HAZAI VIZSGÁLATOK A VÉGES CSOPORTOK ELMÉLETÉBEN

RÉDEI LÁSZLÓ r. tag

Előadta az 1955. május 26-án tartott nyilvános osztályülésen

Az Akadémia III. Osztályának vezetőségétől nyert megtisztelő megbízás alapján be fogok számolni a véges csoportok elméletébe vágó újabb hazai vizsgálatokról. FUCHS LÁSZLÓnak a végtelen csoportokat illető, egyébként hasonló célzatú előadása és saját előadásom együttesen hivatva lesznek képet adni a hazai összes csoportelméleti kutatások állásáról.

Hadd szenteljek néhány szót SZELE TIBOR elhunyt kiváló tudósunk emlékének, akit a hirtelen halál nemrég ragadott el tőlünk tudományos életünknek rendkívüli kárára s az algebra művelőinek mélységes bánatára. Pótolhatatlan az az űr, amelyet SZELE TIBOR az élők sorából történt váratlan eltávozásával hátrahagyott s vígasztalan a fájdalom, amelyet elvesztése miatt barátai és munkatársai éreznek. Ő volt algebrai tudományunk egyik fő értéke, s mert fiatal élete derékban tört ketté, lemérni sem tudjuk a veszteség nagyságát, hogy alkotó tevékenysége ily korán megszakadt. Emlékezésünk tovább kiséri őt s üstökösszerű pályája tudományos életünk egét örökké bevilágítja.

A csoportelméletnek a véges és végtelen csoportokat illető részei közül az előbbinek a művelése jóval korábban indult meg s így sokkal teljesebb kiépitettségnek örvend, mégis főleg az utóbbi évtizedekben a végtelen csoportok elmélete egyre inkább behozza eddigi hátrányát, úgyhogy ma már szinte az elválasztó határok leomlását tapasztaljuk. Az egybeolvadás mértékéről képet ad A. G. KUROS kitűnő Csoportelmélet c. könyve, amely egyetemesen kiterjeszkedik az egész csoportelméletre, s e tekintetben úttörő jellegű. Feltűnő jellegzetessége a könyvnek, hogy nincs benne külön a véges csoportokról szóló fejezet, amivel a szerző mintegy a jövő fejlődési irányát is kitűzi a véges és végtelen csoportok elméletének további egységesítése felé. Míg egyrészt e folyamat erőteljes megindulása igen örvendetes, másrészt kétségtelen, hogy ennek dacára a részletvizsgálatokban továbbra is megmarad a véges csoportok elméletének bizonyos fokú különállása.

Hazai csoportelméleti vizsgálatainkban meglehetősen éles a véges és végtelen csoportokra való elkülönülés. A legtöbb vizsgálat ugyanis olyan, hogy vagy csak a véges csoportokról szól, vagy érvényes ugyan az összes csoportokra, de a véges esetre vonatkozólag régen ismert vagy triviális eredményt nyújt. Mindamellett vannak olyan csoportelméleti kutatási eredményeink is, amelyek a véges és végtelen csoportokat illetően egyformán érdekesek. FUCHS LÁSZLÓval a vitás esetek kiküszöbölése céljából abban egyeztünk meg, hogy ő azokat a vizsgálatokat fogja ismertetni, amelyek kifejezetten a végtelen csoportokra vonatkoznak abban az értelemben, hogy bennük éppen a csoport végtelen volta döntő, nekem jut a többi csoportelméleti vizsgálat ismertetése.

Könnyítés céljából ezután „csoporton" a véges csoportokat fogom érteni. Általában nem fogom külön megjegyezni azokat az eseteket, amelyekben a végtelen csoportokra is érvényes kutatásokról lesz szó, mert ez a legtöbb esetben a vizsgálat természetéből magától is kiviláglik. Egyes esetekben a végtelen csoportokra is szóló érvényességre fel fogom hívni a figyelmet.

Mintegy az utolsó tizenöt év vizsgálatairól fogok beszámolni, amelyek közel 50 dolgozatban láttak napvilágot. A kutatások általában komoly érdekességű kérdésekről szóltak, egy részük kiemelkedő eredménnyel zárult. A kutatásokat FARAGÓ TIBOR, FUCHS LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY, POLLÁK GYÖRGY, STEINFELD OTTÓ, SZÁSZ GÁBOR, SZELE TIBOR, SZÉLPÁL ISTVÁN, SZENDREI JÁNOS, SZÉP JENŐ és referens végezték. Az egyes kutatások ismertetésénél többször röviden meg fogok említeni olyan külföldi kutatásokat is, amelyek azokat folytatták.

A vizsgálatoknák nagyobb s egyben legfontosabb része a csoportok faktorizációját illető kérdésekkel foglalkozott, a többi vizsgálat igen változatos kérdésekkel. Mint hiányosságot jegyzem meg, hogy ábrázoláselméleti kutatások nem történtek.

A faktorizációs vizsgálatok két élesen elkülönült problémát tárgyaltak. E problémák egyike az Abel-csoportoknak komplexusok szorzatára való felbontását illeti, a másik a ferde csoportoknak főleg két, kisebb részben több részcsoport szorzatára való faktorizációit. E két problémakör közül az első teljesen magyar eredetű, igen nagy részben a második is. Mégpedig az Abel-csoportok faktorizációját illető vizsgálatok HAJÓS GYÖRGY nevéhez fűződnek, a ferde csoportokra vonatkozó újszerű vizsgálatokat SZÉP JENŐ indította meg. Mindkét problémakörbe számos további kutató is belekapcsolódott.

Mielőtt a részletes ismertetésre térnék, előrebocsátok néhány jelölést és definíciót.

Egy H véges halmaz elemeinek a számát (H)-val jelöljük. G jelöljön egy adott csoportot. Eszerint (G) a G rendje. Az α csoportelem rendjét $o(\alpha)$-val jelöljük. Egy $G=A_1\dots A_n$ $(A_1,\dots,A_n\subseteq G)$ egyenletet a G faktorizációjának nevezünk, ha G minden eleme egyértelműen $\alpha_1\dots\alpha_n$ alakban írható $(\alpha_i\in A_i, i=1,\dots,n)$. Ha egyértelműséget nem követelünk meg, akkor tágabb értelmű faktorizációról beszélünk. p jelentsen prímszámot.

a) Az Abel-csoportok faktorizációjának vizsgálata

Míg mást nem mondunk, jelöljön G Abel-csoportot. Szimplexnek nevezünk minden olyan komplexust, amelynek elemei $\alpha^0(=\varepsilon), \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{e-1}$ $(o(\alpha) \geqq e \geqq 2)$. Ez a szimplex nyilván akkor és csak akkor csoport (G-nek részcsoportja), ha $o(\alpha) = e$.

Emlékeztetek MINKOWSKI alapvető tételére, amely szerint a

$$-1 \leqq a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ |a_{ik}| = \pm 1)$$

valós együtthatós egyenlőtlenségrendszernek van nem-triviális megoldása, s arra az ezzel kapcsolatos, hosszú ideig bizonyítás nélkül maradt sejtésére, hogy tétele „$\leqq$" helyett „$<$"-vel is igaz, ha egyik egyenlőtlenség sem egész együtthatós. Számos kutató sikertelen fáradozása után HAJÓS 1938-ban bebizonyította, hogy a sejtés az alábbi tétellel ekvivalens, s 1941-ben e tételét is bebizonyította. Ez a nevezetes HAJÓS-féle tétel így szól: A G Abel-csoport szimplex tényezőkre való faktorizációjában legalább egyik tényező szükségképpen csoport.

E tétel nemcsak fenti kapcsolata folytán, hanem a csoportelméleten belül is rendkívüli jelentőségű, s külön érdekessége, hogy látszólagos könnyűségével ellentétben bizonyítása váratlanul nehéz. Főleg feltűnő, hogy a bizonyítás céljára az Abel-csoportok alaptétele mindeddig hatástalannak bizonyult, s így HAJÓS tétele mintegy megfosztotta az alaptételt eddigi túlzott tekintélyétől. A tétel sok további vizsgálatot is megindított, amelyekről alább több ízben szó lesz.

Igen érdekes a tétel bizonyítása, amelyet HAJÓS az egész számok gyűrűje fölött képezett $I(G)$ csoportgyűrűben végzett el, leglényegesebb része az $I(G)$-ben egy finom zérusosztóvizsgálat. Kecsegtető gondolat ezt a vizsgálatot az I alaptartományról egy felbontási testre való áttéréssel könnyebbé tenni, de ez út nem bizonyult járhatónak.

HAJÓS bizonyítását referens, majd újabb lényeges lépéssel SZELE egyszerűsítette.

Referens újabban HAJÓS tételére második bizonyítást nyert, amely p-csoportok esetére meglepően egyszerű, de a bizonyításnak az általános esetre való kiterjesztése nehézkes. A p-csoportokról szóló rész bizonyítása a következő önmagában is érdekes tételen nyugszik. Ha a G Abel-csoport rendje p^n s az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(\in G)$ elemek G-t generálják, továbbá közülük bármely k számú elem legalább p^k rendű részcsoportot generál $(1 \leqq k \leqq n-1)$, akkor az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elemeket alkalmas hatványra emelve, majd e hatványokat alkalmas sorrendben írva, olyan $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sorozat áll elő, hogy az első k tag által generált csoport rendje éppen p^k $(1 \leqq k \leqq n)$. E könnyen bizonyítható tételből az $I(G)$ gyűrű felhasználásával korolláriumként nyerhető HAJÓS tételének a p-csoportokat illető része. SZELE TIBOR hívta fel referens figyelmét az $I(G)$ mellőzésére, ami valóban lehetséges, de csak az egyszerűség rovására.

HAJÓS tételének más úton való bizonyítási kísérlete referenst bizonyos újtípusú zéta-függvények felfedezésére vezette, amelyek ugyan szoros kapcsolatban állnak a tétellel, de ennek várt újabb bizonyítását eddig nem eredményezték, viszont önmagukban becses újszerű tényeket szolgáltattak (lásd *c)* alatt). FÁRY ISTVÁN HAJÓS tételét a topologikus csoportok elméletében alkalmazta. SZELE sejtése szerint HAJÓS tétele a végtelen Abel-féle torziócsoportokra is igaz, s e sejtést bizonyos speciális esetekben bebizonyította.

A MINKOWSKI-féle sejtés geometriai alakja tudvalevően kimondja, hogy az n-dimenziós euklideszi térnek úgynevezett kockaráccsal való minden egyszerű lefedése oszlopozott (azaz tartalmaz teljes lappal illeszkedő kockákat). FURTWÄNGLER sejtése szerint hasonló volna érvényes a „k-szorosan térfedő kockarácsokra", azonban HAJÓS ezt a sejtést ugyancsak csoportelméleti úton megcáfolta. Egyrészt ugyanis példa megszerkesztésével bebizonyította a következőt: Ha a G Abel-csoportnak szimplexekre való $G = S_1 \ldots S_n$ tágabb értelmű faktorizációja olyan, hogy G minden eleme pontosan k-szor áll elő $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ alakban ($\sigma_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$), akkor ebből ($k > 1$ esetén) nem következik, hogy $S_1, \ldots, S_n$ valamelyike csoport. Másrészt kimutatta HAJÓS, hogy e negatívum egyértelmű FURTWÄNGLER sejtésének téves voltával. Érdekes történeti adat, hogy FURTWÄNGLER sejtése is MINKOWSKI sejtésének bizonyítását célozta, s az elmondottak megmagyarázzák, hogy ez az út miért volt járhatatlan.

HAJÓS a MINKOWSKI-sejtésnek egy KELLERtől származó élesítését is csoportelméletileg átfogalmazta, de a KELLER-féle sejtés kivizsgálása eddig nem történt meg.

Szintén HAJÓStól való annak a kérdésnek a felvetése, hogy a ciklikus csoport faktorizációja esetén vajon akkor is fellép-e csoporttényező, ha a tényezők számára most már nemcsak szimplexeket, hanem bármilyen komplexusokat megengedünk. HAJÓS érdekes geometriai meggondolással bebizonyította, hogy a felelet a p^e rendű csoportok esetén igenlő, a többi rendszám esetén tagadó, kivéve a $p^e q^f, p^e qr, pqrs$ alakú rendszámokat (p, q, r, s különböző prímszámok; $e, f \geqq 1$). A megmaradt kétes esetek közül a pq, pqr rendszámok esetére referens igenlő választ nyert viszonylag fáradságos úton. A még fennmaradt eseteknek egy részét BRUIJN két dolgozatában elintézte, s így jelenleg már csak a $p^2q^2, p^2qr, pqrs$ esetek kétesek.

A HAJÓS-féle problémakör termékeny voltának további érdekes adatát szolgáltatja referensnek egyik dolgozata, amelyben bebizonyítja, hogy a p^2 rendű nemciklikus Abel-csoportnak csak olyan kéttényezős faktorizációja van, amelyben az egyik tényező csoport. A bizonyítás meglepően nehéz, s több önmagában érdekes megállapítást tartalmaz. Ilyen a következő: A $p(\neq 2)$ karakterisztikájú prímtest fölött az $f(x) = x^{p-1} + \gamma x^{\frac{p-1}{2}} + \cdots$ alakú (hézagos) polinomok közül csakis az

$$f(x) = x^{\frac{p-1}{2}i}\left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^k\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)^l \qquad (i + k + l = 2)$$

polinomok esnek szét csupa lineáris tényező szorzatára. Egyéb mellékeredményként kiderülnek a GAUSS-féle összegeknek bizonyos (oszthatóságbeli) maximáltulajdonságai.

BRUIJN a legtöbb további nem-ciklikus Abel-csoportról kimutatta, hogy van olyan faktorizációjuk, amelyben egyik tényező sem csoport, s ugyancsak talált olyan esetet, amikor ez nem lehetséges, végül bizonyos esetek még kétesek maradtak.

b) A ferde csoportok faktorizációinak vizsgálata

Az alábbiakban jelöljön G ferde csoportot. (Az Abel-csoportokat nem kell kizárnunk, de mondanivalóink erre az esetre nem érdekesek.) A G-nek faktorizációi és tágabb értelmű faktorizációi közül most csak olyanokat tekintünk, amelyekben mindegyik tényező csoport. Legtöbb esetben a tényezők száma kettő lesz.

Tekintsünk egy

$$G = AB$$

faktorizációt. Minthogy ebből $G = BA$ következik, azért G minden eleme egyértelműen ab, valamint $b'a'$ alakban írható ($a, a' \in A$; $b, b' \in B$). Minthogy eszerint az $ab = b'a'$ egyenletnek adott a, b esetén egyetlen a', b' pár tesz eleget, azért minden b-hez tartozik A-nak egy önmagába való $a \rightarrow a'$ leképezése. Ez a leképezés nyilván A-nak permutációja, amelyet π_b-vel jelölünk, s ezek egy Π_B csoportot alkotnak. Hasonlóan definiálhatunk egy Π_A permutációcsoportot, amely B-nek bizonyos permutációiból áll.

SZÉP a $G = AB$ faktorizációkat főleg a Π_B, Π_A permutációcsoportokon keresztül vizsgálja. 1949-ben megjelent első idevágó dolgozatában mindenekelőtt megállapítja a

$$B \sim \Pi_B \qquad (b \rightarrow \pi_b)$$

homomorfizmust, s hogy e homomorfizmus magja G-nek B-ben foglalt normálosztói közül a maximális. (Ez a végtelen csoportokra is igaz.) Alkalmazásként nyeri többek között a következő tételt: Ha B-nek van (A)-nál magasabb rendű prímszámhatványrendű eleme, akkor G nem egyszerű, s A tartalmazza G-nek olyan normálosztóját, amelynek rendje p-vel osztható.

SZÉP a $G = AB$ faktorizációt félig automorf összetételűnek nevezi, ha a π_b permutációk A-nak automorfizmusai, s automorf összetételűnek, ha hasonló teljesül A, B helyett a B, A párra is. Bebizonyítja, hogy az egyszerű csoportoknak nincs félig automorf összetételű faktorizációja.

SZÉP egy további vizsgálatában megállapítja, hogy ha egy $G = AB$ faktorizációban $((A), (B)) = 1$, akkor G-nek minden normálosztója $A'B'$ alakú, ahol A' az A-nak, B' a B-nek részcsoportja. Korolláriumként következik, hogy ha az előbbi feltevésen kívül A, B egyszerűek, akkor G is egyszerű.

SZÉPnek referenssel közösen írt egyik dolgozatában szerepel a következő tétele: Ha érvényes egy $G = AB$ tágabb értelmű faktorizáció s az $A \cap B$ metszet tartalmazza A-nak (vagy B-nek) egy valódi normálosztóját, akkor G nem egyszerű. Ebből speciális esetként adódik, hogy ha $G = AB, A \cap B \neq 1$ és A (vagy B) Abel-féle, akkor G nem egyszerű. Ezeket a tételeket más úton már korábban ORE is nyerte.

BURNSIDE ismert tétele szerint minden olyan csoport feloldható, amelynek rendje csupán két különböző prímszámmal osztható. Ez úgy is mondható, hogy ha a $G = AB$ faktorizációban A p-csoport, B q-csoport (p, q különböző prímszámok), akkor G feloldható. Ennek fontos és úttörő jelentőségű analogonja SZÉPnek következő tétele: Ha a $G = AB$ tágabb értelmű faktorizációban A, B Abel-csoportok, akkor G nem egyszerű, s ha emellett még $((A), (B)) = 1$ is teljesül (tehát „szűkebb értelmű" faktorizációról van szó), akkor G feloldható, sőt akkor is, ha A, B közül csak az egyik Abel-féle, a másik p-csoport. Továbbá ha a $G = AB$ tágabb értelmű faktorizációban a tényezőknek van centruma s az egyik tényező p-csoport, akkor G nem egyszerű.

E tételek közül főleg a feloldható csoportokra vonatkozó esetek jelentősek, azokat többen általánosították. Így pl. ITÔ SZÉP eredményeinek felhasználásával nyerte, hogy ha egy $G = AB$ tágabb értelmű faktorizációban a tényezők egyike Abel-féle, másika nilpotens, akkor G feloldható. Hasonlót nyert GRUENBERG arra az esetre, amikor a tényezők egyike p-csoport, másika nilpotens. Egyes speciális esetekben ITÔ és HUPPERT hasonló eredményt nyertek nem nilpotens (feloldható) A, B tényezőkre vonatkozóan. Például ITÔ szerint ha a $G = AB$ tágabb értelmű faktorizációban a tényezők diedercsoportok, akkor G feloldható. Bizonyítatlan sejtés, hogy ehhez elegendő, ha a tényezők nilpotensek. WIELANDT a $G = A_1 \dots A_n$ többtényezős tágabb értelmű faktorizációról kimutatta, hogy ha ebben a tényezők páronként felcserélhető nilpotens csoportok és bármely kettőnek szorzata feloldható, akkor G is feloldható.

SZÉP egy további vizsgálatában bebizonyítja, hogy ha a $G = AB$ faktorizációban $((A), (B)) = 1$ és A, B maximális részcsoportok, egyik sem prímszámrendű, akkor G nem egyszerű. Hasonló eredményt nyer még a $G = AB$ tágabb értelmű faktorizációról is, ha A Abel-féle, B-nek van centruma és $(A) \geqq (B)$.

Végül SZÉPnek a $G = AB$ faktorizációról nyert tételei között igen nevezetes, hogy a G centrumelemeit ab ($a \in A$, $b \in B$) alakban írva, az ezekben szereplő összes a, b tényezők Abel-csoportot generálnak. Ebből folyik az érdekes korollárium, hogy ha G centruma Z és létezik olyan $G = AB$ faktorizáció, amelyben A, B centrummentesek, akkor (Z) négyzete kisebb mint (G).

A csoport faktorizációinak elméletébe tartozik még a REMAK-féle felbontásnak következő általánosítása. SZÉP egy $G = N_1 \dots N_n$ tágabb értelmű faktorizációt G normális felbontásának nevez, ha mindegyik N_i normálosztó, egyik sem törölhető, s egyik sem bontható fel két valódi normálosztójának szorzatára. SZÉP és referens a normális felbontásokról bebizonyitanak egy tételt, amely felhasználja a KRULL—SCHMIDT-féle tételt, s ennek általánosítását nyújtja.

Szintén a csoport faktorizációinak problémakörébe tartozik, hogy G. ZAPPA még SZÉP előtt megoldotta a csoport faktorizációjának úgynevezett inverz problémáját, amelyről közelebbit az itt következőkben mondok.

c) Egyéb vizsgálatok

Legyen G, Γ két adott csoport. Tudvalevően a SCHREIER által megoldott bővítési probléma azoknak a $\mathfrak{G}$ csoportoknak meghatározásáról szól, amelyeknek alkalmas Γ^* részcsoportjára a

$$\mathfrak{G}/\Gamma^* \approx G, \qquad \Gamma^* \approx \Gamma$$

izomorfizmusok teljesülnek (persze kell, hogy Γ^* a $\mathfrak{G}$-nek normálosztója legyen). Ezzel analóg a ZAPPA által megoldott bővítési probléma, amely ugyanis a

$$\mathfrak{G} = G^*\Gamma^*, G^* \cap \Gamma^* = 1, G^* \approx G, \Gamma^* \approx \Gamma$$

feltételek teljesülését kívánja. Referens elvégezte a SCHREIER- és ZAPPA-féle csoportbővítések szintézisét a következő módon.

Jelöljék G, Γ elemeit latin illetve görög kisbetűk, speciálisan az egységelemet e illetve ε. Az (a, α) elempárok halmazában

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha \beta^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$$

által definiálunk egy szorzást, ahol $b^\alpha, \beta^\alpha, a^b, \alpha^b$ kétváltozós függvények, alávetve a

$$b^\alpha, \beta^\alpha \in G, a^b, \alpha^b \in \Gamma, \varepsilon^\alpha = e, e^\alpha = \varepsilon$$

feltételeknek. Ezáltal egy $G \circ \Gamma$ (nem szükségképpen asszociatív) multiplikatív struktúra áll elő. Az ilyen és hasonló jellegű konstrukciók lényegében véve HAMILTONtól erednek. Ezeket referens röviden ferdeszorzatoknak nevezi. Megállapította annak szükséges és elegendő feltételét, hogy a G, Γ csoportoknak fenti $G \circ \Gamma$ ferdeszorzata maga is csoport legyen, továbbá kimutatta, hogy a

$$b^\alpha = b, \ \beta^\alpha = e \quad \text{illetve} \quad \beta^\alpha = e, \ a^b = \varepsilon$$

speciális eset éppen a G, Γ csoportokhoz tartozó SCHREIER-féle illetve ZAPPA-féle bővítéseket szolgáltatja. Ezekben az esetekben tehát a szorzás szabálya így szól:

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta) \quad \text{illetve} \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, \alpha^b \beta).$$

Az utóbbi bizonyos formális előnnyel jár a csoport faktorizációinak vizsgalatában, amit referens felhasznált a fenti SZÉP-féle tételek egy részének levezetésére, miközben kevés általánosítás is előállt.

KOCHENDÖRFFER kimutatta, hogy bizonyos további speciális esetek is visszavezethetők a mondott két esetre.

FUCHS elvégezte a $G \circ \Gamma$ ferdeszorzatnak operátorcsoportokra való általánosítását.

A. STÖHR és referens megvizsgálták az

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta} b, \alpha^{b} \beta)$$

analóg esetet. Kiderült, hogy ez a ZAPPA-féle bővítésnek az a speciális esete, amelyet SZÉP automorf összetételűnek nevezett (l. fent).

Referens a SCHREIER-féle csoportbővítést általánosította arra az esetre, amikor G egységelemes félcsoport. Ez az általánosítás nem jár újabb bonyodalommal.

STEINFELD és referens közös dolgozatukban meghatározták a kölcsönös SCHREIER-féle bővítéseket, azaz azokat a $\mathfrak{G}$ csoportokat, amelyekre

$$\mathfrak{G}/\Gamma^* \approx G, \quad \mathfrak{G}/G^* \approx \Gamma, \quad G^* \approx G, \quad \Gamma^* \approx \Gamma.$$

(Ebből a $G^* \cap \Gamma^* = 1$ eset triviális, mert akkor $\mathfrak{G}$ a G, Γ csoportok direkt szorzata.)

Referens a csoport holomorfjának és a karakterisztikus részcsoportnak fogalmát átültette a gyűrűelméletbe. Ezt követően SZENDREI egységes definíciót adott a holomorf fogalmára, amely csoportokra és gyűrűkre, sőt egyéb struktúrákra is vonatkozik.

SZÉP és referens egy megjelenés előtt álló dolgozatukban általánosították a ZAPPA-féle bővítést, amely általánosítás abban áll, hogy fenti $\mathfrak{G} = G^* \Gamma^*$ tágabb értelmű faktorizáció is lehet. Ebből azt az esetet, amikor $G^* \cap \Gamma^*$ $\mathfrak{G}$-nek normálosztója, már korábban G. CASADIO elintézte.

A SCHREIER-féle csoportbővítés keretében referens meghatározta az elsőfokban nemkommutatív csoportokat, így nevezve azokat a nemkommutatív csoportokat, amelyeknek minden valódi részcsoportja kommutatív. Ezek p-csoportok vagy p-csoportnak q-csoporttal való széteső SCHREIER-féle bővítései. Már MILLER és MORENO is vizsgálták ezeket, majd O. J. SCHMIDT általánosabban az első fokban nem-nilpotens csoportokat, de a nevezett két típus közül az utóbbi, érdekesebb eset nem volt teljesen kivizsgálva. Ezek a véges testek segítségével nyernek egyszerű leírást. (Elsőfokban nemkommutatív végtelen csoportok létezéséről mindmáig mitsem tudunk.)

Egyszerű alkalmazásként referens megállapította, hogy bizonyos rendszámok esetén egy csoport Sylow-csoportjainak kommutativitásából hasonló az adott csoportra is következik, s megadta azokat a rendszámokat, amelyekhez csak kommutatív csoport tartozik. E tételek SZÉP korábbi tételeinek általánosításai. SZELE megállapította, hogy egy rendszámhoz akkor és csak akkor tartozik csupán egy csoport (ez ciklikus), ha $(n, \varphi(n)) = 1$.

Referens vizsgálta a másodfokban nemkommutatív egyszerű csoportokat s azt nyerte, hogy páros rendszám esetén csak az ikozaédercsoport lehetséges. („Másodfokban nemkommutatív" azt jelenti, hogy a maximális részcsoportok között előfordul nemkommutatív, de ezek maximális részcsoportjai kommutatívok.) E tétel alapján ITÔ bizonyos elégséges feltételt adott a feloldható csoportok számára, amelyet ITÔ és SZÉP megjelenés előtt álló közös dolgozatukban általánosítottak.

I. A. GOLFAND és referens egymástól függetlenül meghatározták az elsőfokban nem-nilpotens csoportokat. Utóbbinak eredménye valamivel teljesebb, erről szóló dolgozata nyomás előtt áll.

Egy G csoportot n-edfokban nemkommutatívnak nevezünk, ha minden $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n$ részcsoport-láncban G_n kommutatív, de G_{n-1} nem mindegyikben kommutatív. SZÉLPÁL bebizonyította, hogy e csoportok rendjének minimuma $3 \cdot 2^n$.

FUCHS egy igen jelentős dolgozatában mintegy a SCHREIER-féle csoportbővítés analógiájára célul tűzi ki (véges vagy végtelen) struktúrák szubdirekt összegeinek vagy szorzatainak az adott struktúrák („komponensek") belső tulajdonságai által való leírását, amely explicitebb eljárást nyújt a szubdirekt összegek meghatározására, mint ezeknek Birkhoff-féle jellemzése. Eljárása csoportokon kívül gyűrűkre (algebrákra) és BOOLE-féle algebrákra is alkalmas. Többek között azt nyeri, hogy ha vesszük két adott A, B csoportnak egy-egy A_0, B_0 normális részcsoportját, úgy hogy $A/A_0 \approx B/B_0$, s mindjárt veszünk még a faktorcsoportok között egy megfelelő izomorfizmust, végül képezzük az összes olyan (a, b) párokat $(a \in A, b \in B)$, amelyekben a, b összetartozó osztályokba tartoznak, akkor e párok az A, B csoportoknak egyik szubdirekt szorzatát alkotják s fordítva, ezen az úton mindegyik szubdirekt szorzat előáll. FUCHS e vizsgálatait G. PICKERT kvázicsoportokra általánosította.

Referens kimutatta, hogy ha $a_1, \ldots, a_n$ egy $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ p-csoportnak minimális generátorrendszere, akkor a $G = \{a_1, \ldots, a_n, a_1^p, \ldots, a_n^p\}$ egyenlet jobboldalából az $a_1, \ldots, a_n$ elemek egy-egy részének törlésével 2^n számú különböző részcsoport áll elő. Megfelelő tétel érvényes a nilpotens csoportokra. E tételeket SZÉP és referens közös dolgozatban, majd ITÔ és LYNDON nagy mértékben élesítették, kiterjeszkedve a magasabbrendű kommutátorok vizsgálatára is.

SZELE a következő nevezetes tételt nyerte. Egy $G (\neq 1)$ csoportot perfektnek nevez, ha kommutátorcsoportja is G. Kimutatja, hogy ha egy véges vagy végtelen csoportnak van perfekt részcsoportja, akkor ezek között van normális részcsoport is (amely persze esetleg maga G).

ITÔ és SZÉP egyik közös tétele kimondja, hogy ha egy véges vagy végtelen G csoport H részcsoportjának összes konjugáltjai $H, H', \ldots,$ akkor a $HH' \ldots$ szorzat G-nek (normális) részcsoportja.

FUCHS igen érdekes vizsgálatokat végzett a G (véges vagy végtelen) csoportnak H, K részcsoportok szerint való $G = HK + HaK + \cdots$ DEDEKIND-féle osztályozásáról. Többek között megállapítja, hogy az osztályok (a komplexusszorzás szerint) mikor alkotnak csoportot.

FUCHS az ABEL-csoportok alaptételére rövid bizonyítást nyert egy minimális generátorrendszer segítségével, amely bizonyítás a minimális generátorrendszerrel bíró Abel-féle torziócsoportokra is alkalmas.

SZELE meghatározta bármely G Abel-csoport mindama részcsoportjait, amelyek G-ben direkt összeadandók. Eredményeinek egy részét korábban PRÜFER és SHODA is nyerték.

Az Abel-csoportokat illetően referens bizonyos újszerű vizsgálatokat végzett, amelyekre HAJÓS tétele indította. Jelöljön $n(>0)$ egész számot s legyen N az $1, \ldots, n$ számok halmaza. Tekintsük egy G Abel-csoport bármilyen $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjait. Bármely $M(\subseteq N)$ halmaz esetén jelölje A_M az $A_i (i \in M)$ részcsoportok szorzatát. Az

$$(A_M) \qquad (M \subseteq N)$$

rendszámok rendszere ($n \geqq 3$ esetén) igen nehezen áttekinthető. Avégből, hogy e rendszerről felvilágosításokat nyerjen, referens bevezette a

$$\varrho(z) = \varrho(z; A_1, \ldots, A_n) = \sum_{M \subseteq N} (-1)^{(M)} (A_M)^{-z}$$

függvényt z komplex változóval. Ennek meglehetősen összetett vizsgálata, amelyben segítséget nyújt a MÖBIUS-féle függvénynek DELSARTE által újabban felfedezett általánosítása, többek között a

$$0 \leqq \varrho(z) < 1 \qquad (z = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenségekre vezetett. Ebben feltűnő, hogy ha z bármely, az egész számoktól különböző, 1-nél nagyobb pozitív szám, akkor $\varrho(z)$ sem alulról, sem felülről nem korlátos (amennyiben az összes G és ennek bármilyen $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjai versenyeznek). Bizonyos esetekben $\varrho(z)$ az $A_1, A_2, \ldots$ végtelen rendszerekre is definiálható, s lehetséges egyéb struktúrákra való kiterjesztés is. A megfelelő $\zeta(z) = \varrho(z)^{-1}$ függvények a RIEMANN-féle zeta-függvénynek (a DEDEKIND-féléknek is) általánosításai, amiért referens az itt nevezett $\zeta(z)$ függvényeket is zeta-függvényeknek nevezi. HAJÓS tétele ekvivalens azzal, hogy bizonyos speciális zeta-függvényeknek a $z = 1$ helyen való pólusos voltából következik, hogy ugyanazoknak a $z = 2, 3, \ldots$ helyeken is pólusa van. Figyelemre méltó, hogy akárcsak HAJÓS tétele, a fenti eredmény is független az Abel-csoportok alaptételétől.

Referens meghatározta azokat a csoportokat, amelyeknek minden részcsoportja direkt felbonthatatlan.

Referens rövidebbé tette az A_n ($n \geqq 5$) n-edfokú alternáló csoport egyszerűségének BAUER MIHÁLYtól származó bizonyítását.

POLLÁK ugyanerre a tételre lényegesen új bizonyítást adott, amely n-ről $n+1$-re való indukcióval történik.

SZÉP az A_n-ről ($n \geqq 5$) kimutatta, hogy ha n nem prímszám, akkor A_n-nek nincs prímszám indexű részcsoportja.

SZELE KALMÁR LÁSZLÓnak egy régebbi dolgozatához kapcsolódva nála egyszerűbben bebizonyítja, hogy az A_n ($n \geqq 5$) csoportnak nincs prímszám-indexű normálosztója. (KALMÁR jegyezte meg, hogy a Ruffini—Abel-féle tételt ezen az úton is be lehet bizonyítani.)

Végül beszámolok még a következő axiomatikai vizsgálatokról, amelyek több-kevesebb összefüggésben állnak a csoportelmélettel.

Az egész algebra szempontjából elvi fontosságú SZÁSZnak egy vizsgálata, amelyben kimutatja, hogy az asszociativitásaxiómák általában függetlenek. Pontosan a következő tételről van szó. Minden legalább négy elemű S halmazban definiálható olyan szorzás, hogy az

$$(ab)c = a(bc) \qquad (a, b, c \in S)$$

egyenletek egyik tetszésszerintinek a kivételével teljesülnek. Bizonyos módosulással hasonló megállapítást tesz a kommutatív szorzással kapcsolatban.

FARAGÓ megvizsgálta, hogy mi a hatása annak, ha a szokásos csoportaxiómákban az $(ab)c = a(bc)$ asszociativitásfeltételt $(ab)c = b(ca)$-ra vagy $a(bc) = a(cb)$-re stb. változtatjuk.