MAGYAR KUTATÓK EREDMÉNYEI A VÉGTELEN CSOPORTOK ELMÉLETÉBEN

FUCHS LÁSZLÓ a matematikai tudományok doktora

Előadta az 1955. május 26-án tartott nyilvános osztályülésen

Magyar kutatók számottevő eredményekkel gazdagították a végtelen csoportok elméletét; 60-nál is több azon dolgozatok száma, amelyekben kutatóink a végtelen csoportok különféle osztályainak szerkezetével, vagy pedig kimondottan végtelen csoportokra vonatkozó problémákkal foglalkoztak. Az elért eredmények szinte kivétel nélkül a felszabadulás utáni időszakra esnek. E kutatásokban vezető szerepet vitt a SZELE által alapított debreceni algebrai iskola, de a debrecenieken kívül több más kutató is ért el érdemleges eredményeket. A vizsgálatok a végtelen csoportok elméletének sok ágában folytak, de mind a dolgozatok számát, mind pedig az elért eredmények legjavát tekintve, a végtelen Abel-csoportok elméletét kell a fő kutatási területnek tekintenünk. Eredményeinket külföldön is nagyra értékelik; e tény alátámasztására elegendő A. G. KUROS szovjet akadémikusnak könyve magyar kiadásához írt előszavából idézni: „A magyar algebristák vizsgálatai számos kérdésben, különösen pedig az Abel-csoportok elméletében, nagy lendületet vettek az utóbbi évek során, és tanúi vagyunk annak, miként alakul ki Magyarországon az algebrai kutatásnak egy új nagy központja." Úgy vélem, nem véletlen, hogy KUROS éppen az Abel-csoportok elméletében végzett kutatásainkat emeli ki. Valóban, az elmúlt évtizedben a végtelen Abel-csoportok elméletében a szovjet kutatók mellett elsősorban a magyar kutatók eredményei jelentenek komoly előrehaladást e csoportok szerkezetének feltárása felé.

Az alábbiakban rövid áttekintést igyekszünk adni azokról az eredményekről, amelyeket magyar kutatók értek el a végtelen csoportok elméletének különféle területein. Ismertetésünkben természetesen nem törekedhetünk teljességre, hiszen e keretek közt az eredmények részletes ismertetése keresztülvihetetlen. — Viszont igyekeztünk számot adni az eredmények eddigi külföldi visszhangjáról.[1]

[1] Ennek során nem teszünk külön említést azokról a cikkekről, amelyeket KUROS idéz könyvében.

I. Az Abel-csoportok szerkezetének vizsgálatában elért eredmények[2]

A magyar matematikusoknak a végtelen Abel-csoportok elméletében végzett kutatásai két főirányban folytak. Az egyik irányt az Abel-csoportok általános struktúrájára vonatkozó kutatások jelentik, a másik irányba pedig azok a vizsgálatok tartoznak, amelyeknek célja bizonyos speciális követelményeket kielégítő Abel-csoportok teljes leírása.

Az első témakörbe eső eredmények közül elsőnek SZELE TIBORnak ciklikus vagy kváziciklikus direkt összeadandó exisztenciájára vonatkozó tételét említjük meg. E szerint minden nem-torziómentes[3] G Abel-csoport feltétlenül tartalmaz vagy egy ciklikus vagy egy kváziciklikus direkt összeadandót, azaz ily G csoport felbontható a

$$G = A + B \sim C(p^k) + B \qquad (1 \leqq k \leqq \infty)$$

direkt összegre, ahol $C(p^k)$ jelenti véges k esetén a p^k-adrendű ciklikus csoportot, míg $C(p^\infty)$ a Prüfer-féle vagy kváziciklikus csoportot jelöli; ez tudvalevőleg izomorf a p-, p^2-, ...-edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával. (p itt s a továbbiakban prímszámot jelöl.) SZELE e tételének következő általánosítását is bebizonyította: Legyen A a G csoportnak oly alcsoportja, mely ugyanannyiadrendű, mondjuk r-edrendű ciklikus csoportok direkt öszszege; *annak szükséges és elégséges feltétele, hogy A a G-nek direkt összeadandója legyen, az, hogy*[4] $A \cap rG = 0$ *teljesüljön.* E tételnek következménye igen sok eddig ismert eredmény, köztük KUROSnak a minimum-feltételű[5] Abel-csoportokra vonatkozó struktúra-tétele, KULIKOVnak az a tétele, hogy a torzió- és a vegyes csoportok közt csak a $C(p^k)$ $(1 \leqq k \leqq \infty)$ csoportok direkt felbonthatatlanok, továbbá FOMIN ama tétele, mely szerint ha egy vegyes Abel-csoport torzióalcsoportjában[6] az elemek rendje korlátos, akkor a torzióalcsoport direkt összeadandó stb.

[2] Az Abel-csoportokat szokás szerint additive írjuk. Ebben s a következő fejezetben csak Abel-csoportokról lesz szó, ezért ha röviden „csoportot" mondunk, e két fejezetben ezen is mindig Abel-csoportot kell érteni.

[3] Egy csoportot *torziócsoport*nak nevezünk, ha minden eleme véges rendű, *p-csoport*nak, ha minden elemének rendje egy s ugyanazon p prímszám valamely hatványa. *Torziómentes* egy csoport, ha a 0 elemén kívül nem tartalmaz más végesrendű elemet; *vegyes* a csoport, ha sem nem torziócsoport, sem nem torziómentes.

[4] rG-vel jelöljük G-nek azon alcsoportját, mely az rg $(g \in G)$ alakú elemekből áll (r racionális egész).

[5] G alcsoportjairól akkor mondjuk, hogy a *minimum-feltétel*nek tesznek eleget, ha nem létezik az alcsoportoknak végtelen hosszú, szigorúan monoton csökkenő lánca. Analóg definíció érvényes a *maximum-feltétel*re.

[6] Egy vegyes Abel-csoport végesrendű elemei alcsoportot alkotnak, ez a csoport *torzióalcsoport*ja.

A p-csoportok elméletében ismert eredmény, hogy végtelen magasságú[7] elemeket nem tartalmazó G Abel-féle p-csoport minden eleme befoglalható a csoportnak egy véges direkt összeadandójába. E tétel általánosításaként ERDÉLYI MÁRIA bebizonyította, hogy tetszőleges G Abel-féle p-csoport valamely a eleme akkor és csak akkor van benne a csoport egy véges direkt összeadandójában, ha az a elem által generált $\{a\}$ ciklikus csoport nem tartalmaz végtelen magasságú elemet.

A végtelen Abel-csoportok elméletében fontos probléma annak megállapítása, hogy egy csoport mikor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére. Mint ismeretes, ez az eset forog fenn a véges, illetve általánosabban a végesen generált csoportok esetén. R. RADOnak a végesen generált Abel-csoportok alaptételére adott bizonyításából kiindulva, SZELE TIBOR általános kritériumot adott a ciklusösszegre való bonthatóságra vonatkozóan. Bebizonyította, hogy G ciklusösszegre bontható, ha tartalmaz oly generátorrendszert, melynek minden $a_1, \ldots, a_k$ véges részrendszerére vonatkozóan igaz a következő: G nem tartalmaz oly $b_1, \ldots, b_k$ részhalmazt, melyre[8] $\{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ és $\min\limits_i O(b_i) < \min\limits_i O(a_i)$. Egy PONTRJAGINtól származó elégséges feltételre adott SZELE új bizonyítást a tétel következő átfogalmazásában: Egy megszámlálható torziómentes G Abel-csoport akkor és csakis akkor ciklusösszeg, ha minden véges r-re teljesül az, hogy G-nek r-edrangú[9] alcsoportjai eleget tesznek a maximum-feltételnek.

A p-csoportok ciklusösszegre való bonthatóságára vonatkozóan egészen alapvető eredmény H. PRÜFERnek az a tétele, hogy egy megszámlálható p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha nem tartalmaz végtelen magasságú elemet. Meglepő, hogy ez a tétel érvényét veszti megszámlálhatónál nagyobb számosságú csoportok esetén. Erre már PRÜFER maga is rámutatott egy kontinuum számosságú csoport példáján, újabban pedig SZELE adott rá igen egyszerű bizonyítást, felhasználva KUROS példáját. E példa a következő: tekintsük a $p, p^2, \ldots$ rendű ciklikus csoportok komplett direkt összegét, vagyis azon $\langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ alakú „végtelen vektorok" csoportját, ahol b_n p^n-edrendű ciklikus csoport eleme. E csoport végesrendű elemei csoportot alkotnak, mely kontinuum számosságú p-csoport

[7] A G p-csoport a elemét *végtelen magasságú* elemnek mondjuk, ha a $p^k x = a$ egyenlet tetszőleges nemnegatív egész k-ra megoldható G-ben. Az a elem *magassága h*, ha $k = h$-ra az előbbi egyenlet megoldható, de $k = h + 1$-re már nem.

[8] $O(x)$ jelöli az x elem rendjét, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ pedig a zárójelbe foglalt elemek által generált alcsoportot.

[9] A torziómentes G csoport $a_1, \ldots, a_k$ elemeit *függetlenek*nek nevezzük, ha az $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k = 0$ (n_i racionális egészek) egyenletből $n_1 = \cdots = n_k = 0$ következik. A G csoport független elemeinek maximális számát G *rang*jának mondjuk. A függetlenség fogalma értelmezhető tetszőleges G Abel-csoportban, amennyiben a felírt egyenletből $n_1 a_1 = \cdots = n_k a_k = 0$ következését követeljük meg, vagyis $n_i = 0$, ha $O(a_i)$ végtelen, és $O(a_i) | n_i$, ha $O(a_i)$ véges.

s nem bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére. SZELE rámutatott, hogy e csoportnak van oly $\aleph_1$ számosságú alcsoportja is, mely ugyanazzal a tulajdonsággal bír. (A konstrukcióból világos, hogy végtelen magasságú eleme nincs a szóban forgó csoportnak.)

PRÜFER előbb idézett tételét KULIKOV általánosította, szükséges és elégséges feltételt adva meg egy tetszőleges számosságú p-csoport ciklusösszegre való bonthatóságára. E tétel így szól: a G Abel-féle p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha G egyesítése oly $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ növekvő alcsoportláncnak, ahol G_n mindegyikében az elemek magassága fix véges korlát alatt marad (mely korlát n-től függhet). KULIKOV ezen alapvető eredményének lényegét ragadva meg, KERTÉSZ ANDOR továbbfejlesztette e kritériumot, számos érdekes további kutatásnak nyitva utat. KERTÉSZ legmesszebbmenő eredménye e téren a következő. Nevezzük a G p-csoport B alcsoportjának P maximális független rendszerét B *tartórendszerének*, ha P-nek egyetlen eleme sem cserélhető ki nagyobb magasságú B-beli elemmel a függetlenség megsértése nélkül. Mármost *egy G p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összegére, ha* 1. *G-nek minden végtelen magasságú eleme belefoglalható G-nek egy $C(p^\infty)$ típusú alcsoportjába és* 2. *G tartalmaz oly B alcsoportot, melynek van tartórendszere s a G/B faktorcsoport ciklusösszeg.* E tétel speciális esetként magában foglalja PRÜFER s KULIKOV említett tételein kívül DIEUDONNÉnak egy újabb eredményét is, s ezenkívül több érdekes korolláriumot.

KERTÉSZ említett tételének egyik korolláriumából kiindulva, sikerült FUCHS LÁSZLÓnak két, egymáshoz duális, oly szükséges és elégséges feltételt megadni, melyek egy tetszőleges Abel-csoport ciklusösszegre való bonthatóságára vonatkoznak. Ezek az első ilyen irányú eredmények az irodalomban, amelyek mindennemű megszorítás nélkül (pl. megszámlálhatóság, torziómentesség stb.) érvényesek s ezek közül az egyik feltételnek az az előnye is megvan, hogy szinte valamennyi eddig ismert szükséges és elégséges, ill. elégséges feltétel e tétel korolláriumaként adódik. A tételek megfogalmazásához szükség van egy új fogalomra, amelynek segítségével bizonyos esetekben összehasonlítást tudunk tenni két végtelen rendű elem rendje közt. Legyen S a G Abel-csoport tetszésszerinti független rendszere, továbbá a és b végtelen rendű elemek G-ben. Akkor mondjuk, hogy *a relatíve nagyobb rendű b-nél* (S-re vonatkozóan), ha vagy $a \in S$, vagy $b \in S$, és emellett fennáll

$$ra = sb + t_1c_1 + \cdots + t_kc_k \qquad (c_i \in S;\ a, b \neq c_i),$$

ahol

$$|r| > |s| > 0$$

(r, s, t_i racionális egészek). Mármost a két tétel így szól: *G akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha* 1. *tartalmaz oly B maximális független rendszert, melynek egyetlen eleme sem cserélhető ki G-nek egy nagyobb vagy relatíve nagyobb rendű elemével (B-re vonatkozóan) a füg-*

getlenség megsértése nélkül; *vagy* 2. *tartalmaz oly B minimális generátorrendszert, melynek egyetlen eleme sem cserélhető ki G-nek egy kisebb, vagy relatíve kisebb rendű elemével úgy, hogy újból generátorrendszert kapjunk* (itt S-nek a tekintett elemet mint egy-elemű független rendszert kell tekinteni.)

Azon p-csoportok szerkezetére vonatkozó vizsgálatokban, melyek nem bonthatók ciklikus csoportok direkt összegére, alapvető szerepet játszik a KULIKOV által bevezetett *bázisalcsoport* fogalma. A tetszőleges számosságú p-csoportok szerkezetének vizsgálata ma szinte elképzelhetetlen e fogalom nélkül. SZELE a bázisalcsoport fogalmára egy új, a réginél természetesebbnek tűnő definíciót adott: A G p-csoport bázisalcsoportjának nevezi G-nek oly B alcsoportját, mely ciklikus csoportok direkt összege: $B = B_1 + B_2 + \cdots$ (B_n p^n-edrendű ciklikus csoportok direkt összege), de úgy, hogy $B_1 + \cdots + B_n$ a G-nek oly maximális direkt összeadandója, mely legfeljebb p^n-edrendű elemeket tartalmaz. Ez a definíció ekvivalens a Kulikov-félével, amely B-től a következő tulajdonságokat kívánja meg: 1. B ciklusösszeg; 2. B a G-nek szerváns alcsoportja abban az értelemben, hogy ha a $p^n x = a$ ($a \in B$) egyenletet egy G-beli x elem kielégíti, akkor van ezen egyenletnek oly megoldása is, mely B-hez tartozik; 3. a G/B faktorcsoport kváziciklikus csoportok direkt összege. — SZELÉnek a bázisalcsoporttal foglalkozó dolgozatában a főeredmény az, hogy *minden G p-csoport homomorf módon leképezhető az ő B bázisalcsoportjára.* E tételnek már eddig is számos fontos következményét ismerjük, pl. azt, hogy egy G p-csoportnak és bázisalcsoportjának ugyanazok a ciklusösszegre bontható csoportok a homomorf képei; vagy azt a tételt, hogy ha H homomorf képe a G p-csoportnak, akkor H-nak bázisalcsoportja homomorf képe G bázisalcsoportjának.

A megszámlálható p-csoportok struktúráját teljesen feltárják PRÜFER, ULM és ZIPPIN tételei. Ha G tetszőleges p-csoport, akkor ebben a végtelen magasságú elemek egy G^1 alcsoportot alkotnak; G^1-nek azon elemei, melyek magában G^1-ben is végtelen magasságúak, G^1-nek egy G^2 alcsoportját alkotják stb. Általában, G-ből kiindulva képezhetjük a G^α alcsoportsorozatot a következőképpen. Legyen $G^0 = G$; ha α oly rendszám, amelyre $\alpha - 1$ létezik, akkor G^α álljon $G^{\alpha-1}$ azon elemeiből, melyek magában $G^{\alpha-1}$-ben végtelen magasságúak; ha pedig α limesz rendszám, úgy definiáljuk G^α-t mint az összes $G^\beta (\beta < \alpha)$ alcsoportok metszetét. El kell jutni oly legkisebb τ rendszámig, mely nem haladhatja meg G számosságát s melyre $G^{\tau+1} = G^\tau$ teljesül. Ezen G^τ alcsoportról közvetlenül belátható, hogy kváziciklikus csoportok direkt összege s ezenfelül G-nek direkt összeadandója. Így a továbbiakban elegendő a $G^\tau = 0$ esetre szorítkozni, mikor is G-t *redukált* csoportnak nevezzük, s τ-t a G *típus*ának mondjuk. A $G^\alpha/G^{\alpha+1} = G_\alpha$ ún. *Ulm-faktorok* a G csoportnak egyértelműen meghatározott

$$G_0, G_1, \ldots, G_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \tau)$$

Ulm-sorozatát definiálják. Ezek a G_α csoportok nem tartalmaznak végtelen magasságú elemeket s bennük az elemek rendje nem lehet korlátos, kivéve az Ulm-sorozat esetleg létező utolsó tagját, $G_{\tau-1}$-et. — Mármost ha G megszámlálható, akkor típusa is megszámlálható rendszám és valamennyi G_α is megszámlálható, tehát PRÜFER idézett tétele értelmében G-nek minden Ulm-faktora ciklusösszeg. ULM bebizonyította, hogy két megszámlálható redukált p-csoport izomorf, ha Ulm-sorozatuk azonos; másszóval a megszámlálható redukált p-csoportoknál az Ulm-sorozat teljes invariáns-rendszert alkot. Végül ZIPPIN azt mutatta meg, hogy az Ulm-sorozat lényegileg tetszésszerinti módon írható elő (természetesen a τ-ra és G_α-ra vonatkozó említett feltételeket ki kell elégíteni).

Sokkal nehezebb a helyzet, ha eltekintünk a csoport megszámlálhatóságától. Már említettük, hogy ekkor a végtelen magasságú elemek hiánya nem biztosítja a ciklusösszegre való bonthatóságot, s így ebben az esetben a G_α-k nem lesznek szükségképpen ciklusösszegek. De be lehet bizonyítani, hogy *a* *G_α-k előállíthatók ciklikus csoportok ún. interdirekt összegeként*; e felbontásnál még egy további, könnyen kielégíthető feltétel mellett az is biztosítható, hogy *a direkt összeadandók rendjei egyértelműen meg legyenek határozva.* Tetszőleges számosság esetén az Ulm-tétel megfelelője sem áll, sőt az is előfordulhat, hogy két csoport ugyanazon Ulm-sorozattal különböző számosságú! A Zippin-tétel megfelelőjét újabban KULIKOVnak sikerült megtalálni. Tőle függetlenül, egy évvel később FUCHS is megkapta e tételt s bizonyítása KULIKOVénál sokkalta rövidebb s egyszerűbb.

A torziómentes Abel-csoportok elméletében az ún. végesrangú csoportok szerkezetét teljesen ismerjük KUROS, MALCEV és DERRY munkái alapján. Az 1-rangúak a racionális számok additív csoportjának alcsoportjaival izomorfak; ezekre adnak igen explicit jellemzést RÉDEI LÁSZLÓ és SZELE TIBOR. A másodrangú csoportokról először PONTRJAGIN mutatta meg, hogy ezek nem mindig bonthatók fel 1-rangúak direkt összegére. BOGNÁR MÁTYÁS igen egyszerű példát talált direkt felbonthatatlan másodrangú torziómentes csoportra. Példája a következő: tekintsük a komplex számok additív csoportjában az

$$\frac{1}{3^n},\ \frac{i}{5^n}\ (n=1,2,\ldots)\ \text{és}\ \frac{1+i}{2}$$

elemek által generált alcsoportot. Erről könnyű kimutatni, hogy direkt felbonthatatlan. Hasonló elv alapján konstruálható kontinuumnál nem nagyobb, egyébként tetszőleges rangú torziómentes Abel-csoport. Érdekes, hogy mindezideig nem ismeretes kontinuumnál nagyobb számosságú direkt felbonthatatlan torziómentes csoport; SZELE sejtése szerint ilyen nincs is.

R. BAERnek vannak igen mélyreható vizsgálatai a torziómentes Abel-csoportok struktúrájára vonatkozóan. A teljes redukálhatóságon, vagyis 1-rangúak direkt összegére való bonthatóságon kívül BAER részletesen vizsgálta a részleges redukálhatóságot is, amelyen a G torziómentes Abel-csoport oly

$G=\sum_{\nu} G_\nu$ direkt felbontásának exisztenciáját érti, ahol minden egyes ν-re a G_ν-ben levő nemzérus elemek azonos típusúak. Itt egy a elem típusán azon p^k hatványok összességét értjük, amelyekre a $p^k x=a$ egyenlet a csoportban megoldható, s két elemet azonos típusúnak tekintünk, ha a hozzájuk rendelt prímhatvány-halmazok legfeljebb végessok elemben térnek el egymástól. BAER számos kritériumot adott a részleges redukálhatóságra végesrangú csoportok esetén; ERDŐS JENŐ végesrangú csoportokról oly csoportokra terjesztette ki BAER egyes eredményeit, amelyekben az elemek típusaiból alkotott részben rendezett halmaz a maximum-feltételnek tesz eleget. ERDŐS J. további eredményekre is jutott.

Nagy jelentőségű elméletet állított fel SZELE TIBOR az Abel-csoportok elméletében; ez az elmélet analogonja a testek jólismert s immár klasszikusnak mondható Steinitz-féle elméletének, s jelentősége a nyert új eredményeken kívül abban áll, hogy számos, eddig egymástól látszólag távol álló eredményt s módszert hoz egymással szoros kapcsolatba. Egyismeretlenű „algebrai" egyenleten a G csoportban az $nx=a$ ($a \in G$, x a G ismeretlen eleme, n racionális egész) egyenletet érti s erre a definícióra építi a további fogalmakat, mint pl. az algebrai és transzcendens bővítés, az algebrailag zárt csoport fogalmát stb. STEINITZ mindkét alaptételének sikerült megtalálni a megfelelőit a csoportelméletben: 1) *tetszőleges G Abel-féle csoport minden H bővítése (azaz $G \subset H$) felbontható egy tiszta transzcendens, majd egy utána alkalmazott algebrai bővítésre;* 2) *tetszőleges G Abel-csoportnak van — izomorfizmustól eltekintve egyértelműen meghatározott — algebrailag zárt*[10] *algebrai bővítése.* A SZELE által bizonyított ezen, s további analóg tételek meglepőek azért, mert sok igen lényeges eltérés van a testek s a csoportok elmélete közt.

A Szele-féle elméletben algebrailag zárt az olyan csoport, melyben minden $nx=a$ algebrai egyenlet megoldható. GACSÁLYI SÁNDOR azt a kérdést vizsgálta, hogy mi a helyzet „algebrai" egyenletrendszer esetén. Arra az eredményre jutott, hogy *algebrailag zárt csoportban minden, $n_1x_1+\cdots+n_kx_k=a(\in G)$ alakú egyenletekből álló egyenletrendszer is megoldható, hacsak a nyilvánvalóan szükséges kompatibilitási*[11] *feltételek teljesülnek.* GACSÁLYI eredményében meglepő az, hogy sem az egyenletek, sem az ismeretlenek számosságára vonatkozóan nem kell semminemű megszorítást tenni. Tételéből az az új eredmény is következik, hogy a ferdetestek feletti lineáris egyenletrendszerek a kompatibilitási feltételek teljesülése esetén mindig megoldhatók (e tényt PICKERT felvette a lineáris algebráról szóló enciklopédia-cikkébe).

[10] Az algebrailag zárt csoportok szerkezete igen egyszerű: ezek a racionális számok additív csoportjával vagy valamely kváziciklikus csoporttal izomorf csoportok direkt összegére bonthatók. — SZELE ezen eredményére igen sok hivatkozás történik az irodalomban.

[11] Egy rendszert *kompatibilis*nek mondunk, ha a baloldalak közti lineáris összefüggések a jobboldalakra is érvényesek.

A G csoport H alcsoportját *szervánsnak* nevezzük, ha az $nx=h$ $(h \in H)$ egyenletnek G-beli megoldhatóságából következik a megoldhatóság H-ban is, más szóval: H a „G-ben algebrailag zárt“. GACSÁLYI kimutatta, hogy ha egy végessok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszernek (a jobboldalon álló csoportelemek természetesen H-hoz tartoznak) van megoldása G-ben, akkor van megoldása a H szerváns alcsoportban is. Érdekes, hogy ez általában már nem igaz, ha végtelen sok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert is megengedünk: azon A alcsoportok, amelyekre tetszésszerinti számosságú ismeretlent tartalmazó A-beli egyenletrendszernek G-ben való megoldhatóságából következik a megoldhatóság A-ban is, megegyeznek G direkt összeadandóival.

II. Egyéb vizsgálatok az Abel-csoportok elméletében

A végtelen Abel-csoportok struktúrájának a kérdése viszonylag csak igen kevés esetben tekinthető megoldott problémának, így a legfontosabb csoportosztályok közt a ciklusösszegre bontható s az algebrailag zárt csoportokon kívül csak a megszámlálható p-csoportok s a végesrangú torziómentes csoportok szerkezete ismert. Bár az Abel-csoportok szerkezetére vonatkozó vizsgálatok világviszonylatban is a csoportelméleti kutatások egyik fontos központi területe és egyre több eredményt érnek el a kutatók napjainkban is a struktúraelméletben, mégis azt kell mondanunk, hogy még igen távol vagyunk a struktúra-probléma teljes megoldásától. Különösen áll ez a vegyes csoportokra, ahol mind a mai napig szinte teljesen nélkülözzük a hatásos módszereket. Éppen ezért a kutatók újabban oly módon igyekeznek közelférkőzni az általános vegyes csoportok struktúrájához, hogy egyes speciális feltételeket kielégítő csoportok szerkezetét igyekeznek feltárni. Az ilyen irányú vizsgálatok nemcsak sok érdekes eredményre vezetnek, hanem az a hasznuk is megvan, hogy megoldásuk közben oly problémák merülnek fel és oly módszerek kovácsolódnak ki, amelyek közelebb visznek sokkal általánosabb csoportosztályok szerkezetének megismeréséhez is.

SZELE TIBOR és KERTÉSZ ANDOR, részben FUCHS LÁSZLÓval közösen, több speciális követelménynek eleget tevő Abel-csoport szerkezetét adták meg explicit módon. A vizsgált problémákat a következőképpen lehet röviden jellemezni. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ a G csoportból valamely előírt módon származtatható két csoportosztály, pl. G összes alcsoportjainak, szerváns alcsoportjainak, direkt összeadandóinak vagy összes homomorf képeinek stb. halmaza. Izomorf csoportokat csak egyszer veszünk számításba. Az említett vizsgálatok pedig oly G Abel-csoportok szerkezetének felderítését célozzák, amelyekre $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ vagy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. E vizsgálatokba külföldről is bekapcsolódtak (E. SĄSIADA). Legutóbbi eredményük azon csoportok szerkezetének megadása explicit módon, amelyekben minden alcsoport endomorf kép.

KERTÉSZ egyik munkájában a végtelen ciklikus csoportok direkt összegére bontható (más szóval a szabad Abel-féle) csoportok és az algebrailag zárt csoportok dualitásából kiindulva, bizonyos feltételeknek eleget tevő csoportokat vizsgál. A jelzett dualitásban a szabad s az algebrailag zárt csoportok, valamint az alcsoportok s a faktorcsoportok az egymásnak megfelelő fogalmak; ennek illusztrálására álljon itt a következő két tétel: minden Abel-csoport alcsoportja (ill. faktorcsoportja) egy alkalmas algebrailag zárt (ill. szabad) Abel-féle csoportnak; ha minden oly G Abel-csoportnak van H-val izomorf alcsoportja (ill. faktorcsoportja), amelynek az adott H csoport faktorcsoportja (ill. alcsoportja), akkor H szabad (ill. algebrailag zárt). KERTÉSZ a következő, önduális tételt is bebizonyítja: minden, a H csoporttal izomorf endomorf képpel bíró Abelcsoportnak, akkor és csakis akkor van H-val izomorf direkt összeadandója, ha H direkt összege egy algebrailag zárt és egy szabad csoportnak (az egyik direkt tag eltűnhetik).

SZÁSZ FERENC és SZÉLPÁL ISTVÁN a ciklikus, ill. a kváziciklikus csoportoknak adták egy-egy jellemzését. SZÁSZ FERENC bebizonyította, hogy egy multiplikatíve írt G csoport akkor és csakis akkor ciklikus, ha a $G^k (k=1,2,\ldots)$ csoportokon és az egységalcsoporton kívül nem tartalmaz más alcsoportot; itt G^k jelenti a G csoport elemeinek k-adik hatványai által generált alcsoportot. Megjegyzendő, hogy ezen eredmény G kommutativitásának előzetes feltétele nélkül is érvényes. SZÉLPÁL eredménye szerint a kommutatív csoportok közt a kváziciklikusokat az jellemzi, hogy oly végtelen csoportok, melyeknek minden valódi alcsoportja véges. Ez utóbbi munkára hivatkozás történik W. A. SCOTT egyik cikkében.

SZELE vizsgálta a ciklikus csoportok ún. *egyesített alcsoportú direkt összegét* s ezek szerkezetére vonatkozóan tett elég explicit jellegű megállapításokat.

Itt említjük meg az Abel-csoportok *endomorfizmusgyűrűjé*re[12] vonatkozó eredményeket is. E területen elsősorban SZELE TIBOR munkássága emelendő ki. Egyik dolgozatában azt mutatta meg, hogy egy csoport endomorfizmusgyűrűje akkor és csak akkor test, ha a csoport vagy p-edrendű ciklikus, vagy pedig az összes racionális számok additív csoportjával izomorf. Ezt az eredményt J. P. SERRE általánosította operátorcsoportokra. SZELE egy másik dolgozatában azt mutatta ki, hogy a nem-torziómentes csoportok közt egyedül a p-edrendű ciklikus és a kváziciklikus csoportoknak van nullosztómentes endomorfizmusgyűrűjük. Egy további, SZÉLPÁLlal közös dolgozata azon csoportokról szól, melyeknek minden endomorfizmusa a csoportot vagy önmagára vagy 0-ra képezi le; kiderül, hogy e csoportok éppen a p-edrendű ciklikus, a kváziciklikus és a racionális számok additív csoportjával izomorf csoportok. (SZÉLPÁLnak egy analóg eredménye szerint az első két típusú csoportoknak s

[12] Egy Abel-csoport *endomorfizmusai,* vagyis önmagába való homomorf leképezései gyűrűt alkotnak, ezt nevezik a csoport endomorfizmusgyűrűjének.

csak ezeknek van meg az a tulajdonságuk, hogy minden homomorf képük vagy 0, vagy izomorf magával a csoporttal.) SZÉLPÁL a torziómentes endomorfizmusgyűrűjű csoportokat jellemezte, megmutatva, hogy e G csoportok a következő struktúrájúak: $G = A + B$, ahol A algebrailag zárt torziócsoport, B pedig oly torziómentes csoport, mely eleget tesz a $pB = B$ egyenletnek minden oly p-re, mely p előfordul A-ban mint valamely elem rendje.

Érdekes vizsgálatok fűződnek SZELE TIBOR és SZENDREI JÁNOS nevéhez *a kommutatív endomorfizmusgyűrűjű csoportokat* illetően. Vizsgálataik nyomán teljesen ismerjük a kommutatív endomorfizmusgyűrűjű torziócsoportok szerkezetét, valamint az ilyen tulajdonságú vegyes csoportoknak két, meglehetősen széles osztályát. A *torziócsoportok* közt az említett tulajdonsággal *éppen a kör összes végesrendű forgásaiból álló C csoport és ennek alcsoportjai* bírnak (C nyilván izomorf az összes komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával). A vegyes csoportokra vonatkozó eredményeik közül hadd említsük meg itt azt, amelyik a $G = T + U$ direkt összegre bontható csoportokra vonatkozik, ahol T a G-nek torzióalcsoportja, s így U torziómentes. Ilyen G-nek endomorfizmusgyűrűje pontosan akkor kommutatív, ha T az imént említett C csoportnak oly alcsoportja, mely nem tartalmaz kváziciklikus alcsoportot, U pedig oly torziómentes, kommutatív endomorfizmusgyűrűjű csoport, mely eleget tesz a $pU = U$ egyenletnek olyan p prímekre, melyek T-ben mint elemrendek előfordulnak. SZELE és SZENDREI vizsgálataik eredménye alapján azt a sejtést mondják ki, hogy minden kommutatív endomorfizmusgyűrűjű csoport legfeljebb kontinuum számosságú és izomorf a kör összes (véges és végtelen rendű) forgásaiból álló csoport valamely alcsoportjával.

Az endomorfizmusgyűrűkre vonatkozó legújabb magyar vizsgálatok közül megemlítendő KERTÉSZnek az a még publikálatlan eredménye, hogy egy torziócsoport endomorfizmusgyűrűjének Jacobson-radikálja pontosan akkor tűnik el, ha G prímszámrendű ciklikus csoportok direkt összege.

Külön említésre méltók azok a vizsgálatok, melyek több csoportelméleti eredmény kiterjesztését jelentik az *operátormodulusok* különböző kategóriáira, és ilyen módon több esetben nevezetes gyűrűelméleti alkalmazásokhoz vezetnek. Különösen vonatkozik ez KERTÉSZ ANDOR legújabb vizsgálataira, amelyek egyebek közt a féligegyszerű gyűrűk egészen új, meglepő tulajdonságainak felfedezését és a végtelen lineáris egyenletrendszerek elméletének igen messzemenő általánosítását eredményezték. Messze vezetne, ha ezeket a fontos eredményeket itt ismertetni akarnók, csupán a főeredményt említjük meg: *egy R gyűrű feletti minden lineáris egyenletrendszerre akkor és csakis akkor érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete* (*vagyis a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele a rendszer kompatibilitása, és a megoldások a jobboldalak s tetszőleges paraméterek lineáris kombinációjaként állíthatók elő*), *ha R féligegyszerű.*

Az operátormodulusokkal kapcsolatos SZELÉnek egyik postumus cikke, amely a minimum- és maximum-feltételnek eleget tevő modulusokról szól, továbbá SZÉLPÁLnak az operátormodulusok rendjére vonatkozó megjegyzése.

III. A nem-kommutatív csoportok elméletében elért eredmények

A végtelen nem-kommutatív csoportokra vonatkozó hazai eredmények egy része már szerepelt RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus beszámolójában, minthogy azok a véges esetben is hasonlóan nehéz problémát jelentenek. Így speciálisan a csoportok *faktorizációjának* problémája terén elért eredményeink a végtelen csoportok elméletében is komoly előrehaladást jelentenek. Az ott ismertetett eredményekhez kiegészítésül meg kell említenünk RÉDEInek azon dolgozatát, melyben két ciklikus csoport Zappa—Szép-féle szorzatait vizsgálta. Két csoport összes Zappa—Szép-féle szorzatainak megadása ekvivalens azzal, hogy megadjuk a ZAPPA által megállapított feltételeket kielégítő összes kétváltozós függvénypárokat. E probléma rendkívüli nehézségét mutatja az a tény is, hogy ZAPPA feltételei még akkor is igen bonyolultak maradnak, ha a két faktor ciklikus csoport. RÉDEInek a szóbanforgó dolgozatban csak azt az esetet sikerült maradéktalanul elintézni, mikor a két ciklikus csoport egyike végtelen, másika véges. Arra az esetre vonatkozóan, midőn mindkét csoport végtelen ciklikus, RÉDEI csak részeredményekre jutott. E dolgozatának folytatása, amelyben két véges ciklikus csoport Zappa—Szép-szorzatairól lesz szó, még nem készült el.

A véges csoportok elméletének több területén jutnak szerephez a Q_n ún. *általánosított kvaterniócsoportok*. Ezek olyan 2^n $(n \geqq 3)$ rendű csoportok, amelyeknek a, b generátorai az

$$a^{2^{n-1}} = e, \quad bab^{-1} = a^{-1}, \quad b^2 = a^{2^{n-2}} \quad (e \text{ az egységelem})$$

definiáló relációkat elégítik ki. SZELE megmutatta, hogy létezik oly minimális Q_∞ végtelen csoport, mely alcsoportként tartalmazza valamennyi Q_n csoportot. Ez a csoport, melyet SZELE *végtelen kvaterniócsoport*nak nevezett el, oly $b, a_1, a_2, \ldots$ elemekkel generálható, amelyekre vonatkozó definiáló relációk a következők:

$$a_1^2 = e, \quad a_{k+1}^2 = a_k, \quad ba_kb^{-1} = a_k^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad b^2 = a_1.$$

E csoport oly végtelen p-csoport $(p = 2)$, amelynek egyetlen 2-odrendű alcsoportja van, ti. az a_1 által generált alcsoport. SZELE sejtése szerint Q_∞ az egyetlen oly végtelen p-csoport a nem-kommutatív csoportok közt, melynek csak egyetlen p-edrendű alcsoportja van. (A kommutatív csoportok közt a kváziciklikusaknak, de csak ezeknek van meg még az említett tulajdonságuk.)

GÁSPÁR GYULA a végtelen permutációcsoportoknak adta egy általánosítását. A természetes számok minden π permutációjához hozzárendelt oly M

végtelen mátrixot, melyben az (i, k) indexű helyeken rendre egy fix A csoport $a_1, a_2, \ldots$ elemei vagy 0-ok állnak aszerint, hogy $\pi i = k$ vagy $\pi i \neq k$. E mátrixot $(a_1, a_2, \ldots; \pi)$-vel jelölve, e mátrixnak a $(b_1, b_2, \ldots; \varrho)$ mátrixszal vett szorzatát mint az $(a_1 b_{\pi 1}, a_2 b_{\pi 2}, \ldots; \pi\varrho)$ mátrixot értelmezve, egy $S_\infty(A)$ csoportot kapunk. GÁSPÁR e csoport szerkezetét vizsgálja s megállapítja, miként kell kezdődniök e csoport kompozícióláncainak. A dolgozatban még megállapítást nyer $S_\infty(A)$ centruma, valamint automorfizmusai. Két további dolgozatában az előbb említett mátrixokból készült végtelen szorzatok s sorok konvergenciáját vizsgálja.

A nem-kommutatív csoportok szerkezetének vizsgálatában mélyebb eredményeket mind ez ideig csak olyan esetekben sikerült elérni, mikor a vizsgálandó csoportokat valamilyen további kikötésnek vetették alá. A kirótt követelmények többnyire olyanok, melyek a vizsgálandó csoportoknak vagy a véges csoportokhoz, vagy pedig a kommutatív csoportokhoz való közelségét biztosítják valamilyen formában. Így pl. B. H. NEUMANN szisztematikus tárgyalását adta az olyan csoportoknak, amelyekben minden elemnek csak végessok konjugáltja van. Ezek az ún. *véges osztályú csoportok.* NEUMANN igen messzemenően felderítette e csoportok szerkezetét. ERDŐS JENŐnek sikerült NEUMANN elméletét nagymértékben leegyszerűsíteni, egyszerű közvetlen bizonyítást adva az elmélet főtételére, mely szerint véges osztályú csoport kommutátoralcsoportja mindig torziócsoport. E tétel számos következménye közül megemlítjük R. BAER következő tételét: ha egy csoportban a centrum indexe véges, akkor a csoport kommutátoralcsoportja véges. ERDŐS tárgyalásából egyszerű bizonyítás adódik JU. G. FJODOROV következő érdekes tételére: ha egy végtelen G csoport bármely nem-triviális alcsoportja véges indexű, akkor G végtelen ciklikus csoport.

SZELE meghatározta azokat a csoportokat, amelyek nem tartalmaznak különböző, de egymással izomorf alcsoportokat. Bebizonyította, hogy egy csoportnak akkor és csakis akkor van meg az említett tulajdonsága, ha izomorf az összes komplex egységgyökök C csoportjának valamely alcsoportjával. SZELE ezen vizsgálataihoz kapcsolódva, FUCHS megadta mindazon csoportok szerkezetét, melyek nem tartalmaznak végtelen sok, egymással izomorf, de egymástól különböző alcsoportot: ezek éppen azok a csoportok, amelyek centrumukban tartalmaznak oly véges indexű alcsoportot, mely az előbb említett C csoport valamely alcsoportjával izomorf. Érdekes, hogy ugyanezen csoportok adódnak, ha az egymással izomorf alcsoportok számosságától (végesség helyett) *korlátosságot* követelünk meg. FUCHS azt is bebizonyította, hogy az összes csoportok közt csak két vagy három ugyanazon p prímszámrendű csoport direkt összege bír azzal a tulajdonsággal, hogy bennük az egymással izomorf nem-triviális, különböző alcsoportok száma mindig ugyanazon, 1-nél nagyobb véges szám.

A csoport fogalma általánosításának elméletébe vág FUCHSnak az a dolgozata, melyben A. SZUSKEVICSnek a véges félcsoportok szerkezetére vonatkozó eredményeit általánosítja oly végtelen félcsoportokra,[13] amelyekben minden elemnek van relatív inverze és léteznek egyoldali minimális ideálok. Egy S félcsoport a elemének relatív inverzén CLIFFORD nyomán oly a' elemet értünk, mely kielégíti az $e_a a = a e_a = a$, $aa' = a'a = e_a$ egyenleteket a félcsoport valamely (szükségképpen idempotens) e_a elemére; S-nek A részhalmazáról pedig akkor mondjuk, hogy baloldali ideál, ha $SA \subseteq A$ teljesül. FUCHS bebizonyította, hogy a minimális baloldali ideálok egyesítése megegyezik a jobboldali ideálok egyesítésével (csak az egyik oldali minimális ideálok exisztenciáját kell feltételezni), s ez az egyesítés S-nek oly kétoldali ideálja, mely diszjunkt izomorf csoportok egyesítési halmaza. Analóg vizsgálatokat végzett GREEN amerikai és Št. SCHWARZ csehszlovák matematikus is; utóbbi ugyanazon eredményre jutott gyengébb feltételek mellett.

IV. Eredmények a csoportelmélet egyéb ágaiban

Kutatóink egészen a legutóbbi időkig nem foglalkoztak a *topologikus csoportok* elméletével, de ma már itt is beszámolhatunk néhány értékes eredményről. Mindenekelőtt ki kell emelnünk BOGNÁR MÁTYÁS komoly figyelemre számot tartó vizsgálatait, amelyek véges dimenziójú topologikus csoportoknak az euklideszi térbe való beágyazhatóságára vonatkoznak. Tétele szerint *minden lokálisan kompakt, megszámlálható bázissal rendelkező n-dimenziós Abel-féle topologikus csoport topologikus tere beágyazható az* $n+2$*-dimenziós euklideszi térbe.* A bizonyítás (PONTRJAGIN struktúra-tétele alapján lehet a kompakt esetre szorítkozni) D. VAN DANTZIG szolenoid konstrukciójának általánosításán alapszik. BOGNÁR azt is megállapította, hogy az említett csoportoknak *az* $n+1$*-dimenziós euklideszi térbe való beágyazhatóságának szükséges és elégséges feltétele a* 0 *elem komponensének lokálisan összefüggő volta.* (Ez K. KODAIRA és M. ABE egy régebbi tételének általánosítása a kompaktság előzetes feltételezése nélkül.) A bizonyítás a következő, önmagában is érdekes lemmára támaszkodik: Minden, az adott feltételeket kielégítő, nem lokálisan összefüggő komponensekkel rendelkező topologikus csoport topologikus terének van oly altere, mely homeomorf egy 1-rangú torziómentes nem-ciklikus diszkrét Abel-csoport karaktercsoportja topologikus terének és egy $n-1$-dimenziós kockának topologikus szorzatával.

BOGNÁRnak egy másik eredménye szerint egydimenziós, kompakt, összefüggő és szeparálható Abel-féle topologikus csoportok akkor és csak akkor izomorfak (topologikusan is), ha topologikus terük homeomorf.

[13] *Félcsoport* oly halmaz, amelyben egy asszociatív operáció van értelmezve.

KERTÉSZ és SZELE egyik közös cikkükben azzal a kérdéssel foglalkoztak, hogy bevezethető-e minden végtelen Abel-csoportba nem-diszkrét topológia, vagyis megadható-e a 0 környezeteinek oly Σ rendszere, hogy a következő feltételek teljesüljenek: 1. Σ elemeinek metszete 0, de $0 \notin \Sigma$; 2. ha $U \in \Sigma$ és $V \in \Sigma$, akkor van oly $W \in \Sigma$, hogy $W \subseteq U \cap V$; 3. minden $U \in \Sigma$-hoz található oly $V \in \Sigma$, hogy $V + (-V) \subseteq U$; 4. ha $U \in \Sigma$ és $a \in U$, akkor van oly $V \in \Sigma$, hogy $V + a \subseteq U$. Kiderül, hogy tetszőleges végtelen G Abel-csoportba bevezethető ilyen topológia, sőt, ha G alcsoportjai nem tesznek eleget a minimum-feltételnek, akkor a Σ környezetrendszer úgy is megválasztható, hogy csupa alcsoportból álljon.

SZELE élete utolsó előadásában az endomorfizmusgyűrűk topologizálásának kérdésével foglalkozott.

A *folytonos csoportok* elméletéhez közelálló eredmények találhatók ACZÉL JÁNOS és HOSSZÚ MIKLÓS több dolgozatában. Ezek bizonyos függvényegyenretek megoldásaira vonatkoznak. Messze vezetne, ha ezen eredményekre itt részletesebben kitérnénk, ezért elégedjünk meg ACZÉLtól a következő tétel megemlítésével: a valós számokon értelmezett minden monoton, folytonos és asszociatív operáció „izomorf" az összeadással, s így kommutatív. HOSSZÚ eredményei közül pedig hadd említsük meg azt, mely szerint ha egy tetszőleges M halmazon értelmezett binér $*$ operáció tranzitív (azaz $(x*t)*(y*t) = x*y$) és eleget tesz a baloldali egyszerűsítési szabálynak (azaz $x*y_1 = x*y_2$-ből $y_1 = y_2$ következik), akkor ezen $z = x*y$ operációnak van inverze: $x = z \circ y$, mely eleget tesz a csoportaxiómáknak.

A *rendezett csoportok* elméletének különféle kérdéseivel foglalkozott FUCHS LÁSZLÓ több dolgozatában. Mint ismeretes, egy G csoportról akkor mondjuk, hogy (részben) rendezett, ha bizonyos elempárjaira értelmezve van egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív $\geqq$ reláció, mely kielégíti a következő követelményt:[14] $a \geqq b$ fennállásából $x + a + y \geqq x + b + y$ következik a csoport tetszőleges x, y elemeire. FUCHS egyik dolgozatában a rendezett csoportok rendezést tartó homomorfizmusaival foglalkozott; itt a mag oly N normálosztó, mely konvex abban az értelemben, hogy $a \geqq x \geqq b$, $a, b \in N$-ből $x \in N$ következik. Rámutat azon analógiákra és eltérésekre, melyek az absztrakt és a rendezett csoportok homomorfizmusai közt fennállanak. Foglalkozik a rendezett csoportok Schreier-féle és Zappa—Szép-féle bővítéseivel (az előbbire támaszkodik F. LOONSTRA egyik újabb cikkében), az abszolút érték fogalmának kiterjesztésével, s többek közt bebizonyítja a következő tételt: ha egy rendezett csoportnak a triviális alcsoportjain kívül egyáltalán nincs más konvex alcsoportja, akkor e csoport kommutatív, mégpedig izomorf a valós szá-

[14] Bár az additív írásmódot a csoportelméletben csak az Abel-csoportoknál szokás használni, rendezett csoportok esetén a nem-kommutatív csoportok operációját is célszerű összeadásnak írni, minthogy így a tulajdonságok jobban emlékeztetnek a valós számokra vonatkozó egyenlőtlenségek ismert tulajdonságaira.

mok additív csoportjának valamely alcsoportjával. (E tételre új bizonyítást adott T. MICHIURA.) FUCHSnak egy másik eredménye szerint egy kommutatív csoport rendezése akkor és csakis akkor terjeszthető ki tetszőlegesen előírt módon lineáris rendezéssé, ha a csoport eredeti rendezése normális abban az értelemben, hogy $na \geqq 0$-ból (n pozitív egész) $a \geqq 0$ következik. E tételnek speciális esete az az F. LEVItől származó eredmény, hogy minden torziómentes Abel-csoport lineárisan elrendezhető. FUCHS utoljára említett cikkében foglalt eredményekhez külföldi kutatók kapcsolódtak, többek közt C. J. EVERETT, M. OHNISHI, O. NAKADA, K. ISÉKI, T. MICHIURA.

* * *

Úgy véljük, az ismertetett eredmények mindennél jobban bizonyítják, hogy milyen nagy fejlődésen mentek keresztül a végtelen csoportok elméletében végzett kutatásaink az elmúlt tíz évben.