ABEL-CSOPORTOK EGYETLEN MAXIMÁLIS ALCSOPORTTAL

FUCHS LÁSZLÓ és SZELE TIBOR

Az 1954. évi Schweitzer-verseny feladatai közt szerepelt a következő probléma: *melyek azok a véges G csoportok, amelyeknek egyetlen egy maximális alcsoportjuk van?* A megoldás igen egyszerű. A csoport végessége miatt G-nek bármely valódi alcsoportja benne van G-nek valamely maximális alcsoportjában, tehát az M egyetlen maximális alcsoportban is. Mármost G-nek M-hez nem tartozó tetszés szerinti a elemét véve, $\{a\}$ nem lehet benne M-ben,[1] s így szükségképpen $\{a\}=G$, vagyis G ciklikus. Azonnal adódik, hogy G rendje prímhatvány, azaz $G\simeq C(p^k)$.

Igen nehézzé válik a probléma, mihelyt a végesség feltételét elejtjük. E kis cikk szerzői utolsó személyes találkozásukkor[2] ezzel a kérdéssel foglalkoztak s sikerült megoldaniok a problémát a kommutatív esetben; ezt a megoldást tesszük közzé az alábbiakban.[3]

Előrebocsátjuk a következő lemmákat:

1. LEMMA. *A G Abel-csoportnak akkor és csakis akkor nincs maximális alcsoportja, ha G algebrailag zárt.*[4]

Evidens, hogy tetszőleges G Abel-csoport maximális alcsoportja — feltéve, hogy létezik — csakis prímindexű lehet. Ezért, ha M a G-nek maximális alcsoportja s indexe p prím, akkor[5] $pG\subseteq M\subset G$, tehát G nem algebrailag zárt. Megfordítva, ha G nem algebrailag zárt, úgy valamely p prímre $pG\subset G$. A G/pG csoport p-edrendű ciklikus csoportok direkt összege, s ezért,

[1] $\{S\}$ fogja jelenteni a csoport S részhalmaza által generált alcsoportot. $C(r)$ jelöli az r-edrendű ciklikus csoportot.

[2] 1955 februárjában.

[3] A továbbiakban — ha nem emeljük is ki mindig — csakis Abel-csoportokról lesz szó, ahol a csoportműveletet összeadásnak vesszük.

[4] *Algebrailag zártnak* (ill. más terminológia szerint *teljes*nek) akkor mondunk egy G Abel-csopor ot, ha minden természetes egész n-re $nG=G$ teljesül; itt nG jelenti G-nek azon alcsoportját, mely az ng $(g\in G)$ alakú elemekből áll. Világos, hogy G algebrai zártságahoz elegendő a $pG=G$ egyenlőségek teljesülését megkövetelni minden p prímszámra vonatkozóan. Az algebrailag zárt csoportok szerkezetét teljesen ismerjük: ezek a racionális számok additív csoportjával izomorf s Prüfer-féle csoportok direkt összegére bonthatók. (Prüfer-féle csoport izomorf a p-, p^2-, ... fokú komplex egységgyökök csoportjával; itt p tetszőleges prímszámot jelöl.)

[5] A $\subseteq$ jel tartalmazást, míg $\subset$ valódi tartalmazást jelöl.

ha a direkt összeadandók közül egyet (amely lehet az egyetlen is) elhagyjuk, G/pG-nek s ennek megfelelően G-nek is egy p indexű, tehát maximális alcsoportját nyerjük.

E bizonyításból az is kiolvasható, hogy ha M a G Abel-csoport egyetlen maximális alcsoportja s indexe p, akkor $M=pG$, míg minden, p-től különböző q prímre $qG=G$. Sőt az is látható, hogy

2. LEMMA. *A G Abel-csoportnak akkor és csak akkor van egyetlen maximális alcsoportja, ha van oly p prím, hogy pG a G-nek p indexű alcsoportja és minden más q prímre $qG=G$.*

3. LEMMA. *Legyen*[6] $G=A+B$. *G-nek akkor és csak akkor van egyetlen maximális alcsoportja, ha A és B közül az egyik algebrailag zárt, a másiknak pedig ismét pontosan egy maximális alcsoportja van.*

E lemma igazolása céljából tegyük fel, hogy G-nek egyetlen maximális alcsoportja van. G nem lehet algebrailag zárt, tehát A és B nem mindketten algebrailag zártak. Világos, hogy ha A' az A-nak s B' a B-nek maximális alcsoportja, akkor $A'+B$ és $A+B'$ különböző maximális alcsoportjai lennének G-nek. Ezért A, B egyike az 1. lemma szerint algebrailag zárt, másikának pedig nyilván nem lehet 1-nél több maximális alcsoportja. Megfordítva, ha $G=A+B$, A algebrailag zárt s B-nek pontosan egy, mondjuk p indexű maximális alcsoportja van (ez a 2. lemma szerint éppen pB), úgy $pG=$ $=pA+pB=A+pB$ indexe G-ben p, míg a p-től különböző q prímekre: $qG=qA+qB=A+B=G$, ahonnan a 2. lemma szerint folyik az állítás.

Tekintsük most a G kommutatív csoportot, melynek éppen egy maximális alcsoportja van. Vegyük G-nek A maximális algebrailag zárt alcsoportját; ez — ismert tétel[7] szerint — direkt összeadandója G-nek: $G=A+B$, ahol B redukált csoport (azaz nincs algebrailag zárt alcsoportja $\neq 0$). A 3. lemma szerint B-nek pontosan egy maximális alcsoportja van, s így vizsgálatainkban elegendő redukált csoportokra szorítkozni.

Jelentsen ezentúl B oly redukált Abel-csoportot, melynek egyetlen maximális alcsoportja van. Valamely p-re pB az egyetlen, mégpedig p indexű maximális alcsoport, míg $qB=B$ minden más prím q-ra.

Ha B nem torziómentes, akkor torzióalcsoportja, T, B redukáltsága miatt nem lehet algebrailag zárt s nyilván $pT\subset T$, míg $qT=T$ a p-től különböző q prímekre. Világos, hogy T/pT p-edrendű ciklikus csoport, s így T-nek minden $a(\notin pT)$ elemére $T=\{a, pT\}$. Legyen a minimális rendű ilyen elem; a rendje nyilván p-hatvány: p^k. Belátjuk, hogy $\{a\}$ szervāns[8] alcsoportja

[6] $A+B$ az A és B csoportok direkt összegét jelöli.

[7] BAER tétele szerint minden algebrailag zárt csoport direkt összeadandója bármely őt tartalmazó Abel-csoportnak.

[8] A G csoport H alcsoportját *szervánsnak* mondjuk, ha az $nx=h(\in H)$ egyenletnek G-ben való megoldhatóságából mindig következik, hogy van ezen egyenletnek megoldása

T-nek. Valóban, ha $p^{k-1}a = p^k b$ $(b \in T)$ lenne, akkor $p^{k-1}(a-pb) = 0$ s az a-ról tett feltevés miatt $a-pb \in pT$, $a \in pT$, ellentmondás. De ekkor $\{a\}$ direkt összeadandója is T-nek: $T = \{a\} + T'$, ahol a 3. lemma szerint T' algebrailag zárt, vagyis $T' = 0$. T mint véges csoport direkt összeadandója B-nek: $B = T + B'$. Itt B'-nek a 3. lemma szerint ismét algebrailag zártnak kell lenni, azaz B' is $= 0$. Ezek szerint $B \simeq C(p^k)$. Megfordítva: nyilvánvaló, hogy $C(p^k)$-nek csak egy maximális alcsoportja van.

Ha B torziómentes, akkor tekintsük B alcsoportjainak monoton csökkenő $B \supset pB \supset p^2B \supset \cdots$ láncát. A B/p^nB p^n-edrendű ciklikus csoportot reprezentáljuk a $\operatorname{mod} p^n$ maradékosztályok additív csoportjával, mégpedig úgy, hogy a $\operatorname{mod} p^n$ maradékosztályok a $\operatorname{mod} p^{n-1}$ maradékosztályoknak éppoly továbbosztásai legyenek, mint a $\operatorname{mod} p^nB$ maradékosztályok a $\operatorname{mod} p^{n-1}B$ maradékosztályoknak. Ezáltal a $B \sim B/p^nB$ természetes homomorfizmusnál B minden a elemének megfelel egy meghatározott

$$\pi_a = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_n p^n + \cdots \qquad (0 \leqq c_n \leqq p-1)$$

p-adikus egész n-edik szelete. Minthogy a p^nB csoportok metszete algebrailag zárt, azaz B redukáltsága miatt 0, azért $a \neq 0$ esetén $\pi_a \neq 0$, tehát az $a \to \pi_a$ megfeleltetés B-nek izomorf leképezése a p-adikus egészek P additív csoportjának egy R alcsoportjára. Bebizonyítjuk, hogy R a P-nek szerváns alcsoportja, vagyis minden egész n-re $nR = R \cap nP$. Mivel $qR = R$, $qP = P$ minden $q (\neq p)$ prímre, ezért elegendő $p^kR = R \cap p^kP$ fennállását igazolni. Az $a \to \pi_a$ leképezés definíciója mutatja, hogy R-nek nem minden eleme osztható p-vel, tehát $\{R, p^kP\} = P$. Az izomorfizmus-tétel miatt

$$C(p^k) \simeq P/p^kP = \{R, p^kP\}/p^kP \simeq R/(p^kP \cap R),$$

tehát $p^kP \cap R$ indexe R-ben p^k. Mivel biztosan $p^kP \cap R \subseteq p^kR$ és p^kR indexe R-ben legalább p^k, ezért $p^kP \cap R = p^kR$, vagyis R szerváns P-ben. — Megfordítva, legyen R a p-adikus egészek P csoportjának szerváns alcsoportja. Ekkor $qR = R$ minden $q (\neq p)$ prímre, továbbá pR maximális alcsoportja R-nek, mivel $R/pR = R/(pP \cap R) \simeq \{R, pP\}/pP = P/pP \simeq C(p)$. Ha most S tetszőleges maximális alcsoportja R-nek, úgy $R/S \simeq C(p)$. De ekkor R minden x elemére $px \in S$, azaz $pR \subseteq S$, $S = pR$. Ennélfogva R-nek csak egyetlen maximális alcsoportja van.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

TÉTEL. *A G Abel-csoportnak akkor és csakis akkor van pontosan egy maximális alcsoportja, ha $G = A + B$ alakú, ahol A tetszőleges algebrailag zárt csoport és B vagy prímhatványrendű ciklikus csoport, vagy pedig a p-adikus egészek additív csoportjának valamely szerváns alcsoportjával izomorf.*

H-ban is. Ezzel ekvivalens követelmény az, hogy $nH = H \cap nG$ minden egész n-re. p-csoportokban nyilván elegendő az $n = p^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ esetekre szorítkozni. Fontos tény, hogy korlátos elemrendű szerváns alcsoport mindig direkt összeadandója a csoportnak.