), 301—308.
25. MICHELBERGER, P.—KERESZTES, A.: The Estimation of Stresses due to Production Inaccuracies by Mans of Higher Order Moments. *Acta Techn. Hung.* 79 (1974), 63—72.
26. MICHELBERGER P.—KERESZTES A.: Véletlen méretpontatlanságokból keletkező igénybevétel számítása rudakkal modellezhető gépszerkezeteknél *Gép* 76 (1974), 299—304.
27. MICHELBERGER P.—ÁGOSTON A.—UJHELYI Z.: Járműkocsiszekrények dinamikai méretezése *Periodica Polytechnica* — Sajtó alatt.
28. MISTÉTH E.: Plasztikus anyagú határozatlan tartók teherbírása a valószínűségelmélet alkalmazásával. II. Magyar Mechanikai Konferencia anyaga, Miskolc 1975, szeptember 4—6.
29. NAGY, T.: Computer Analysis of Orthotropic Shallow Shells. *Periodica Polytechnica.* 18. (1974), 83—94.
30. NAGY T.: A geometriai nemlinearitás hatása lapos elliptikus paraboloidhéj vizsgálatokor. *Műszaki Tudomány* 49 (1974), 218—227.
31. NAGY, T.: Incomplete Displacement Funktion for Deriving Stiffness Matrix. *Periodica Polytechnica* 18 (1974), 179—187.
32. PÁCZELT I.: A gépészetben, építészetben felmerülő érintkezési feladatok egy közelítő megoldása *Borsodi Műszaki és Ipargazdasági Élet* (1972), No. 4, 25—28.
33. PÁCZELT, I.: Iteracionnij metod dlja resenyija kontaktnoj zadacsi uprugih szisztem sz odnosztoronnimi szvjazjami, *Acta Techn. Hung.* 76 (1974), 217—241.
34. PÁCZELT I.: Rugalmas érintkezési feladatok tárgyalása a testek hatásfüggvényének, rezgéseképének ismeretében. *Építés-Építésztudomány* 6 (1974), 241—260.
35. PETRASOVITS, G.: Settlement Analysis of Driven Piles *Acta Techn. Hung.* 80(1975), 343—351.
36. POPPER, GY.—GÁSPÁR, Zs.: A Numerical Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Damped Vibrations. *Periodica Polytechnica. Civ. Eng.* 18 (1974), 103—107.
37. ROLLER B.—GÁSPÁR Zs.: A véges szabadságfokú szerkezetek másodrendű elméletének néhány kérdéséről. *Építés-Építésztudomány* 4 (1973) 373—394.
38. ROLLER, B.—GÁSPÁR, Zs.: Generalization of the Stability Analysis of Elastic Systems. *Periodica Polytechnica* 18 (1974), 109—119.
39. ROLLER B.—KURUTZNÉ KOVÁCS M.—SZENTIVÁNYI B.: Süllyedő alátámasztású magasépítmények gépesített számításának módszerei: *Építés-Építésztudomány* 6 (1974), 215—240.
40. SCHARLE P.: A mozaikmódszer mérnöki és matematikai értelmezésének kialakulása és kapcsolatai. *Építés-Építésztudomány* VI. kötet 3—4. sz. 6 (1974), 261—278.
41. SCHARLE P.: Rugalmas állapotú talajmező feszültségi és alakváltozási állapotának számítása véges-elem módszerrel SZÁMGÉP 1975.
42. SCHARLE P.: Építőmérnöki Kontinuumfeladatok numerikus vizsgálatának néhány kérdése Kandidátusi értekezés, 1975.
43. SZABÓ, J.: The Equation of State-change of Structures. *Periodica Polytechnica, Civ. Eng.* 17 (1973), 55—71.
44. SZABÓ, J.—BERÉNYI, M.: Theorie und Praxis der Berechnung von Seilkonstruktionen. *IVBH.* Band 33—II. (1973), 193—208.
45. SZABÓ, J.—GÁSPÁR, Zs.: Überkritischer Verhalten der Stabkonstruktionen *IVBH Kongress.* Amsterdam, May 8—13, 1972. Vorbericht. 69—77.
46. SZABÓ, J.—GÁSPÁR, Zs.: Berechnung des auf Randkabel gespannten rechtwinkligen Seilnetzes. *Acta Techn. Hung.* 77 (1974), 365—384.
47. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: The General Matrix Differential Equation of the Skeletal Frames

- Előadás: „International symposium on Computer-aided structural design”, Coventry 1972.
48. SZABÓ, J.—RÓZSA, P.: Große Verschiebungen von Stabkonstruktionen. *Acta Techn. Hung.* 73 (1972), 53—60.
49. SZILÁGYI, GY.: Quelques applications de la methode des bandes finies. *IVBH Band 34—II.* (1974), 149—168.
50. SZÓTS M.—VARGA G.: Lineáris parciális differenciál egyenletrendszer számítása majdnem szabályos hálózat felett. *ÉM. Számgép kiadvány*, Budapest 1974.
51. TASSI G.: Két kapcsolt elemből álló rúd egydimenziós számítási modelljének vizsgálata. *BME Építőmérnöki Kar Építőanyagok Tanszék Tudományos közlemények* 21. Beton és vasbeton. *KÖZDOK* 1975, 141—188.
52. TASSI, G.—WINDISCH A.: Analysis and Model Testing of the Anchorage Zone of Post-tensioned Peame *FIP. VII. Congress.* New York 1974. *ÉTI Bulletin* 12. szám, 27—35.
53. VÁSÁRHELYI P.: Rendező programok alkalmazása statikai számítások adatkezelésében *ÉM. Számgép kiadvány (CIBW52 Symposium by Correspondences Computer Languages in Building, Budapest 1975.*
54. WINDISCH, A.—KISBÁN, S.: A Two Dimensional Investigation of the Distribution of Stresses in the End-blocks of Prestressed Concrete Beams. *FIP VII. Congress, New York 1974. ÉTI Bulletin* 12. szám, 36—49.

Hungarian Engineering-Mechanical Investigation in the Field of Discrete Methods.

The discrete methods of engineering mechanics are grouped according to the model-building, problems concerned with mathematical methods and mechanics. The main results of the Hungarian research work carried out in the plan period 1972 to 1975 are evaluated, the problems of posed development and the formulation of the subsequent problems to be solved by domestic engineering-mechanical research work using computers endeavoured.

Ungarische ingenieurmechanische Forschungen auf dem Gebiet der Finiten Methoden.

Die finiten Methoden der Ingenieurmechanik werden nach den Problemen des Modellbaus, der mathematischen Methoden und der Mechanik gruppiert. Die wichtigsten Ergebnisse der in den Jahren 1972 bis 1975 durchgeführten heimischen Forschungen werden ausgewertet, die entwickelten Probleme angeführt und die an die Reihe kommenden und unter Anwendung von Rechenanlagen durchzuführenden heimischen ingenieurmechanischen Forschungsaufgaben aufgezählt.