AZ ELEKTRON MOZGÁSEGYENLETE

HORVÁTH JÁNOS a fizikai tudományok kandidátusa

Összefoglalás

A dolgozat az elektron mozgásegyenletével kapcsolatos problémákkal foglalkozik, figyelembe véve az elektron mágneses nyomatékának és az elektromágneses térnek a kölcsönhatását is.

Bevezetés

Az elektron mozgásegyenletével kapcsolatos problémák régóta foglalkoztatják azokat, akiket az elektromágneses térrel, ill. az elektromágneses térnek és töltésnek a kölcsönhatásával kapcsolatos kérdések érdekelnek. Az első úttörő vizsgálatokat ezen a téren, az elektronelmélet megindítója, H. A. LORENTZ (1916) végezte,[1] aki először vizsgálta azt a kérdést, hogyan befolyásolja az elektron által keltett elektromágneses tér, az ún. *sajáttér*, az elektronnak a mozgását. Abban az időben az elektron saját mágnesesnyomatéka még nem volt ismeres és így LORENTZ csak az elektron töltésének és az elektromágneses térnek a kölcsönhatását tanulmányozta.

A problémát újra, a nem olyan régen elhúnyt kiváló orosz fizikus, J. I. FRENKEL (1926) elevenítette fel, aki már figyelembe vette az elektron saját-mágneses nyomatékát is, de nem volt tekintettel a mágneses momentum által keltett sajáttérnek az elektron mozgására való visszahatásra.

Annak ellenére, hogy ebben az időben az elektronelméletnek még számos exisztenciális jellegű nyilt problémája volt, melyek közül csak az elektron saját-energiájával, ill. az elektromágneses tömegével kapcsolatos nehézségekre kívánok utalni, az elektronelmélet történetében hosszabb, kissé terméketlenebbnek mondható időszak következett.

A modern elektronelmélet csak P. A. M. DIRAC (1938) vizsgálataival indult meg tizenöt évvel ezelőtt. Ebben nagy része volt részben annak, amint arra DIRAC is rámutatott idézett munkájában, hogy a huszas évek végén és a harmincas évek elején a hirtelen kibontakozó kvantummechanika annyira lekötötte a kutatók érdeklődését, hogy mintegy, nem maradt idő az elektron-

[1] A nevek után írt évszámok egyben irodalmi utalást jelentenek. A felhasznált irodalom a dolgozat végén található meg.

elmélet megfelelő kifejlesztésére; részben pedig, kétségtelenül, fontos szerepet játszott az a körülmény is, hogy sokan éppen a kvantumelmélettől és a vele kapcsolatban kifejlődött kvantumelektrodinamikától remélték az elektronelmélet alapproblémáinak automatikus megoldását.

Míg azonban a kvantumelmélet, ill. a kvantummechanika pl. az atomelmélet számos problémáját valóban automatikusan megoldotta, addig a kvantumelektrodinamika pl. a vákuum-polarizációval kapcsolatban további nehézségeket vetett felszínre. Így mindinkább nyilvánvalóvá vált, hogy a klasszikus elektronelmélet problémáinak a megoldását a klasszikus elmélet keretei közt kell keresni.

Az alapvető problémák és a történeti vonatkozások e vázlatos áttekintésénél meg kell még röviden emlékeznem G. MIE (1912, 1913) klasszikus vizsgálatairól. MIE ugyanis megállapította, hogy amennyiben a relativitási elvvel és az energia megmaradási elvével összhangban akarunk maradni, úgy az elektronnal kapcsolatos problémák két probléma körül csoportosulnak. Részint meg kell tudni magyarázni azt a közismert tényt, hogy minden elektronnak pontosan ugyanakkora a töltése; tehát valamiképpen fel kell deríteni azt a MAXWELL-elmélet szempontjából érthetetlen, természeti törvényt, melynek következtében az összes lehetséges töltéskonfigurációk közül éppen az elektrontöltésnek, ill. az elektrontöltés egész számú többszörösének megfelelő töltésmennyiség stabilis. Végül pedig meg kell indokolni azt, hogy minden elektron véges és azonos nyugalmi tömeggel rendelkezik.

A kvantumelmélet az első problémára kielégítő választ adott azzal, hogy az elektrontöltést az elektromosság elemi kvantumának tekinti, a második problémára azonban nem sikerült kielégítő választ adni. A nehézséget, amint az közismert, az jelenti, hogy pontszerű elektron esetében az elektron elektromágneses tömege végtelenné válik, viszont véges kiterjedésű elektron nem illeszthető be, minden további nélkül a relativisztikus tárgyalási módba.

Bár az utóbbi időben egy négy-dimenziós invariáns segédfüggvény, az ún. „alak-faktor“ bevezetésével H. MCMANUS-nak és R. E. PEIERLS-nek (1948) sikerült a véges kiterjedésű elektront is beillesztenie a relativisztikus elektronelméletbe és ezek a vizsgálatok kétségtelenül igen jelentősek, mégis a továbbiakban az elektront pontszerűnek fogom tekinteni. Ezt nemcsak azért teszem, mert az említett elmélet esetében az elektron mozgásegyenlete integro-differenciálegyenlet lesz, ami a matematikai tárgyalást igen megnehezíti, hanem azért is, mert úgy hiszem, hogy a pontelektron jobban megfelel az elektronnál és általában az elemi részecskékkel kapcsolatban általánosan elfogadott fogalomalkotásnak. Ha ugyanis az elektront (és az elemi részecskéket) véges kiterjedésűnek tekintjük, úgy elkerülhetetlenül felmerül az elektron belső szerkezetének a problémája. Mihelyt azonban az elektronnak és az elemi részecskéknek a belső szerkezetéről, vagy amint azt pl. a klasszikus LORENTZ-elmélet is teszi, az elektron töltéselemei közt fellépő erőről beszélünk, ellentétbe kerülünk az atomizmussal, mely szerint az elemi részecskék és így az elektron is az anyag végső építőkövei.

Ha a terek kvantumelmélete szempontjából nézzük a problémát, úgy szintén nehéz lenne a tér kvantumait véges kiterjedésűnek tekinteni így kétséges, hogy a véges kiterjedésű elektron elvileg konzekvens kiindulási alapot képezhetne.

Pontelektron esetén viszont első pillanatra elkerülhetetlennek látszanak a divergencia-nehézségek. Azonban nyilvánvalóan csak formális természetűek és nincsen fizikai gyökerük. Erre a körülményre érdekesen mutattak rá H. J. BHABHA és H. C. CORBEN (1941), akik felhívták a figyelmet arra, hogy pl. az elektron saját-energiájának végtelen volta, tisztán a saját-energia definíciójának a következménye. Ha ugyanis a klasszikus elektrodinamika szellemének megfelelően, az elektron saját-energiáját az elektron töltésétől származó elektrosztatikus energiával azonosítjuk és az eredetileg véges kiterjedésű töltést pontra húzzuk össze, úgy természetes, hogy végtelen nagy energia adódik, hiszen végtelen nagy munkát kell kifejteni ahhoz, hogy véges kiterjedésű töltést pontszerűvé zsugorítsunk. Mindaddig tehát, míg a pontelektront a véges kiterjedésű elektron határesetének tekintjük elkerülhetetlen a divergencia-nehézség. Nincs azonban sem logikai, sem pedig matematikai alapja annak, hogy az elektront, ill. az elemi részecskéket általában ilyen határmenettel értelmezzük.

A saját-energia végességével kapcsolatos formális nehézség szoros kapcsolatban van a hiperbolikus differenciálegyenletek megoldása során fellépő, tisztán matematikai természetű divergencia-nehézséggel. Így a hiperbolikus differenciálegyenletek megoldásával kapcsolatos újabb eredmények, melyek módszert adnak a nehézségek elkerülésére, automatikusan megoldják az elektronelmélet megfelelő divergencia-nehézségeit is.

Ha a pontelektron a töltésen kívül még mágneses dipolmomentummal is rendelkezik és a dipolmomentum is explicit kölcsönhatásban van az elektromágneses térrel, akkor a probléma sokkal inkább bonyolódik. Pedig ennek a problémának a megoldása is fontos és elvi jelentőségű kérdés, hiszen pl. nukleonok és a mezontér kölcsönhatásának a számításánál is hasonló nehézségek lépnek fel. Ez az oka annak, hogy az utóbbi időben többen foglalkoztak ezzel a problémával. Itt elsősorban BHABHA és CORBEN fentidézett dolgozatát kell megemlítenem, valamint hivatkozom C. M. LATTES, M. SCHÖNBERG és W. SCHÜTZER (1947), továbbá G. MARX (1952) vizsgálatára.

Míg MARX számos szerző vizsgálatához csatlakozva fenomenologikus oldalról fogta meg a problémát,[2] addig a többiek elektronelméleti alapon foglalkoztak a kérdéssel. Nevezetesen BHABHA és CORBEN a DIRAC-féle (1938) elektronelmélet alapján és LATTES, SCHÖNBERG és SCHÜTZER a LOPES—

[2] Részletesebb irodalmi utalások MARX idézett dolgozatában találhatók.

SCHÖNBERG-féle (1945) elmélet alapján tárgyalták az elektron mozgási problémáját.

A jelen vizsgálatban, szorosan csatlakozva az eredeti FRENKEL-féle gondolatmenethez, variációs elvből kiindulva vezetem le a mozgásegyenleteket, majd a probléma explicit feldolgozásánál M. RIESZ (1936, 1948) hiperbolikus differenciálegyenletek megoldására kidolgozott módszerét alkalmazom.

Egy további vizsgálat során szándékozom foglalkozni azzal a problémával, hogyan befolyásolja az elektron mágnesesnyomatékának és az elektromágneses térnek a kölcsönhatása az elektron elektromágneses tömegét, valamint a saját-energiáját. Így ezeket a problémákat a továbbiakban nem kívánom érinteni.

Tekintettel arra, hogy a hazai irodalomban a RIESZ-féle potenciálok módszere, mely a modern matematikai fizikának egy igen hatásos és sok helyen alkalmazható módszere, kevésbé ismeretes, a dolgozathoz illesztett függelékben referáltam az elmélet fontosabb eredményeit.

I. A Maxwell—Lorentz-féle egyenletek általánosítása

1. §. A tér metrikájával kapcsolatos megjegyzések. Legyen $P(\mathbf{x})$ a négydimenziós pszeudo-euklidesi térnek egy tetszés szerinti pontja. A térnek a metrikáját a

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \\ = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ívelem határozza meg, mely minden

$$dx^\mu = a^\mu_\nu dx'^\nu; \quad a^\mu_\nu a^\nu_\varrho = \delta^\mu_\nu; \quad \det(a^\mu_\nu) = +1$$

ortogonális (LORENTZ-) transzformációval szemben invariáns.

A *metrikus alaptenzor* komponensei tehát

$$g_{00} = 1, \; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ha} \quad \mu \neq \nu.$$

Rögzítsük a $P(\mathbf{x})$ pontot és a $Q(\mathbf{z})$ fussa be a tér összes pontjait. A tér pontjai annak megfelelően, hogy a köztük levő távolság négyzetének milyen az előjele:

$$r^2_{PQ} = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

három csoportba sorolhatók. Az $r^2_{PQ} = 0$ felületet *fénykúpnak* nevezzük. Az $r^2_{PQ} > 0$ pontok összessége alkotja a fénykúp *belsejét*, az $r^2_{PQ} < 0$ pontok pedig *kívül esnek* a fénykúpon. $r^2_{PQ} = 0$ esetben azok a pontok melyekre $z^0 - x^0 > 0$ az *utókúpot*, melyekre pedig $z^0 - x^0 < 0$ az *előkúpot* alkotják.

Egy tetszés szerinti felület pontjait térszerűnek, fényszerűnek, vagy időszerűnek mondjuk aszerint, amint a felület normálisa a tekintetbe vett pontban időszerű, fényszerű vagy térszerű.

A térnek azt a részét, melyet a $P(\mathfrak{x})$ ponthoz tartozó előkúp és egy térszerű pontokból álló S felület határol D_S^P-sel fogjuk jelölni. Az S felületnek azt a részét, melyet a fénykúp az S felületből kimetsz, S^P-vel jelöljük. A szokásos differenciális operációk a pszeudo-euklidesi térben is értelmezhetők.

Az egyes differenciáloperátorok közti összefüggések, valamint a háromdimenziós térbeli integráltranszformációk közvetlenül általánosíthatók. Így pl. érvényes a GREEN-féle tétel:

$$\int_{D_S^P} \{u \Box v - v \Box u\}\, dQ = -\int_{S^P} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS,$$

ahol dQ a térfogatelem, dS a felületen és $\frac{\partial}{\partial n}$ az S' felületnek a D_S^P tartomány belsejébe mutató normálisának az irányába vett differenciálhányados. Az u és v függvényekről feltesszük, hogy kétszer folytonosan differenciálhatók.[3]

2. §. A dipóltenzor. Közvetlenül az elektron saját mechanikai impulzusnyomatékának, ill. a hozzátartozó mágneses nyomatéknak a felfedezése után több kísérlet történt arra vonatkozóan, hogy az elektronspint klasszikusan leírják.[4] Ezek a próbálkozások manapság, amikor DIRAC relativisztikus kvantummechanikai elmélete egészen más alapon vezeti be az elektronspint, nagyrészt már csak történeti jelentőséggel bírnak. Mégis számunkra, minthogy mi a spinelektron klasszikus mozgásegyenletével kapcsolatos problémákkal kívánunk foglalkozni, ezek a vizsgálatok igen fontosak.

G. E. UHLENBECK és S. GOUDSMIDT hipotézisének megfelelően, tegyük fel, hogy a nyugvó elektronnak e töltésen kívül $\mathfrak{m}$ saját mágnesesnyomatéka van, mely az elektron saját-impulzusnyomatékával ($\mathfrak{s}$) a következőképpen függ össze:

$$\mathfrak{m} = -\frac{e}{m_0 c}\mathfrak{s},$$

ahol m_0 az elektron nyugalmi tömege és c a fénysebesség. Mikor ezt felteszszük, ugyanakkor hangsúlyoznunk kell, hogy a nyugvó elektronnak nincsen elektromos dipol-, kvadrupol- stb. és mágneses kvadrupol- stb. nyomatéka. Szemléletesen szólva ez annyit jelent, hogy az elektron által keltett tér olyan mintha azt egy, a középpontján átmenő tengely körül, egyenletesen forgó, homogénül elektromosan feltöltött gömb keltené.[5]

[3] L. M. RIESZ (1948).
[4] L. H. A. KRAMERS (1938).
[5] E szemléletes értelmezés közismert kritikájával nem kívánok foglalkozni.

Ha az elektront pontszerűnek tekintjük, akkor a $\mathfrak{H}$ térerősségű homogén mágneses térben a ráható forgató nyomaték $(\mathfrak{m} \times \mathfrak{H})$; tehát az elektron mágneses nyomatékának az időegységre eső változása:

$$\dot{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{m} \times \mathfrak{H}).$$

Ebből az összefüggésből azonnal következik, minthogy

$$(\dot{\mathfrak{m}}, \mathfrak{m}) = 0,$$

hogy

$$\mathfrak{m}^2 = \text{konst.}$$

Mozogjon már most az elektron $\mathfrak{v}$ sebességgel egy $\mathfrak{E}$ elektromos térerősségű térben, akkor az elektronnal együttmozgó koordinátarendszerben észlelhető mágneses térerősség

$$\mathfrak{H}' = \frac{\mathfrak{H} + \frac{1}{c}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{v})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

következésképpen

$$\dot{\mathfrak{m}} = \left\{ \mathfrak{m} \times \left[\mathfrak{H} + \frac{1}{c}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{v}) \right] \right\},$$

ha a $\frac{v^2}{c^2}$ nagyságrendű tagokat elhanyagoljuk.

Az így kapott összefüggés azonban csak akkor volna helyes, ha az $\mathfrak{m}$ vektor LORENTZ-transzformációval szemben invariáns lenne. Minthogy azonban $\mathfrak{m}$ csak egy három-dimenziós térbeli vektor, ez nem teljesülhet. Ki kell tehát egészíteni az $\mathfrak{m}$-t egy négyes-vektorrá, vagy egy másodrendű tenzorrá. Ezt a feladatot FRENKELnek sikerült megoldania, aki heurisztikusan feltételezte, hogy bevezethető egy további térbeli vektor $\mathfrak{p}$, mely kielégíti a következő relációkat.

a) Abban a koordinátarendszerben, ahol az elektron nyugszik a $\mathfrak{p}$ eltűnik.

b) Az $\mathfrak{m}$ és a $\mathfrak{p}$ vektorok LORENTZ-transzformáció esetén úgy transzformálódnak, mint a $\mathfrak{H}$ és az $\mathfrak{E}$ vektorok, tehát egy négy-dimenziós antiszimmetrikus tenzor térbeli, ill. időbeli komponensei:

$$\Sigma_{\mu\nu} \rightarrow \downarrow \quad \begin{matrix} 0 & -p_x & -p_y & -p_z \\ p_x & 0 & m_z & -m_y \\ p_y & -m_z & 0 & m_x \\ p_z & m_y & -m_x & 0 \end{matrix}$$

Ezeknek a feltételeknek elegettevő $\mathfrak{p}$ vektor valóban bevezethető és az $\mathfrak{m}$ mágneses nyomatékkal a következő összefüggésben van:

$$\mathfrak{p} = \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}\right).$$

PAULI egy megjegyzésének a felhasználásával FRENKEL ezt a következőképpen bizonyította be. Legyen $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau)$ az elektron világvonalának tetszés szerinti pontja (τ az elektron sajátideje, mely nem más mint a világvonal ívhosszúság-paramétere), akkor az elektron sebességét leíró $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{z}}{d\tau}$ sebességvektor és a $\Sigma_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu}(\tau)$ dipóltenzor segítségével képezzük a $v_\mu \Sigma^\mu_{\cdot\nu}$ négyesvektort. Az elektronnal együttmozgó koordinátarendszerben ennek a négyesvektornak el kell tűnnie, minthogy ebben a $\overline{K}$ koordinátarendszerben feltételünknek megfelelően $\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \overline{v}_3 = 0$ és $\overline{\Sigma}_{01} = \overline{\Sigma}_{02} = \overline{\Sigma}_{03} = 0$. Ebből azonban, a négyesvektorok transzformációs törvénye következtében, általánosan is következik, hogy

$$v_\mu \Sigma^\mu_{\cdot\nu} = 0 \tag{2, 1}$$

Ezt a feltételt szokás FRENKEL-féle feltételnek nevezni.

Helyettesítsük be a FRENKEL-féle feltételbe a megfelelő háromdimenziós kifejezéseket, akkor kapjuk:

$$v_\mu \Sigma^\mu_{\cdot 0} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\mathfrak{v}, \mathfrak{p}) = 0$$

és a megfelelő térbeli komponensek esetében:

$$\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}\right) - \mathfrak{p}\right\} = 0,$$

amivel a fenti összefüggést igazoltuk.

Eredményünk fizikailag annyit jelent, hogy egy olyan koordinátarendszerben, melyben az elektron $\mathfrak{v}$ sebességgel mozog, az elektronnak a sajátmágnesesdipólnyomatéka következtében elektromos dipólmomentuma is van, melynek az iránya merőleges a sebesség és a mágnesesnyomaték irányára.

Az eredményeink közvetlenül általánosíthatók arra az esetre is, mikor a mozgó részecskéknek saját-elektromosdipólnyomatéka is van.[6] Minthogy azonban a természetben ilyen tulajdonságokkal rendelkező részecskék nem ismeretesek, ezzel az általánosítással nem foglalkozunk.

A bevezetett $\Sigma_{\mu\nu}$ dipóltenzorból két invariáns képezhető:

$$I_1 = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = m^2 - p^2 \tag{2, 2}$$

[6] Az említett általánosítások megtalálhatók BHABHA és CORBEN, valamint LATTES, SCHÖNBERG és SCHÜTZER munkáiban.

és

$$I_2 = \Sigma_{23}\Sigma_{10} + \Sigma_{31}\Sigma_{20} + \Sigma_{12}\Sigma_{30} = (\mathfrak{m}, \mathfrak{p}).$$

I_2 a FRENKEL-féle feltétel következtében elektron esetében azonosan eltűnik. Az I_1 invarianciájából pedig következik, hogy

$$m^2 - p^2 = \overline{\mathfrak{m}}^2.$$

Ez az összefüggés azonban a következő alakba írható:

$$|\mathfrak{m}| = \frac{|\overline{\mathfrak{m}}|}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}},$$

ahol $v_\perp$ a $\mathfrak{v}$ vektornak az $\mathfrak{m}$-re merőleges komponensét jelenti. Ily módon (2,2)-ből közvetlenül megkaphatjuk az $|\mathfrak{m}|$ transzformációs formuláját.

A továbbiakban az egy-elektronproblémával fogunk foglalkozni. Többelektronproblémát igyekeztek, legalább is formálisan, LATTES, SCHÖNBERGER és SCHÜTZER (1947) figyelembe venni. A problémának azonban ez a formális általánosítása tekintettel arra, hogy pl. a többszörös-sajátidőt[7] nem sikerült bevezetni, nem jelent elvi általánosítást és csupán a formulák írásmódját bonyolítja.

Egy-elektron probléma esetén a Σ dipól eloszlási sűrűség az elektron világvonalára lokalizálódik. $\Sigma_{\mu\nu}$ analitikus előállítása éppen úgy történik az elektronelméletben, mint az áramsűrűség négyes-vektorának az előállítása:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = e\int_{-\infty}^{\tau_0} \mathbf{v}(\tau)\cdot\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau))\, d\tau,$$

következésképpen:

$$\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = g\int_{-\infty}^{\tau_0} S_{\mu\nu}(\tau)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau))\, d\tau,$$

ahol g a *dipól-töltés* és $S_{\mu\nu}(\tau)$ az elektron világvonala mentén értelmezett antiszimmetrikus tenzor, melynek ki kell elégítenie a (2, 1) alatti FRENKEL-féle feltételt, továbbá per difinitiórum

(2, 3) $$S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = \text{konst} = 1.$$

Továbbá $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau))$ a DIRAC-féle δ.

A (2, 3) alatti reláció voltaképpen az elektron négyes-sebessége esetén fennálló, közismert relációnak:

(2, 4) $$v^2 = v_\mu v^\mu = 1$$

a megfelelője és számolástechnikai könnyítést fog okozni a továbbiakban.

Eddig az elektron

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau)$$

világvonalával kapcsolatban közelebbi megszorítást nem tettünk. Tudjuk azon-

[7] „Multiple-time formalism" L. pl. G. WENTZEL (1949).

ban már a klasszikus elektronelméletből, hogy a *világvonal* szükségszerint *„időszerű“ görbe*, ami azt jelenti, hogy érintője mindenütt időszerű. Ennek természetesen így is kell lennie, hiszen az elektron sebessége sem lehet nagyobb a fénysebességnél.

N. E. FREMBERG (1946) után, a világvonalról feltételezzük, hogy $\tau = -\infty$ esetben időszerű asszimptotája van, ami a valóságban azt a feltevést jelenti, hogy az elektron kezdetben egyenesvonalú egyenletes mozgást végzett. Analítikusan ezt a feltevést a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{v}_{-\infty}\tau + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^k,$$

ahol

$$\mathbf{v}_{-\infty} = \lim_{\tau=-\infty} \mathbf{v}(\tau) = \lim_{\tau=-\infty} \frac{d\mathbf{z}}{d\tau}.$$

Az elektron sebességével kapcsolatban feltesszük még, hogy

(2, 6)
$$\frac{dz^0}{dt} > 0,$$

amivel biztosítjuk azt, hogy a görbe mentén, bármilyen t paramétert is vezetünk be, a t paraméter változásával, a görbe befutása egyirányú lesz.

Említettük az $S_{\mu\nu}$ definiálásánál, hogy $S_{\mu\nu}$-nek ki kell elégítenie a (2, 1) alatti FRENKEL-féle feltételt. A továbbiakban ennek a feltételnek a figyelembe vétele felesleges komplikációkat okozna, célszerű ezért, amint azt pl. MARX is teszi,[8] bevezetni az

(2, 7)
$$M_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + v^\varrho S_{[\mu|\varrho|} v_{\nu]}$$

tenzort,[9] mely amint az közvetlenül belátható, azonosan kielégíti az

$$M_{\mu\nu} v^\nu = 0$$

FRENKEL-féle relációt.

3. §. A probléma LAGRANGE-*függvénye.* A téregyenleteket és a mozgásegyenleteket

(3, 1)
$$\delta \int L\, dQ = 0$$

[8] G. MARX (1952).

[9] Az írásmód egyszerűsítése céljából a SCHOUTEN-féle szimbolikához hasonlóan a továbbiakban alkalmazni fogom a következő rövidítést:

$$A_{[\mu} B_{\nu]} \equiv A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu.$$

Azokat az indexeket (ha vannak), melyek ebben a kommutációban nem vesznek részt, függőleges vonás közé helyezem

$$A_{[\mu|\varrho\sigma\ldots|}{}^{|k\tau\ldots|} B_{|\varepsilon\ldots|}{}^{|\delta\ldots|}{}_{\nu]} \equiv A_{\mu\varrho\sigma\ldots}{}^{k\tau\ldots} B_{\varepsilon\ldots}{}^{\delta\ldots}{}_{\nu} - A_{\nu\varrho\sigma\ldots}{}^{k\tau\ldots} B_{\varepsilon\ldots}{}^{\delta\ldots}{}_{\mu}.$$

Tehát pl. (2, 7) a következő kifejezés rövidítésére szolgál

$$M_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + v^\varrho S_{\mu\varrho} v_\nu - v^\varrho S_{\nu\varrho} v_\mu.$$

Részletesebben L: J. A. SCHOUTEN (1924). A nála szereplő $\frac{1}{2}$ faktorokat elhagytam.

típusú variációselvből kívánjuk levezetni, ahol L a probléma LAGRANGE-féle függvénye.

Mindenekelőtt gondoljuk meg a következőket. A mozzgó elektronnak a töltése is és a mágnesesmomentuma is külön-külön gerjeszt elektromágneses teret és explicit kölcsönhatásba lép a külső elektromágneses térrel.

Legyen a külső elektromágneses tér tértenzora $H_{\mu\nu}$ és vektorpotenciáljának komponensei Φ_μ. Akkor

$$H_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} \Phi_{\nu]}.$$

A továbbiakban ezt a külső elektromágneses teret adottnak és állandónak tekintjük.

Az elektronnak a töltése, ill. a mágnesesnyomatéka által gerjesztett sajátterének a tértenzora legyen $F_{(1)\mu\nu}$ ill. $F_{(2)\mu\nu}$ a megfelelő vektorpotenciálok pedig $A_{(1)\mu}$ ill. $A_{(2)\mu}$. Tehát az elektron sajátterének a megfelelő mennyiségei

(3, 2) $$F_{\mu\nu} = F_{(1)\mu\nu} + F_{(2)\mu\nu},$$

ill.

(3, 3) $$A_\mu = A_{(1)\mu} + A_{(2)\mu}.$$

Ezen előállítás következtében az elektron töltése explicit kölcsönhatásba lép nemcsak a külső elektromágneses térrel, hanem a mágneses momentum által keltett térrel is. Hasonló a helyzet a mágneses momentum esetében is, melynek az elektron töltése által keltett térrel való kölcsönhatását is figyelembe kell vennünk. Ha már most arra gondolunk, hogy ezen felül az elektron töltése, ill. mágneses momentuma által gerjesztett térnek magára a gerjesztő elektrontöltésre, ill. mágneses momentumra való visszahatását is számításba kell vennünk, akkor azonnal láthatjuk, hogy a mágneses dipólmomentum figyelembe vétele milyen komplikációt okoz. Hogy ezek a kölcsönhatások valóban fellépnek a valóságban az nem kétséges és a *priori* nehéz lenne megmondani e kölcsönhatások nagyságrendjét. Az eddigi irodalomban mindezeket a kölcsönhatásokat szisztematikusan nem vették figyelembe, ami kétségtelenül azt mutatja, hogy a problémát a korábbi vizsgálatok tükrében nem tekinthetjük lezártnak. Amint látni fogjuk a továbbiakban a probléma explicit feldolgozásánál, számos számolás technikai nehézséggel találkozunk és nem hiszem, hogy a kérdés a RIESZ-potenciálok alkalmazása nélkül a gyakorlatban, könnyen végigszámolható lenne.

Ebben a részben az elektron által gerjesztett teret egységesen kezeljük és csak a III. részben vesszük figyelembe a (3, 2) és a (3, 3) alatti felbontást. Anélkül, hogy a továbbiakban erre külön utalnék, könnyen beláthatjuk, hogy ez meggondolásaink során speciális nehézséget nem okoz.

A rendszer tehát, melynek a LAGRANGE-féle függvényét meg akarjuk határozni, a mozgó elektronból és az $(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})$ tértenzorú elektromágneses térből áll.

A téregyenletek és a mozgásegyenletek levezetésénél H. WEYL (1918) módszerét követjük.[10] Ennek megfelelően *egyenlőre* eltekintünk attól, hogy az elektron nyugalmi tömege m_0, töltése e és mágneses dipolnyomatékának a töltéssűrűsége g csak az elektron világvonalára lokalizálódik és feltesszük, hogy μ_0, ε_0 ill. γ_0 állandó töltéssűrűséggel eloszlik a három-dimenziós térben. Ennek a feltételnek a jelentőségét, mely elvi nehézségekbe nem ütközik, mert csak egy *ad hoc* segédfeltevés, a mozgásegyenletek levezetésénél fogjuk látni.

Ezek előrebocsátása után a problémánk LAGRANGE-függvénye a következő alakba írható:

$$L = \mu_0 + T_{\text{kölcs}} + \frac{1}{16\pi}(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}) - \\ - \varepsilon_0(A_\mu + \Phi_\mu)v^\mu - \frac{1}{2}\gamma_0(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})M^{\mu\nu}. \tag{3,4}$$

Ebben a kifejezésben az első tag az elektron mechanikai nyugalmi energiáját adja.[11] A $T_{\text{kölcs}}$ tagot FRENKEL vezette be,[12] anélkül, hogy explicite megadta volna; csupán a variációját *definiálta*, melyet mi a mozgásegyenletek levezetésénél klasszikus analógiák alapján megalapozunk. A harmadik tag a tér teljes energiája, melyet FRENKEL, minthogy ő a részecske által keltett saját-terének a részecske mozgására való visszahatását nem vette figyelembe, elhagyott[12] és csak LATTES, SCHÖNBERG és SCHÜTZER munkájában található fel újra.[13] Ők azonban nem voltak tekintettel arra, hogy a tér egy részét a mozgó részecske gerjeszti, ami a végleges mozgásegyenleteknél jelentkezik.

Az utolsó két tag az elektronnak a töltése, ill. mágneses momentuma következtében fellépő potenciális energiája.

A FRENKEL-féle eredeti LAGRANGE-függvényben[12] a harmadik tagon kívül nem szerepel az μ_0-nak megfelelő tag és ő $M_{\mu\nu}$ helyett $S_{\mu\nu}$-t használ.[14] Ilyen körülmények között azonban neki külön figyelembe kell venni a (2, 4) és (2, 1) alatti feltételeket. Ezt ő meg is teszi és később LAGRANGE-féle multiplikátorokkal szorozva a feltételeket hozzáadja a szokásos módon a variált LAGRANGE-függvényhez. A LAGRANGE-féle multiplikátorok meghatározásánál azután kiderül, hogy az egyik éppen az elektron nyugalmi tömege, a másik pedig olyan tagot eredményez a mozgásegyenletekben, mely éppen $M_{\mu\nu}$ használata miatt nálunk is fel fog lépni. Ez a körülmény a mélyebb oka annak,

[10] L. pl. H. THIRRING (1924). Ennek a feltevésnek a szemléletes tartalmát a mozgásegyenletek levezetésénél még diszkutálni fogjuk.

[11] Ne feledkezzünk meg arról, hogy nálunk a fénysebesség egységnyi, tehát ez a tag $\mu_0 c^2$-nek felel meg.

[12] L. J. I. FRENKEL (1926).

[13] L. C. M. LATTES, M. SCHÖNBERG és W. SCHÜTZER (1947).

[14] A mi jelölésünknek megfelelően.

hogy az elektron tömegének, töltéssűrűségének és dipoltöltéssűrűségének a korábbi „elkenése“ nem okoz elvi nehézséget.

Amint említettük a téregyenleteket és a mozgásegyenleteket a (3, 1) alatti variációs egyenletekből vezetjük le. Most röviden foglalkozunk még azzal a problémával, hogyan kell a variációt lebonyolítanunk.[15]

Kétféleképpen variálhatunk ugyanis. Vagy az elektromágneses potenciálokat tekintjük függetlenül variálható függvényeknek és az elektron világvonalát rögzítve képzeljük, vagy pedig a világvonalat variáljuk és a potenciálokat tekintjük adottaknak. Az első esetben az elektromágneses tér téregyenletét az utóbbi esetben pedig a mozgási egyenleteket kapjuk meg.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy az elektron által gerjesztett $F_{\mu\nu}$ tér variációja csak a mozgásegyenleteknél játszik szerepet, hiszen $F_{\mu\nu}$ implicite csak az elektron világvonalának a függvénye, viszont a $H_{\mu\nu}$ variációja pedig a téregyenletek levezetésénél veendő tekintetbe és eltűnik a mozgásegyenletek levezetésénél.

Ezek előrebocsátása után először a téregyenleteket vezetjük le, majd a II. részben a mozgásegyenletek meghatározásával foglalkozunk.

4. §. Az elektromágneses tér alapegyenleteinek a levezetése variációs elvből. Írjuk a (3, 1) alatti variációsprobléma hatásintegrálját a következő alakban.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 =$$

$$-\int \Big\{ \mu_0 + T_{\text{kölcs}} + \frac{1}{16\pi}(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}) - \tag{4, 1}$$

$$-(A_\mu + \Phi_\mu)s^\mu - \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nv})\Sigma^{\mu\nu}\Big\} dQ.$$

Amint az imént említettük a téregyenletek levezetésénél a külsőtér potenciálját, tehát a Φ_μ függvényt, variáljuk. Így

$$\delta W = \int \Big\{ \frac{1}{8\pi}(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})\delta H_{\mu\nu} - s^\mu \delta\Phi_\mu - \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}\delta H_{\mu\nu} \Big\} dQ.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\frac{1}{2}\int (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu})\delta H_{\mu\nu} dQ = \int (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu})\nabla_\mu \delta\Phi_\nu dQ =$$

$$= -\int (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu})\nabla_\nu \delta\Phi_\mu dQ,$$

ha, amint az szokásos, feltesszük, hogy $\delta\Phi_\mu$ az integrációs tartomány hatá-

[15] Ezzel kapcsolatban utalok egy korábbi vizsgálatomra, ahol W. PAULI (1921) vizsgálataikoz kapcsolódva általánosabb szempontból tárgyalom a problémát (J. I. HORVÁTH und A. MOÓR (1952)).

rán eltűnik, úgy (3, 1) alapján kapjuk, hogy

$$\delta W = \int \left\{ \frac{1}{4\pi} \nabla_\nu (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu}) - s^\mu \right\} \delta \Phi_\mu dQ = 0.$$

Minthogy ennek az egyenletnek tetszés szerinti $\delta\Phi_\mu$ variáció esetén teljesülnie kell, kapjuk a téregyenleteket

$$\frac{1}{4\pi} \nabla_\nu (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu}) - s^\mu = 0,$$

melyet a következő alakba írhatunk át:

$$(4,2) \qquad \nabla_\nu (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}) = 4\pi s^\mu + 4\pi \nabla_\nu \Sigma^{\mu\nu}.$$

Feltételezhetjük a továbbiakban, hogy $H_{\mu\nu}$, tehát a külső tér tértenzora eleget tesz a vákuum téregyenletének:

$$(4,3) \qquad \nabla_\nu H^{\mu\nu} = 0,$$

akkor tehát kapjuk a sajáttér téregyenletét

$$(4,4) \qquad \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi (s^\mu + \nabla_\nu \Sigma^{\mu\nu}),$$

mely a továbbiakban kiindulási egyenletünk lesz.

Jegyezzük most meg, hogy a (4, 3) egyenlet nem jelenti a probléma lényeges specializálását, mert, ha $H_{\mu\nu}$ nem a vákuum tértenzora lenne, hanem valamilyen σ^μ négyesáramból lenne levezethető, akkor a viszonyok csak annyiban változnának, hogy a variációsproblémánkban az s^μ négyesáram helyett az $(s^\mu + \sigma^\mu)$ négyesáram szerepelne. Könnyen belátható azonban, hogy ebben az esetben a sajáttér téregyenlete szintén a (4, 4) alatti egyenlet lenne. Viszont a mozgásegyenletek levezetésénél σ^μ úgyis kiesnék, minthogy független az elektron világvonalától.

A (4, 4) egyenlet alapján azt mondhatjuk, hogy a sajátteret az $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ négyes-áramsűrűség és a $\sum(\mathbf{x}) = \{\Sigma^\mu\} = \{\nabla_\nu \Sigma^{\mu\nu}\}$ dipóláramsűrűség gerjeszti. Gondoljunk már most az $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ és a $\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ függvényeknek a 2 §-ban megadott definíciójára, akkor azonnal látjuk a definícióban szereplő τ_0 retardált időnek a mélyebb értelmét. Nevezetesen nyilvánvaló, hogy a $P(\mathbf{x})$ pontbeli gerjesztés az elektron világvonalán levő töltés és dipolsűrűségnek csak attól a részétől függ, mely a $P(\mathbf{x})$ tartójú előkúpba esik. Hiszen a világvonalnak csak erről a szakaszáról jövő hatások juthatnak el a $P(\mathbf{x})$ pontba.

Végül azonnal itt rámutatok arra a nehézségre, mely a további explicit számításoknál nehézséget fog okozni. A dipoláramsűrűség definíciójánál a $P(\mathbf{x})$ pont koordinátái szerinti parciális differenciálás szerepel. Ha azonban a parciális differenciálhányados definíciójára gondolunk, azonnal láthatjuk, hogy a koordináták infenitezimális megnövelésénél megváltozik a (2, 5) alatti definíciósegyenlet következtében a τ_0 retardált idő is. Így minden olyan függvény esetében, mely a helykoordinátáknak és a retardált időnek a függvénye (mint amilyen pl. maga az $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ és a $\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ függvény is), a parciális differenciálhányados kiszámításánál figyelembe kell venni a retardált időnek az $\mathbf{x}$-től való függését is.

Ha A_μ az elektron sajátterének négyespotenciálja, akkor az $F_{\mu\nu}$ tértenzor a következőképpen állítható elő:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} A_{\nu]}. \tag{4, 5}$$

Feltéve már most a szokott módon, hogy az A_μ négyes potenciál kielégíti a LORENTZ-féle feltételt:

$$\nabla^\mu A_\mu = 0,$$

akkor a (4, 4) alatti béregyenletek a következő alakba írhatók:

$$\Box \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{s} - 4\pi \Sigma;$$

vagy komponensekre kiírva:

$$\Box A^\mu = -4\pi s^\mu - 4\pi \nabla_\nu \Sigma^{\mu\nu}. \tag{4, 6}$$

Ez a négyes-potenciálok alapegyenlete. Látjuk tehát, hogy a négyes-potenciálok az inhomogén hullámegyenlet megoldásai.

II. A mozgásegyenletek levezetése

5. §. *Általános megjegyzések a mozgásegyenletekkel kapcsolatban.* A mágneses momentummal rendelkező elektron mozgásegyenletének a levezetésénél BHABHA és CORBEN[16], csatlakozva DIRAC[17] megállapításaihoz, néhány fizikai szempontból igen mély és tanulságos megjegyzést tesznek. Mi a továbbiakban a (3, 1) alatti variációselvből kiindulva vezetjük le a mozgási egyenleteket, mégis hasznos lesz, ha foglalkozunk az említett meggondolásokkal.

Tekintsük egy pillanatra adottnak az elektron világvonalát és vegyük azt körül egy infenitezimális sugarú hengerrel. A világvonal két végpontjában zárjuk le a hengert egy-egy, a világvonalra merőleges, hipersíkkal. Tekintsük már most az elektron által keltett tér feszültség-energia-tenzorának a fluxusát ezen a zárt felületen át. Határátmenettel megmutatható, hogy ez a fluxus a henger palástján eltűnik, ha a henger sugara zéróhoz konvergál, következésképpen a fluxus csak a henger két véglapján történő fluxusból áll; vagyis a fluxus a feszültség-energia-tenzornak a világvonal két „két végpontjában" felvett értéktől függ[18]. Matematikailag ez annyit jelent, hogy az integrandusznak teljes differenciálhányadosnak kell lennie, ami természetesen tetszés szerinti sebesség és mágnesesnyomaték esetén általában nem teljesül. Éppen ennek a tisztán matematikai természetű feltételnek a segítségével választhatjuk ki a lehetséges mozgási állapotok közül azt a mozgási állapotot, mely a valóságos mozgás folyamán megvalósul. Az így meghatározott fluxus végered-

[16] L. H. J. BHABHA and H. C. CORBEN (1941).

[17] L. P. A. M. DIRAC (1938).

[18] Az egyszerűbb beszédmód kedvéért „végpontoknak" nevezem a világvonalnak és infinitezimális hengerünk két véglapjának metszéspontját.

ményben az elektron energiájának és teljes impulzusának[19] a megváltozását adja. Tehát az energia- és impulzusmegmaradási tétel, ill. a III. NEWTON-féle axióma alapján, ez a fluxus az elektronra ható sajáterőt adja.

A továbbiakban majd látni fogjuk, hogy mindazok a kifejezések, melyek az említett fluxus kiszámításához szükségesek explicite rendelkezésünkre fognak állni. Mégis mi nem ezt az utat választjuk a sajáterő kiszámításánál. Részint azért, mert a számítás ezen az úton, bár egyszerű, de rendkívül hosszadalmas[16], részben pedig azért, mert ez a módszer, további segédfeltevések nélkül nem egyértelmű eredményre vezet. Annak a függvénynek a megszerkesztése ugyanis, melynek az integrandusz teljes differenciálja, sokféleképpen elvégezhető.[17]

Sokkal természetesebbnek látszik az a kívánság, hogy a mozgási egyenleteket, amint azt mi is célul tűztük ki, variációselvből vezessük le. A problémával ebben a megfogalmazásban először FRENKEL (1926) foglalkozott. Említettem már, hogy ő nem vette figyelembe az elektronra ható sajáterőt. LATTES, SCHÖNBERG és SCHÜTZER kiegészítve az eredeti módszert, a TETRODE—FOKKER-féle variációselv megfelelő általánosításával[20] vezették le a mozgásegyenleteket. Ők azonban részben nem vették figyelembe a sajáttérnek az elektron világvonalától való függését, részben pedig a LOPES—SCHÖNBERG-féle elméletre alapozták meggondolásaikat, így szükségessé válik a mozgásegyenletek új levezetése.

6. §. A mozgásegyenletek levezetése variációselvből. A mozgásegyenletek levezetését a 3. §-ban már előkészítettük. Amint arra már ott utaltunk, az elektron tömegét, töltését és dipóltöltését a háromdimenziós térben konstans sűrűséggel elkenve képzeljük. Már most a háromdimenziós teret egy tetszés szerint megválasztott időpillanatban osszuk fel infinitezimális elemi tartományokra. Egy-egy ilyen tartományra eső tömeg, töltés, ill. dipóltöltés legyen dm, de ill. dg. Az idő változásával ezeknek a tartományoknak a négydimenziós térben egy-egy infinitezimális cső fog megfelelni, mely a tekintetbe vett tömeggel, töltéssel és dipóltöltéssel rendelkező szubsztancia infinitezimális darabjának a világvonalát veszi körül.

Ha már most μ_0 a tekintetbe vett tömeg, ε_0 a töltés és γ_0 pedig a dipoltöltés sűrűség, akkor írhatjuk, hogy

$$\mu_0 dQ = \mu_0 dq\, d\tau = dm\, d\tau,$$
$$\varepsilon_0 dQ = \varepsilon_0 dq\, d\tau = de\, d\tau,$$
$$\gamma_0 dQ = \gamma_0 dq\, d\tau = dg\, d\tau.$$

Az elmondott szemléletes meggondolás matematikai tartalma a következő: Az eredeti világvonal helyett tekintsük a világvonalaknak a négydimen-

[19] A teljes impulzus most is a transzlációs mozgás impulzusából és a mágneses momentumnak kapcsolatban álló sajátimpulzusból tevődik össze.

[20] L. H. TETRODE (1922) és A. D. FOKKER (1929).

ziós teret egyszeresen befedő seregét és a variációt ezen görbesereg szimultán variálásával hajtsuk végre.

Ezen meggondolások alapján a (4, 1) alatti hatásfüggvény a következő alakba írható.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 =$$

$$= \int dm \int d\tau + \int T_{\text{kölcs}} dQ + \frac{1}{16\pi}\int (F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})\, dQ -$$

$$- \int de \int (A_\mu + \Phi_\mu)\, v^\mu\, d\tau - \frac{1}{2}\int dg \int (F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})\, M^{\mu\nu}\, d\tau.$$

Az integrációs tartományok határát külön nem jelöltem meg, minthogy az okoskodásunkban nem játszik szerepet. Mindössze a szokott módon annyit tételezünk fel, hogy a világvonal variációja, $\delta \mathbf{z}$, a végpontokon eltűnik.

A variáció végrehajtásánál legyünk tekintettel arra, hogy feltételünk értelmében a három-dimenzióstérben a tömeg, töltés és dipóltöltéseloszlás állandó. Ennek következtében, akárhogyan variáljuk is a világvonalat, vagy szemléletesen: akárhogyan deformáljuk is az infinitezimális csőrendszerünket, a három-dimenziós tartományokra kiterjesztett

$$m_0 = \int dm, \quad e = \int de, \quad \text{és} \quad g = \int dg \tag{6, 1}$$

integrálok variációja eltűnik. Így tulajdonképpen csak a világvonal mentén vett sajátidőszerinti integrálok variációját kell kiszámítanunk.

Ezek előrebocsátása után W egyes tagjainak a variációját a következőképpen számíthatjuk ki:

a)

$$\delta W_1 = \int dm\, \delta \int d\tau.$$

Ismeretes azonban, hogy

$$\int d\tau = \int w\, dt$$

ahol

$$w = \sqrt{\left(\frac{dz^0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz^1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz^2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz^3}{dt}\right)^2}$$

és t egy tetszés szerinti paraméter a világvonal mentén. Tegyük fel, hogy t a valóságos mozgásnak megfelelő világvonal mentén éppen az ív ívhosszúságparaméter. Akkor

$$\delta \int d\tau = \int \frac{1}{w} \left\{ \frac{dz^0}{dt}\, \delta \frac{dz^0}{dt} - \frac{dz^1}{dt}\, \delta \frac{dz^1}{dt} - \frac{dz^2}{dt}\, \delta \frac{dz^2}{dt} - \frac{dz^3}{dt}\, \delta \frac{dz^3}{dt} \right\} dt =$$

$$= \int \frac{1}{w}\, g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{dt}\, \delta \frac{dz^\nu}{dt}\, dt.$$

Tekintettel arra, hogy a valóságos (tehát nem variált) görbe mentén

$$dt = d\tau; \quad w = 1; \frac{dz^\mu}{dt} = \frac{dz^\mu}{d\tau} = v^\mu,$$

parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{w} g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \delta \frac{dz^\nu}{d\tau} d\tau = \int \frac{dv_\lambda}{d\tau} \delta z^\lambda d\tau;$$

következésképpen:

$$\delta W_1 = \int dm\, \delta \int d\tau = \int \mu_0 \frac{dv_\lambda}{d\tau} \delta z^\lambda dQ.$$

Ebből a formulából közvetlenül láthatjuk, hogy (2, 4) alatti egyenletet mellékfeltételül és a μ_0-t LAGRANGE-féle multiplikátorul használva pontosan ugyanehhez az eredményhez jutottunk volna.

b)

$$W_3 = \frac{1}{16\pi} \int \{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F_{\mu\nu} H^{\mu\nu} + H_{\mu\nu} H^{\mu\nu}\} dQ.$$

A $H_{\mu\nu}$ külső elektromágneses tér energiája független a világvonal variációjától, következésképpen

$$\delta \int H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} dQ = 0.$$

Különben kapjuk, hogy

$$\delta W_3 = \frac{1}{8\pi} \int \{(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}) \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \nabla_\lambda H^{\mu\nu}\} \delta z^\lambda dQ.$$

Ez a tag az előző szerzőknél nem szerepel, ami azt jelenti, hogy ők a tér teljes energiájának a változását a világvonal variálásakor nem vették figyelembe.

c)

$$\delta W_4 = -\int de\, \delta \int (A_\mu + \Phi_\mu) \dot{z}^\mu d\tau.$$

Közvetlen számítással kapjuk, hogy

$$\delta \int (A_\mu + \Phi_\mu) \dot{z}^\mu d\tau = \int \{(\delta A_\mu + \delta \Phi_\mu) \dot{z}^\mu + (A_\mu + \Phi_\mu) \delta \dot{z}^\mu d\tau =$$

$$= \int \Big\{ (\nabla_\lambda A_\mu + \nabla_\lambda \Phi_\mu) \dot{z}^\mu \delta z^\lambda +$$

$$+ \frac{d}{d\tau} [(A_\mu + \Phi_\mu) \delta z^\mu] - (\nabla_\lambda A_\mu + \nabla_\lambda \Phi_\mu) \dot{z}^\lambda \delta z^\mu \Big\} d\tau.$$

Következésképpen (a harmadik tagban a λ és μ összegezési indexek felcserélése után);

$$\delta W_4 = -\int \varepsilon_0 \Big\{ (F_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu}) \dot{z}^\mu \delta z^\lambda + \frac{d}{d\tau} [(A_\mu + \Phi_\mu) \delta z^\mu] \Big\} dQ.$$

Közben felhasználtuk a tértenzorok és a négyes-potenciálok közti összefüggést.

d)

$$\delta W_5 = -\frac{1}{2}\int dg\,\delta\int (F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})\,M^{\mu\nu}\,d\tau.$$

Ennek a kiszámításánál a $\delta M^{\mu\nu}$, pontosabban a $\delta S^{\mu\nu}$, kiszámítása jelent problémát, amit FRENKEL nem-relativisztikus meggondolások kézenfekvő általánosításával a következőképpen végzett el:

A mágneses momentum $\delta\mathfrak{v}$ infinitezimális elforgatása esetén az $(\mathfrak{m}\times\mathfrak{H})$ forgatónyomaték munkája, az energia-megmaradási elv következtében megegyezik az $\mathfrak{m}$ mágnesesmomentum $-(\mathfrak{m}\mathfrak{H})$ potenciális energiájának a $-\delta(-\mathfrak{m}\mathfrak{H})=(\delta\mathfrak{m}\mathfrak{H})$ csökkenésével. Következésképpen

$$(\delta\mathfrak{m},\mathfrak{H})=(\delta\mathfrak{v},(\mathfrak{m}\times\mathfrak{H}))=((\delta\mathfrak{v}\times\mathfrak{m}),\mathfrak{H}),$$

ahol

$$\delta\mathfrak{m}=(\delta\mathfrak{v}\times\mathfrak{m}).$$

A megfelelő négy-dimenziós kifejezés az elektron nyugalmi rendszerében

$$\delta S^{\mu\nu}=\delta\Omega^{[\mu|\varrho|}S^{\nu]}_{\cdot\;\varrho},$$

ahol $\delta\Omega^{\mu\nu}$ egy antiszimmetrikus tenzor és térbeli komponensei megegyeznek a $\delta\mathfrak{v}$ vektor komponenseivel. Természetesen általában sem a $\delta\mathfrak{v}$, sem pedig a $\delta\Omega^{\mu\nu}$ nem teljes differenciálok, ami azt jelenti, hogy nincsen az x^μ koordinátáknak megfelelő $\Omega^{\mu\nu}$ „szögkoordináta" (nem-holonom rendszer)[21].

Mármost ezeknek a felhasználásával $\delta\Omega^{\mu\nu}$ a következő alakba írható

$$\begin{aligned}
\delta M^{\mu\nu} &= \delta S^{\mu\nu}+\dot z^{\varrho}\,\delta S^{[\mu}_{\cdot\;|\varrho|}\dot z^{\nu]}+\delta\dot z^{\varrho}S^{[\mu}_{\cdot\;|\varrho|}\dot z^{\nu]}=\\
&= \delta\Omega^{[\mu|\varrho|}S^{\nu]}_{\cdot\;\varrho}+\delta\dot z^{\varrho}S^{[\mu}_{\cdot\;|\varrho|}\dot z^{\nu]}+\\
&\quad+\dot z^{\sigma}(\delta\Omega^{[\mu|\varrho|}S_{|\sigma\varrho|}\dot z^{\nu]}-\delta\Omega_{\sigma}{}^{\varrho}_{\cdot}S^{[\mu}_{\cdot\;|\varrho|}\dot z^{\nu]}).
\end{aligned}$$

A számítás további része nem jelent újdonságot:

$$\begin{aligned}
\delta W_5 = -\frac{1}{2}\int\gamma_0\Big\{&[F_{[\mu|\sigma|}S^{|\varrho|}_{\cdot\;\;\nu]}+H_{[\mu|\sigma|}S^{|\sigma|}_{\cdot\;\;\nu]}+\\
&+(F_{\varrho\sigma}+H_{\varrho\sigma})\,\dot z_{\mu}S^{[\sigma}_{\cdot\;|\nu|}\dot z^{\varrho]}]\,\delta\Omega^{\mu\nu}+\\
&+[(\nabla_\lambda F_{\mu\nu}+\nabla_\lambda H_{\mu\nu})S^{\mu\nu}-(\nabla_\varrho F_{\mu\nu}+\nabla_\varrho H_{\mu\nu})\,\dot z^{\varrho}S^{[\mu}_{\cdot\;|\lambda|}\dot z^{\nu]}-\\
&-(F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})\,\dot S^{[\mu}_{\cdot\;|\lambda|}\dot z^{\nu]}-(F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})\,S^{[\mu}_{\cdot\;|\lambda|}\ddot z^{\nu]}]\,\delta z^{\lambda}+\\
&+\frac{d}{d\tau}[(F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})\,S^{[\mu}_{\cdot\;|\lambda|}\dot z^{\nu]}\delta z^{\lambda}]\Big\}\,dQ.
\end{aligned}$$

e)

$$\delta W_2=\delta\int T_{\text{kölcs}}\,dQ=\int\delta T_{\text{kölcs}}\,dQ.$$

[21] L. J. I. FRENKEL (1926).

Ennek a tagnak a variációját hagytam utoljára, mert ezt FRENKEL nem részletezi, hanem, anélkül, hogy $T_{\text{kölcs}}$ explicit kifejezését megadná, a variációját a következőképpen *definiálja:*

$$\delta T_{\text{kölcs}} = \frac{\gamma_0}{2\varrho} S_{\mu\nu} \delta \omega^{\mu\nu}$$

ahol $\varrho = \frac{e}{m_0}$ és $\omega^{\mu\nu}$ egy antiszimmetrikus tenzor, melynek a térbeli komponensei megegyeznek a háromdimenziós szögsebességvektor komponenseivel:

$$\vec{\omega} = \{\omega^{32}, \omega^{13}, \omega^{21}\}.$$

A $\delta T_{\text{kölcs}}$ kifejezésre adott formulát a többi szerzők is átveszik FRENKELtől anélkül, hogy érdemleges megjegyzést fűznének hozzá[22]; pedig a d. alattihoz hasonló meggondolással egyszerűen igazolható:

Nem-relativisztikus esetben, merev test transzlációs és rotációs mozgása közti kölcsönhatási energia, ha $\mathfrak{r}_s$ a merevtest súlypontjának a koordinátája

$$t_{\text{kölcs}} = m_0 \mathfrak{v}_0 (\vec{\omega} \times \mathfrak{r}_s).$$

Ez egyszerű átalakítással a következő alakba írható

$$t_{\text{kölcs}} = \vec{\omega}(\mathfrak{r}_s \times m_0 \mathfrak{v}_0) = (\mathfrak{s} \cdot \vec{\omega}) = -\frac{1}{\varrho}(\mathfrak{m}, \vec{\omega}),$$

ahol felhasználtuk az elektron spinje és mágnesesnyomatéka közti összefüggést, feltételezve, hogy az elektron súlypontjához rögzített koordinátarendszerben $\mathfrak{s}$ az elektron saját mechanikai impulzus nyomatékát állítja elő. Így

$$\delta t_{\text{kölcs}} = -\frac{1}{\varrho}(\mathfrak{m}, \vec{\omega}).$$

Míg $t_{\text{kölcs}}$ merev test mozgása esetén az ismert okokból eltűnik, elektron esetében, melynek saját mechanikai impulzus nyomatéka van, a $\delta t_{\text{kölcs}} \neq 0$. Bevezetve már most a fentebb definiált $\omega^{\mu\nu}$ szögsebesség tenzort, mint d. alatt, írhatjuk

$$\delta T_{\text{kölcs}} = \frac{\gamma_0}{2\varrho} S_{\mu\nu} \delta \omega^{\mu\nu}.$$

A korábban definiált $\delta \Omega^{\mu\nu}$ és a $\delta \omega^{\mu\nu}$ tenzorok közti összefüggés[23]

$$\frac{d}{d\tau} \delta \Omega^{\mu\nu} = \delta \omega^{\mu\nu}.$$

Következésképpen

$$\delta W_2 = \int \frac{\gamma_0}{2\varrho} S_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau}(\delta \Omega^{\mu\nu}) dQ = \int dg \int \frac{1}{2\varrho} S_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau}(\delta \Omega^{\mu\nu}) d\tau =$$

$$= \int dg \cdot \frac{1}{2\varrho} \int \left\{ \frac{d}{d\tau}(S_{\mu\nu} \delta \Omega^{\mu\nu}) - \dot{S}_{\mu\nu} \delta \Omega^{\mu\nu} \right\} d\tau$$

22 L. C. M. LATTES, M. SCHÖNBERG and W. SCHÜTZER (1947). 221. old.
23 L. J. I. FRENKEL (1926).

tehát

$$\delta W_2 = \frac{1}{2\varrho}\int \gamma_0 \left\{ \frac{d}{dt}(S_{\mu\nu}\delta\Omega^{\mu\nu}) - \dot{S}_{\mu\nu}\delta\Omega^{\mu\nu} \right\} dQ.$$

Miután az egyes tagok variációját így egyenként kiszámítottuk, eredményeinket összesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\delta W = \int \Big\{ \Big[&-\frac{\gamma_0}{2\varrho}\dot{S}_{\mu\nu} - \frac{\gamma_0}{2} F_{[\mu|\sigma|} S^{|\sigma|}{}_{\nu]} - \frac{\gamma_0}{2} H_{[\mu|\sigma|} S^{|\sigma|}{}_{\nu]} - \\ &- \frac{\gamma_0}{2}(F_{\varrho\sigma} + H_{\varrho\sigma})\dot{z}_\mu S^{[\sigma}{}_{|\nu|}\dot{z}^{\varrho]} \Big] \delta\Omega^{\mu\nu} + \Big[\mu_0 \ddot{z}_\lambda + \frac{1}{8\pi}(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})\nabla_\lambda F^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu}\nabla_\lambda H^{\mu\nu} - \varepsilon_0 \frac{d}{d\tau}\left([F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}] S^{[\mu}{}_{|\lambda|}\dot{z}^{\nu]}\right) \Big] \delta z^\lambda + \\ &+ \frac{d}{d\tau}\Big[\frac{\gamma_0}{2\varrho} S_{\mu\nu}\delta\Omega^{\mu\nu} - \left(\varepsilon_0 [A_\lambda + \Phi_\lambda] + \frac{\gamma_0}{2}[F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}] S^{[\mu}{}_{|\nu|}\dot{z}^{\lambda]}\right)\delta z^\lambda \Big] \Big\} dQ.\end{aligned}$$

Ha már most integrálunkat éppen úgy felbontjuk, mint az egyes tagok variációjának a kiszámításánál tettük és tekintetbe vesszük a (6, 1) alatti összefüggéseket, akkor fenti integrálunk ismét egy τ szerinti integrálra korlátozódik. Minthogy integrációs tartományunk végpontjaiban δz^λ és $\delta\Omega^{\mu\nu}$ feltételeink értelmében eltűnik, integranduszunk harmadik tagja az integrálásnál kiesik.

A δz^λ és $\delta\Omega^{\mu\nu}$ tetszés szerintiek lehetnek és egymástól függetlenek, tehát a (3, 1) alatti variációselvünk a következő mozgásegyenletekre vezet:

$$\frac{1}{\varrho}\dot{S}_{\mu\nu} = S_{[\mu}{}^{|\sigma|} F_{|\sigma|\nu]} + S_{[\mu}{}^{|\sigma|} H_{|\sigma|\nu]} + (F_{\varrho\sigma} + H_{\varrho\sigma}) S^{[\varrho}{}_{|\nu|}\dot{z}^{\sigma]}\dot{z}_\mu$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left\{ m_0 v_\lambda + \frac{1}{2} g (F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}) S^{[\mu}{}_{|\lambda|} v^{\nu]} \right\} &= e(F_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu}) v^\mu + \\ + \frac{1}{2} g S^{\mu\nu}\nabla_\lambda F_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi}(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})\nabla_\lambda F_{\mu\nu} &- \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu}\nabla_\lambda H_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Mozgásegyenleteinket áttekinthetőbb alakba írhatjuk, ha bevezetjük a következő rövidítéseket

(6, 2) $$D_{\sigma\nu} \equiv F_{\sigma\nu} - F_{[\sigma|\varrho|} v_{\nu]} v^\varrho$$

(6, 3) $$K_{\sigma\nu} \equiv H_{\sigma\nu} - H_{[\sigma|\varrho|} v_{\nu]} v^\varrho$$

(6, 4) $$\begin{aligned} f_\lambda \equiv e F_{\lambda\mu} v^\mu + \frac{1}{2} g S^{\mu\nu}\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, g \frac{d}{dt}(F_{\mu\nu} v^{[\mu} S^{\nu]}{}_\lambda) + \\ + \frac{1}{8\pi}(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu}\nabla_\lambda H_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Itt $D_{\sigma\nu}$ nyilvánvalóan az elektron által keltett térnek a visszahatását tartalmazza az elektronra. $K_{\sigma\nu}$ a külső tér és az elektron mágneses nyomatéka közti közvetlen kölcsönhatást adja. Végül pedig az f_λ a keresett LORENTZ-féle sajáterő.

A LORENTZ-féle sajáterő kifejezésében szereplő utolsó két tag FRENKEL-nél és más szerzőknél nem szerepel. Ennek az oka az, hogy az eddigiekben a hatásintegrálban szereplő W_3 tagot figyelmen kívül hagyták. Meg szeretném említeni ezen a helyen még a következőket. E két tag első pillanatra abban különbözik a sajáterő kifejezésében szereplő többi tagtól, hogy explicite nem tartalmazza a sajáttér és az elektron mozgását meghatározó állapothatározók közti összefüggést. Tekintettel azonban arra, hogy $F_{\mu\nu}$ a v_μ és az $S_{\mu\nu}$ függvénye, a kölcsönhatás implicite megvan. E problémával más helyen kívánok majd a továbbiakban részletesen foglalkozni.

Ezek előrebocsátása után elektronunk mozgásegyenletei a következő végleges alakra hozhatók:

$$\frac{1}{\varrho}\dot{S}_{\mu\nu}=S_{[\mu}{}^{|\sigma|}{}_{\cdot}D_{|\sigma|\nu]}+S_{[\mu}{}^{|\sigma|}{}_{\cdot}K_{|\sigma|\nu]}; \tag{6, 5}$$

valamint

$$\frac{d}{d\tau}\left\{m_0 v_\lambda+\frac{1}{2}gH_{\mu\nu}S^{[\mu}{}_{\cdot|\lambda|}v^{\nu]}\right\}=f_\lambda+eH_{\lambda\mu}v^\mu+\frac{1}{2}gS^{\mu\nu}\nabla_\lambda H_{\mu\nu}. \tag{6, 6}$$

Egyenleteink közül az első az elektron rotációs mozgását, a második pedig a transzlációs mozgását határozza meg. Mint érdekes részleteredményt kaptuk, hogy a kettő nem független egymástól.

A továbbiakban a sajáttér állapothatározóit számítjuk ki a RIESZ-potenciálok segítségével. A sajáterővel kapcsolatos további problémánkkal azonban, amint arra a bevezetésben is utaltam, egy későbbi vizsgálatban kívánok foglalkozni.

III. A Riesz-potenciálok alkalmazása a tér állapothatározóinak kiszámításánál

7. §. A Riesz-potenciálok. A hullámegyenlet megoldásával kapcsolatos alapprobléma a következőképpen fogalmazható meg[24]:

Legyen $f(\mathbf{x})$ egy, az egész négy-dimenziós pszeudo-EUKLIDESI-térben értelmezett, függvény. Határozzuk meg azt a Φ függvényt mely kielégíti a

$$\square\Phi=f \tag{7, 1}$$

hullámegyenletet, feltéve, hogy Φ parciális differenciálhányadosaival együtt, a CAUCHY-problémánál megszokott módon egy adott felületen meghatárczott értékeket vesz fel. Feltesszük továbbá, hogy mind f, mind pedig Φ és differenciálhányadosai rendelkeznek azokkal a folytonossági és regularitási tulajdonságokkal, melyekre a soronkövetkezőkben szükség lesz.

[24] Részletesebben l. a FÜGGELÉKet.

M. RIESZ (1936, 1948) bevezette a következő négy-dimenziós, RIEMANN—LIOUVILLE-típusú, integrált

$$I^{(\alpha)}f(P)=\frac{1}{H(\alpha)}\int_{D_S^P} f(Q)r_{PQ}^{\alpha-4}dQ, \tag{7, 2}$$

ahol

$$H(\alpha)=2^{\alpha-1}\pi\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right). \tag{7, 3}$$

Ha f folytonos, akkor ez az integrál $\alpha>2$ esetben konvergens és analitikus folytatással, mint az α komplex paraméter függvénye, $\alpha\leqq 2$ esetre is definiálható.

Integrálunk mindenekelőtt kielégíti az alábbi alapvető relációkat

$$I^{(0)}f(P)=f(P)\,;\ I^{(\alpha)}I^{(\beta)}=I^{(\alpha+\beta)}\,;\ \Box I^{(\alpha+2)}=I^{(\alpha)}$$

valahányszor f és S első differenciálhányadosaikkal együtt folytonosak.

A mi esetünkben csak arra a speciális esetre kell szorítkoznunk, amikor a töltés eloszlás csak egy világvonalra korlátozódik és leírható egy a világvonal mentén értelmezett, $F(t)$ függvény segítségével. Ekkor a probléma RIESZ-potenciálja a következő alakba írható:

$$A^{(\alpha)}(P)=\frac{1}{H(\alpha)}\int_{t_S}^{t_0} F(t)r_{PQ}^{\alpha-4}dt \tag{7, 6}$$

ahol t_S annak a pontnak megfelelő paraméterérték, ahol a görbe metszi a fenti S felületet és t_0 a P-hez tartozó retardáltpontnak megfelelő paraméterérték. Ha az elektron világvonalának van időszerű asszimptotája[25], amit a továbbiakban feltételezünk, akkor a (7, 6) alatti integrálnak $t=-\infty$ esetben is van értelme.[26]

8. §. Az elektronelméleti probléma Riesz-potenciáljai. Ezek előrebocsátása után a (4, 6) alatti

$$\Box A^{\mu}=-4\pi s^{\mu}-4\pi\nabla_{\nu}\Sigma^{\mu\nu} \tag{4, 6}$$

hullámegyenlet RIESZ-potenciáljai a következőképpen állíthatók elő:

$$A^{(\alpha)\mu}=A_{(1)}^{(\alpha)\mu}+A_{(2)}^{(\alpha)\mu} \tag{8, 1}$$

ahol

$$A_{(1)}^{(\alpha)\mu}(P)=-\frac{4\pi e}{H(\alpha)}\int_{-\infty}^{\tau_0} v^{\mu}(Q)r_{PQ}^{\alpha-4}dQ \tag{8, 2}$$

[25] L. 2. §.
[26] Részletesebben l. FÜGGELÉK 5.

és

$$A_{(2)}^{(\alpha)\mu}(P) = -\frac{4\pi g}{H(\alpha)} \nabla_\nu \int_{-\infty}^{\tau_0} S^{\mu\nu}(Q) r_{PQ}^{\alpha-4} dQ. \tag{8, 3}$$

A felbontásunkból nyilvánvalóan látszik, hogy $A_{(1)}^{(\alpha)\mu}$ a mágneses momentum nélküli elektron RIESZ-potenciálja, az $A_{(2)}^{(\alpha)\mu}$ pedig a térnek a dipólmomentumból származó részét állítja elő. A továbbiakban egyenlőre feltételezzük, hogy P nem pontja az elektron világvonalának.

9. §. Új integrációs változók. Integráljaink explicit kiszámításának megkönnyítése céljából a τ és az

$$R \equiv r^2 = \mathbf{r}^2 = r_{PQ}^2 = r^\mu r_\mu = (\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau))^2 = (x^\mu - z^\mu(\tau))(x_\mu - z_\mu(\tau)) \tag{9, 1}$$

változók helyett vezessük be az $\mathbf{x}$ és az

$$r = \|\mathbf{r}\| = (r^\mu r_\mu)^{1/2}$$

változókat független változóknak.

Állítsuk most össze azokat az összefüggéseket ezek között a változók között, melyeket a továbbiakban ismételten fel fogunk használni.

Mindenekelőtt elektron sebessége a következőképpen fejezhető ki

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \tag{9, 2}$$

Ezek felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{\varkappa}{r} \tag{9, 3}$$

ahol

$$\varkappa = (\mathbf{r}, \mathbf{v}). \tag{9, 4}$$

Tekintsük most az $\mathbf{x}$ és az r változókat függetlennek, akkor (9, 1) felhasználásával kapjuk, hogy

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial (r^2)}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x^\mu}, \mathbf{r}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^\mu}, \mathbf{r}\right) = r_\mu - \varkappa \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu},$$

tekintettel arra, hogy

$$\frac{\partial r^\lambda}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\lambda; \tag{9, 5}$$

következőképpen:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} = \frac{r_\mu}{\varkappa}. \tag{9, 6}$$

Hasonlóképpen közvetlenül beláthatjuk, hogy

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial x^\mu} = v_\mu = -\frac{\partial r_\mu}{\partial \tau}. \tag{9, 7}$$

Ezek felhasználásával integráljainkat közvetlenül kiértékelhetjük.

Hogy formulagyüjteményünket teljessé tegyük alakítsuk át a (7. 3) alatti normálási faktort a következőképpen:

$$(9,8)\qquad H(\alpha)=2^{\alpha-1}\pi\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)=\frac{4\pi 2^{\alpha-2}\left\{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^2}{\alpha-2}.$$

Végül ismét felhívom a figyelmet arra, hogy τ és $\mathbf{x}$ nem függetlenek egymástól, következésképpen valahányszor $F=F(\mathbf{x},\tau)$, ahol F különben egy tetszés szerinti függvény

$$(9,9)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\right)_r=\frac{\partial F}{\partial x^\mu}+\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^\mu}=\frac{\partial F}{\partial x^\mu}+\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{r_\mu}{\varkappa}.$$

Formulánkban az r index arra utal, hogy az x^μ szerinti parciális differenciáláskor az r, melyet most az új integrációs változók bevezetésével független változónak tekintünk, állandó marad.[27] Ennek az összefüggésnek a mélyebb okára a 4. §-ban rámutattunk.

10. §. A Lienard—Wiechert-féle potenciálok. Számítsuk ki mindenek előtt a RIESZ-féle potenciálok segitségével az elektron töltése által gerjesztett sajáttér potenciáljait, melyeket LIENARD—WIECHERT-féle potenciálok néven a klasszikus elektronelméletből jól ismerünk[29]:

A potenciálok (8, 2) alatti definíciójából, az új változók bevezetésével, (9, 3) és (9, 8) alapján kapjuk:

$$(10,1)\qquad A_{(1)}^{(\alpha)\mu}(P)=-\frac{e(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_0^\infty \frac{v^\mu}{\varkappa}r^{\alpha-3}dr.$$

Alkalmazzuk most a következő általános érvényű formulát:

$$(10,2)\qquad \lim_{\beta\to+0}\beta\int_0^\infty f(x)x^{\beta-1}dx=f(0),$$

mely teljesül valahányszor az integrál valamilyen $\beta>0$ esetben konvergens és az $f(x)$ folytonos az $x=0$ pontban.

Akkor, minthogy a (10, 1) alatti integrál $2<\alpha<3$ esetben konvergens, kapjuk $\alpha\to 2+0$ esetben, hogy

$$(10,3)\qquad A_{(1)}^{\mu}(P)=-\left\{\frac{ev^\mu}{\varkappa}\right\}_0=-\left\{\frac{ev^\mu}{(\mathbf{r},\mathbf{v})}\right\}_0,$$

ahol az index arra utal, hogy a zárójelbe tett kifejezés $r^2=0$, tehát retardált időben veendő.

[27] Ezen a ponton köszönetemet fejezem ki S. B. NILSSON kollégámnak, aki szíves útbaigazításaival segítségemre volt.

[29] L. N. E. FREMBERG (1946).

11. §. A Bhabha—Corben-féle potenciál. Határozzuk most meg az elektron mágnesesnyomatéka által keltett sajáttér potenciáljait.

Az új változás bevezetésével (8, 3), felhasználva (9, 3) és a (9, 8) alatti formuláinkat, a következő alakba írható:

$$A_{(2)}^{(\alpha)\mu}(P)=\frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\nabla_\nu\int_0^\infty\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}r^{\alpha-3}dr. \tag{11, 1}$$

Most látjuk a 9. §-ban bevezetett új változók előnyeit. Minthogy ugyanis feltételünknek megfelelően x^μ és r függetlenek, az integráció és a differenciálás sorrendje felcserélhető, következésképpen (11, 1) a következő alakba írható

$$A_{(2)}^{(\alpha)\mu}(P)=\frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_0^\infty\nabla_\nu\left(\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right)r^{\alpha-3}dr.$$

A (9, 9) alatti formulánk alkalmazásával

$$\nabla_\nu\left(\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right)=-\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}\frac{\partial k}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right)\frac{\partial\tau}{\partial x^\nu}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\nu S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right).$$

Tehát

$$A_{(2)}^{(\alpha)\mu}=\frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_0^\infty\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\nu S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right)r^{\alpha-3}dr. \tag{11, 2}$$

A (10, 2) alatti segédtétel alapján, minthogy integrálunk $2<\alpha<5$ esetben konvergens, kapjuk $\alpha\to 2+0$ esetben, hogy

$$A_{(2)}{}^{\mu}=g\left\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\nu S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right)\right\}_0 \tag{11, 3}$$

vagy részletesen:

$$A_{(2)}{}^{\mu}=\frac{g}{(\mathbf{r},\mathbf{v})^3}\{(r_\nu\dot S^{\nu\mu}-v_\nu S^{\nu\mu})(\mathbf{r},\mathbf{v})+r_\nu S^{\nu\mu}-r_\nu S^{\nu\mu}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{v}})\}_0, \tag{11, 4}$$

ahol a zárójel mellé írt index mindkét esetben azt jelenti, hogy a zárójelben levő kifejezés retardált időben veendő.

Ezek a potenciálok már BHABHA és CORBEN dolgozatában is szerepelnek. Ők azonban más úton vezették le.

12. §. Az elektromágneses tértenzor. Az $A_{(1)}{}^{\mu}$ és $A_{(2)}{}^{\mu}$ potenciálok ismeretében most már megvan a lehetőség arra, hogy a (3, 2) alatt bevezetett $F_{(1)}{}^{\mu\nu}$ és $F_{(2)}{}^{\mu\nu}$ tenzorokat is meghatározhassuk. A szokott (4, 5) alatti rotációképzés segítségével formálisan közvetlenül előállíthatjuk őket

$$F_{(1)\mu\nu}=\nabla_{[\mu}A_{(1)\nu]}\ \text{ill.}\ F_{(2)\mu\nu}=\nabla_{[\mu}A_{(2)\nu]}$$

alakban. Az explicit számításra azonban a (10, 3) és a (11, 4) formuláink nem alkalmasak, mert ezekben a formulákban a zárójelben levő mennyiségeket retardált időben kell venni, a τ_0 retardált idő viszont, amint arra a 4. §-ban már rámutattam, nem független x^μ-től.

A nehézséget igen egyszerűen elkerülhetjük, ha az $A_{(1)}^{(\alpha)\mu}$ és az $A_{(2)}^{(\alpha)\mu}$ RIESZ-potenciálok segítségével előbb definiáljuk az

$$F_{(1)\mu\nu}^{(\alpha)} = \nabla_{[\mu} A_{(1)\nu]}^{(\alpha)} \text{ ill. } F_{(2)\mu\nu}^{(\alpha)} = \nabla_{[\mu} A_{(2)\nu]}^{(\alpha)} \tag{12, 1}$$

tenzorokat, majd ezeket a RIESZ-féle módszert követve, az α paraméter függvényének tekintjük és $\alpha \to 2+0$, analitikus folytatással, a problémánk megoldását szolgáltató

$$F_{(1)\mu\nu} = F_{(1)\mu\nu}^{(2)} \text{ ill. } F_{(2)\mu\nu} = F_{(2)\mu\nu}^{(2)} \tag{12, 2}$$

tértenzorokat előállíthatjuk.

Rátérve már most az $F_{(1)\mu\nu}^{(\alpha)}$ tenzor explicit kiszámítására a (9, 9) alatti formulánk alkalmazásával kapjuk

$$\nabla_\mu \left(\frac{v_\nu}{\varkappa} \right) = \frac{\partial r_\mu}{\partial \tau} \frac{v_\nu}{\varkappa^2} + \frac{r_\mu}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{v_\nu}{\partial \varkappa} \right) = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\mu v_\nu}{\varkappa} \right);$$

következésképpen:

$$F_{(1)\mu\nu}^{(\alpha)} = \frac{-e(\alpha-2)}{2^{\alpha-2} \{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_{[\mu} v_{\nu]}}{\varkappa} \right) r^{\alpha-3} dr. \tag{12, 3}$$

Tehát (10, 2) alatti formulánk alapján a (12, 2) alatti határátmenettel kapjuk, hogy

$$F_{(1)\mu\nu} = e \left\{ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{v_{[\mu} r_{\nu]}}{\varkappa} \right) \right\}_0 \tag{12, 4}$$

ill. a számításokat explicite elvégezve

$$F_{(1)\mu\nu} = e \left\{ \frac{v_{[\mu} r_{\nu]}}{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^3} [1 - (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}})] - \frac{\dot{v}_{[\mu} r_{\nu]}}{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2} \right\}_0, \tag{12, 5}$$

ahol az index ismét azt jelenti, hogy a zárójelbe tett mennyiség retardált időben veendő.

Hasonlóképpen számítjuk ki az $F_{(2)\mu\nu}$ tenzort is. Alkalmazva ismét a (9, 9) alatti formulát:

$$\nabla_\mu \nabla_\varrho \left(\frac{S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) = \nabla_\mu \left\{ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) \right\}_\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) \right\} \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\varkappa} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{S_{\mu\nu}}{\varkappa} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\mu r_\varrho S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) \right] \right\}.$$

Közben felhasználtuk a (9, 7) alatti összefüggést. Behelyettesítve ezt a (12, 1) ill. a (11, 2) alatti egyenletbe kapjuk, hogy

$$F_{(2)\mu\nu}^{(\alpha)} = \frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2} \{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{S_{\mu\nu}}{\varkappa} \right) + \right. \tag{12, 6}$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho r_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]}}{\varkappa} \right) \right] \right\} r^{\alpha-3} dr.$$

Ez az integrál $2 < \alpha < 7$ esetben konvergens, tehát a (12, 2) alatti analitikus folytatással

$$F_{(2)\mu\nu} = g \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left[2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{S_{\mu\nu}}{\varkappa} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{r_\varrho r_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]}}{\varkappa} \right] \right) \right] \right\}_0 \tag{12,7}$$

valamint

$$\begin{aligned} F_{(2)\mu\nu} = g \Big\{ & 2 \frac{1-\varkappa'}{\varkappa^2} S_{\mu\nu} + \frac{2}{\varkappa} \dot{S}_{\mu\nu} \Big) + \\ & + 3 \frac{(1-\varkappa')^2}{\varkappa^4} r_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]} r_\varrho - \frac{\varkappa''}{\varkappa^3} r_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]} r_\varrho \Big) - \\ & - 3 \frac{1-\varkappa'}{\varkappa^3} \Big(v_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]} r_\varrho + r_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]} v_\varrho - r_{[\mu} \dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]} r_\varrho + \\ & + \frac{1}{\varkappa^2} \Big(- \dot{v}_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]} r_\varrho + 2 v_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]} v_\varrho - 2 v_{[\mu} \dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]} r_\varrho \Big) - \\ & - r_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]} \dot{v}_\varrho - 2 r_{[\mu} \dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]} v_\varrho + r_{[\mu} \ddot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]} r_\varrho \Big\}_0 \end{aligned} \tag{12,8}$$

ahol $\varkappa' = (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}})$, $\varkappa'' = (\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{v}})$ és az index arra utal, hogy a zárójelben levő kifejezések retardált időben veendők.

Összehasonlítva eredményünket BHABHA és CORBEN más úton levezetett formuláival teljes egyezésben vagyunk. Egyedüli eltérést az jelent, hogy a (12, 8) formulában hátulról a negyedik tagban náluk $\dot{S}^{\varrho}{}_{\nu}$ helyett $S^{\varrho}{}_{\nu}$ és a harmadik tagban a „—" előjel helyett „+" előjel áll. Ez az eltérés azonban csak sajtóhiba következménye lehet.

Az energia-impulzus-tenzort most is úgy definiáljuk, mint az az elektromágneses tér esetében általában szokásos. Először értelmezzük az ún. RIESZ-féle

$$T^{(\alpha)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left\{ F^{(\alpha)}{}_{\mu\varrho} F^{(\alpha)\varrho}{}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{(\alpha)}{}_{\varrho\sigma} F^{(\alpha)\varrho\sigma} \right\} \tag{12,9}$$

energia-impulzus tenzort, melyből azután analitikus folytatással előállítjuk az elektromágneses saját tér $T_{\mu\nu}$ energia-impulzus tenzorát. Ennek az explicit alakjára azonban a továbbiakban nem lesz szükségünk.

13. §. Az elektromágneses tértenzorok meghatározása az elektron világvonalán.

A sajáterő kiszámítása céljából, mindenekelőtt határozzuk meg az elektromágneses tértenzorok értékét az elektron világvonalán. Ily módon nyilvánvaló, hogy a mozgó elektron által keltett térnek az elektronra gyakorolt visszahatását kapjuk. Természetesen kifejezéseink az elektron világvonalán divergensek, a RIESZ-féle módszer segítségével azonban, analitikus folytatással egyszerűen kiszámíthatjuk a divergens integrálok *véges részét.*

Az előzőekkel ellentétben legyen tehát most a $P(\mathbf{x})$ pont az elektron világvonalának egy pontja és határozzuk meg a (12, 5) és a (12, 8) alatti $F_{(1)\mu\nu}$ és $F_{(2)\mu\nu}$ tértenzorokat ebben a pontban.

Számításaink megkönnyítése céljából ismét úgy járunk el, hogy előbb az $F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu}$ és az $F^{(\alpha)}_{(2)\mu\nu}$ tenzorok (12, 3) ill. (12, 6) alatti kifejezéseit megfelelően átalakítjuk és az analitikus folytatást azután eszközöljük.

Integrációsváltozóként vezessük be ismét a τ ívhosszúságparamétert, akkor (12, 3) a (9, 3) alatti formula felhasználásával és parciális integrálással a következő alakra hozható:

$$F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu} = -\frac{e(\alpha-2)(\alpha-4)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_{-\infty}^{\tau_0} r_{[\mu}v_{\nu]}r^{\alpha-6}d\tau. \tag{13, 1}$$

Hasonlóképpen

$$F^{(\alpha)}_{(2)\mu\nu} = \frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_{-\infty}^{\tau_0}\Big\{2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{S_{\mu\nu}}{\varkappa}\right)+ \tag{13, 2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\varrho r_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}}{\varkappa}\right)\right]\Big\}r^{\alpha-4}d\tau$$

A (13, 1) alatti integrál $2<\alpha<5$, a (14, 2) alatti pedig $2<\alpha<7$ esetén az α reguláris függvénye és így az $\alpha\to 2+0$ határátmenet esetében analitikus folytatással a bennünket érdeklő $\alpha=2$ esetre is értelmezhető.

Bontsuk mindkét integrált két részre és integráljunk mindkét esetben részint a $(-\infty, A)$, részint pedig az (A, τ_0) intervallumon. Az első integrál mindkét esetben véges marad az $\alpha\to 2+0$ határátmenet esetén és $\alpha=2$-re az integrál előtti faktor következtében a megfelelő tagok eltűnnek.

A másik két integrál kiszámítása céljából az integranduszban szereplő mennyiségeket fejtsük sorba a τ_0 környezetében $|\tau-\tau_0|=\varepsilon>0$ hatványai szerint. Akkor kapjuk, hogy

$$r_\mu = -\varepsilon\left\{(v_\mu)_0+\frac{1}{2}(\dot v_\mu)_0\varepsilon+\frac{1}{6}(\ddot v_\mu)_0\varepsilon^2+\frac{1}{24}(\overset{(3)}{v}_\mu)_0\varepsilon^3+\frac{1}{120}(\overset{(4)}{v}_\mu)_0\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)\right\}$$

ahol tekintetbe vettük, hogy $(r_\mu)_0=0$ és általában $0(\varepsilon^n)$ jelöli azokat a tagokat, melyek legalább ε^n-t tartalmazzák. Hasonlóképpen

$$v_\mu = (v_\mu)_0+(\dot v_\mu)_0\varepsilon+\frac{1}{2}(\ddot v_\mu)_0\varepsilon^2+\frac{1}{6}(\overset{(3)}{v}_\mu)_0\varepsilon^3+\frac{1}{24}(\overset{(4)}{v}_\mu)_0\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)$$

$$\dot v_\mu = (\dot v_\mu)_0+(\ddot v_\mu)_0\varepsilon+\frac{1}{2}(\overset{(3)}{v}_\mu)_0\varepsilon^2+\frac{1}{6}(\overset{(4)}{v}_\mu)_0\varepsilon^3+\frac{1}{24}(\overset{(5)}{v}_\mu)_0\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)$$

stb., valamint

$$S_{\mu\nu} = (S_{\mu\nu})_0+(\dot S_{\mu\nu})_0\varepsilon+\frac{1}{2}(\ddot S_{\mu\nu})_0\varepsilon^2+\frac{1}{6}(\overset{(3)}{S}_{\mu\nu})_0\varepsilon^3+\frac{1}{24}(\overset{(4)}{S}_{\mu\nu})_0\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)$$

stb. Ezeknek a felhasználásával

$$\varkappa = -\varepsilon\left\{1-\frac{1}{6}(\dot v^2)_0\varepsilon^2-\frac{5}{24}(\dot{\mathrm v},\ddot{\mathrm v})_0\varepsilon^3-\left[\frac{3}{40}(\dot{\mathrm v},\overset{(3)}{\mathrm v})_0+\frac{1}{15}(\ddot v^2)_0\right]\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)\right\}$$

$$r_{[\mu} v_{\nu]} = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{(v_{[\mu}\dot{v}_{\nu]})_0 - \frac{2}{3}(\ddot{v}_{[\mu}v_{\nu]})_0\varepsilon + 0(\varepsilon^2)\right\}$$

$$r^2 = \varepsilon^2\left\{1 - \frac{1}{12}(\dot{v}^2)_0\varepsilon^2 - \frac{1}{12}(\dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}})_0\varepsilon^3 + 0(\varepsilon^4)\right\}$$

stb. ahol közben figyelembe vettük, hogy

$$\mathbf{v}^2 = 1; (\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}^2 = 0; (\mathbf{v}, \overset{(4)}{\mathbf{v}}) + 4(\dot{\mathbf{v}}, \overset{(3)}{\mathbf{v}}) + 3\ddot{\mathbf{v}}^2 = 0$$

$$(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = 0; (\mathbf{v}, \overset{(3)}{\mathbf{v}}) + 3(\dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}) = 0; \text{ stb.}$$

következésképpen az ε-t bevezetve új integrációs változónak kapjuk:

$$F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu} = -\frac{e(\alpha-2)(\alpha-4)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_{\varepsilon_A}^{0}\varepsilon^{\alpha-4}\frac{1}{2}\left\{(v_{[\mu}\dot{v}_{\nu]})_0 + \frac{2}{3}(\ddot{v}_{[\mu}v_{\nu]})_0\varepsilon + 0(\varepsilon^2)\right\}d\varepsilon$$

és az analitikus folytatás azt adja, hogy

$$F_{(1)\mu\nu} = \frac{2e}{3}(\ddot{v}_{[\mu}v_{\nu]})_0. \tag{13,3}$$

Az elektron dipólmomentuma által keltett tér tértenzorát az elektron világvonalán hasonlóképpen számítjuk ki. Tekintettel azonban arra, hogy ez a tértenzor kissé sok tagból tevődik össze, a részletes számítást itt hosszadalmas volna közölni:

$$\begin{aligned}F_{(2)\mu\nu} = g\Big\{&\frac{2}{3}(\overset{(3)}{S}_{\mu\nu})_0 + \frac{2}{3}(\dot{v}^2)_0(\dot{S}_{\mu\nu})_0 - \frac{5}{6}(\dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}})_0(S_{\mu\nu})_0 - \\
&-\frac{1}{3}(v_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}\overset{(3)}{v}_\varrho)_0 - \frac{4}{3}(v_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}\ddot{v}_\varrho)_0 - 2(v_{[\mu}\ddot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}\dot{v}_\varrho)_0 - \\
&-\frac{4}{3}(v_{[\mu}\overset{(3)}{S}{}^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0 - \frac{2}{3}(\dot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}\ddot{v}_\varrho)_0 - 2(\dot{v}_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}\dot{v}_\varrho)_0 - \\
&-2(\dot{v}_{[\mu}\ddot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0 - \frac{2}{3}(\ddot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}\dot{v}_\varrho)_0 - \frac{4}{3}(\ddot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0 - \\
&-\frac{1}{3}(\overset{(3)}{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0 - \\
&-(\dot{v}^2)_0[(v_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}\dot{v}_\varrho)_0 + (v_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0 + (\dot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0] - \\
&-\left(\frac{3}{2}\right)^2(\dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}})_0(v_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0\Big\}.\end{aligned} \tag{13,4}$$

Eredményünket összehasonlítjuk részben DIRAC (1938) és FREMBERG (1946), részben pedig BHABHA és CORBEN (1941) eredményeivel. A DIRAC-féle nomenklatúrában a most kiszámított tértenzor éppen az

$$F^{\text{rad}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F^{\text{ret}}_{\mu\nu} - F^{\text{adv}}_{\mu\nu}).$$

ún. sugárzótérnek felel meg. Míg $F_{(1)\mu\nu}$ esetében a megegyezés közvetlenül ellenőrizhető, $F_{(2)\mu\nu}$ összehasonlításánál a BHABHA—CORBEN-féle (140) egyenletben $k_1=\frac{1}{3}$, $k_2=-\frac{7}{15}$, $k_3=\frac{1}{3}$, $k_4=\frac{4}{3}$, $k_6=0$ helyettesítést kell végezni. A k_5 határozatlan együtthatót tartalmazó tagban a faktorban eltérés mutatkozik, erre azonban már HARISH—CHANDRA (1946), valamint R. C. MAJUMDAR és S. GUPTA (1949) is felhívták a figyelmet; továbbá a harmadik tagban $\frac{5}{6}$ helyett $\frac{2}{3}$ szerepel.

Legyünk most tekintettel a (2, 1) alatti FRENKEL-féle feltételre, akkor

$$v_\varrho S^{\varrho}_{\cdot\,\nu}=0 \qquad ; \qquad \overset{(3)}{v}_\varrho S^{\varrho}_{\cdot\,\nu}+3\ddot{v}_\varrho \dot{S}^{\varrho}_{\cdot\,\nu}+3\dot{v}_\varrho \ddot{S}^{\varrho}_{\cdot\,\nu}+v_\varrho \overset{(3)}{S}{}^{\varrho}_{\cdot\,\nu}=0$$

$$\dot{v}_\varrho S^{\varrho}_{\cdot\,\nu}+v_\varrho \dot{S}^{\varrho}_{\cdot\,\nu}=0 \qquad ; \qquad \text{stb.}$$

$$\ddot{v}_\varrho S^{\varrho}_{\cdot\,\nu}+2\dot{v}_\varrho \dot{S}^{\varrho}_{\cdot\,\nu}+v_\varrho \ddot{S}^{\varrho}_{\cdot\,\nu}=0\,;$$

melyeknek a felhasználásával

$$(13,5) \qquad F_{(2)\mu\nu}=g\Big\{\frac{2}{3}(\overset{(3)}{S}_{\mu\nu})_0+\frac{2}{3}(\dot{v}^2)_0(\dot{S}_{\mu\nu})_0-\frac{5}{6}(\dot{\mathbf{v}},\,\ddot{\mathbf{v}})_0(S_{\mu\nu})_0-$$
$$-\frac{1}{3}(v_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\,\nu]}\ddot{v}_\varrho)_0-(v_{[\mu}\ddot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\,\nu]}\dot{v}_\varrho)_0-\frac{1}{3}(v_{[\mu}\overset{(3)}{S}{}^{|\varrho|}_{\cdot\,\nu]}v_\varrho)_0-$$
$$-\frac{2}{3}(\dot{v}_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\,\nu]}\dot{v}_\varrho)_0-\frac{4}{3}(\dot{v}_{[\mu}\ddot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\,\nu]}v_\varrho)_0-\frac{2}{3}(\ddot{v}_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\,\nu]}v_\varrho)_0+$$
$$+2(\dot{v}^2)_0(v_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\,\nu]}v_\varrho)_0\Big\}.$$

Amivel a keresett végformulánkat megkaptuk. Ezeknek a birtokában könnyen meghatározhatjuk pl. az elektron sajátterének a feszültségenergia-tenzorát a világvonal mentén.

14. §. Megjegyzések a sajáterő explicit kiszámításával kapcsolatban. A sajáterő kiszámításánál ugyanazt a módszert kell lényegében véve követni, melyet az előző §-ban már alkalmaztunk:

A sajáterő (6, 4) alatti kifejezésében az egyedüli újabb problémát a $\nabla_\varrho F_{\mu\nu}$ explicit kiszámítása jelenti, melyet az alábbiakban részletezünk.

A (3, 2) alatti felbontásnak megfelelően

$$\nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{\mu\nu}=\nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu}+\nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{(2)\mu\nu},$$

következésképpen a (9, 9) alatti formulánk ismételt alkalmazásával, és a 12. §-ban részletezett módon kapjuk, hogy

$$(15,1) \qquad \nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu}=\frac{e(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_0^\infty \Big\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big\{\frac{g_{\varrho[\mu}v_{\nu]}}{\varkappa}+$$
$$+\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\varrho r_{[\mu}v_{\nu]}}{\varkappa}\right)\Big\}\, r^{\alpha-3}dr,$$

valamint

$$\nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{(2)\mu\nu} = \frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\frac{r_\varrho S_{\mu\nu}}{\varkappa} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{r_{[\mu}S_{|\varrho|\nu]}}{\varkappa} + \frac{g_{\varrho[\nu}S^{|\sigma|}{}_{\cdot\nu]}r_\sigma}{\varkappa} + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\varrho r_{[\mu}S^{|\sigma|}{}_{\cdot\nu]}r_\sigma}{\varkappa}\right)\right]\right\} r^{\alpha-3}dr. \tag{15, 1}$$

A (15, 1) alatti integrál $2<\alpha<7$ és a (15, 2) alatti $2<\alpha<9$ esetben az α reguláris függvénye. Az $\alpha=2$ esetet analitikus folytatással kapjuk:

$$\nabla_\varrho F_{(1)\mu\nu} = -e\left\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{g_{\varrho[\mu}v_{\nu]}}{\varkappa}\right) + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\varrho r_{[\mu}v_{\nu]}}{\varkappa}\right)\right\}_0 \tag{15, 2}$$

$$\nabla_\varrho F_{(2)\mu\nu} = g\left\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2\frac{r_\varrho S_{\mu\nu}}{\varkappa} + \frac{g_{\varrho[\mu}S^{|\sigma|}{}_{\cdot\nu]}}{\varkappa} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{r_{[\mu}S_{|\varrho|\nu]}}{r} + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{r_\varrho r_{[\mu}S^{|\sigma|}{}_{\cdot\nu]}r_\sigma}{\varkappa}\right\}\right)\right]\right\}_0, \tag{15, 4}$$

ahol az index mindkét esetben azt jelenti, hogy a zárójelbe tett kifejezés retardált időben veendő.

A továbbiakban ugyanúgy kell eljárni, mint azt a 12. §-ban és a 13. §-ban részleteztük. Minthogy arra már ismételten utaltam, a sajáterővel kapcsolatos problémákkal a közeljövőben egy külön tanulmányban kívánok foglalkozni, a (15, 3) és (15, 4) alatti kifejezések, ill. azoknak a világvonalon felvett alakjának explicit felírását mellőzőm.

FÜGGELÉK. A RIESZ-FÉLE POTENCIÁLOK ALKALMAZÁSA HIPERBOLIKUS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSÁNÁL

1) Hiperbolikus differenciálegyenletek megoldásának klasszikus módszerei. Ismeretes, hogy a hiperbolikus differenciálegyenletek CAUCHY-féle problémájának a megoldásánál, több mint két változó esetén speciális divergencia-nehézségek lépnek fel.

E divergencia-nehézségek lényegét könnyen megérthetjük, ha a potenciálegyenlet megoldásának az analógiájára gondolunk.[30] Legyen u a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

LAPLACE-féle egyenlet megoldása, mely a tekintetbe vett tartományon és az azt követő S' zárt felületen folytonos és kétszer folytonosan differenciálható, legyen továbbá

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

ahol $P(x_0, y_0, z_0)$ az S' felülettel határolt tartomány rögzített belső pontja. Vegyük körül ezt

[30] L. B. B. BAKER and E. T. COPSON (1950). 7. §.

a P pontot egy kis ε sugarú σ gömbbel, akkor a σ és az S' felületekkel határolt V tartományban

$$\int_V \{u\Delta v - v\Delta u\}\, dV = 0,$$

következésképpen a Green-tételből kapjuk, hogy

$$\int_S \left\{ u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS' + \int_\sigma \left\{ u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\sigma = 0,$$

ahol $\dfrac{\partial}{\partial n}$ a kifelémutató normális irányba vett differenciálást jelent. Már most a jól ismert módon $\varepsilon \to 0$ határmenettel kapjuk, hogy

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{ v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right\} dS'.$$

Ha tehát ismerjük a potenciál értékét a tartományt határoló S' felületen, akkor meghatározhatjuk formulánk segítségével a tartomány bármely belső pontjában is.

Helyettesítsük már most az x és az y változókat az ix és iy változókkal, akkor a háromdimenziós pszeudo-euklidesi metrikához jutunk és a fenti potenciálegyenlet átmegy a hengerhullámok

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

differenciálegyenletébe és

$$v = \frac{1}{\sqrt{(z-z_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}.$$

Természetesen most is érvényes, hogy

$$\int_V \{uL(v) - vL(u)\}\, dV = 0, \tag{1}$$

ha azonban most is alkalmazni akarjuk a Green-formulát, hogy $u(P)$ értékét a tartomány határán ismeretes $\bar{u}$ és $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ segítségével meghatározhassuk olyan speciális nehézségek lépnek fel, melyekkel a potenciálelméleti problémánál nem találkozunk:

Így mindenekelőtt láthatjuk, hogy a v függvény csak akkor valós, ha

$$(z-z_0)^2 \geqq (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2.$$

Ennek megfelelően integrációs tartományul válasszuk a térnek az

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2$$

kúppal (fénykúp abban az esetben, ha $z = ct$), valamint az S' felület azon tartományával határolt részét, melyet a fenti kúp az eredeti S' felületből kimetsz.

A Green-formula alkalmazásának azonban még így is van akadálya, ugyanis a v függvény a kúpon végtelenné válik, tehát az integrálelőállításban a felületi integrál divergens lesz.

Kétféle klasszikus módszer áll rendelkezésünkre e probléma leküzdésére.

V. Volterra (1894) a v függvényt a z_0 szerinti integráljával helyettesíti:

$$\bar{v} = \int \frac{dz_0}{\sqrt{(z-z_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} = \cosh^{-1}\left\{ \frac{|z-z_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right\}$$

az (1) alatti indentitásban. Ennek a függvénynek nincsen szingularitása a kúpon, és csupán a kúp tengelyén válik végtelenné. A kúp tengelyét egy infinitezimális koaxális hengerrel kirekesztjük és így már alkalmazható a GREEN-féle formula. Ezzel a módszerrel VOLTERRA az

$$\int u(x_0 y_0 z_0)\,dz_0$$

számára vezetett le formulát az u és $\frac{\partial u}{\partial n}$ kerületi értékeinek a felhasználásával.

A másik módszert J. HADAMARD (1932) dolgozta ki. Módszerének lényege abban áll, hogy a GREEN-formula alkalmazásakor fellépő divergens integrálnak a *véges részét* határozza meg.[31]

RIESZ MARCEL (1936) kimutatta, hogy mindazok a nehézségek, melyek a HADAMARD-féle módszer alkalmazhatóságát korlátozzák, egyszerűen áthidalhatók, ha egy α komplex paraméter bevezetése után analitikus folytatással választjuk le a divergens integráljaink véges részét.

2) A Rieman—Liouville-féle integrál és annak általánosítása. Az $f(x)$ függvény n-szer megismételt integrálja

$$\int_a^{x_1}\int_a^{x_2}\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n\,dx_{n-1}\cdots dx_1$$

áttranszformálható a következő alakra

$$J^{(\alpha)}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\alpha} f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt.$$

Ennek az integrálnak, melyet a klasszikus függvénytanban RIEMANN—LIOUVILLE-féle integrálnak hívunk, értelme van nemcsak $\alpha=n$ egész értékére, hanem, feltéve, hogy $\Re(\alpha)>0$,[32] az α komplex paraméter minden értékére, az $f(x)$-re vonatkozó igen általános folytonossági kikötések mellet. Ha az $f(x)$ függvény történetesen reguláris, akkor $J^{(\alpha)}f(x)$ értelmezhető, analitikus folytatással, $\alpha \leq 0$ esetben is. Speciálisan, ha $f(x)$ folytonos az x pontban

$$J^{(0)}f(x)=f(x)$$

és a $J^{(\alpha)}$ operátor kielégíti a következő alapvető relációkat:

$$J^{(\alpha)}J^{(\beta)}=J^{(\alpha+\beta)};\quad \frac{d}{dx}J^{(\alpha+1)}=J^{(\alpha)}.$$

RIESZ MARCEL (1936, 1948) általánosította a RIEMANN—LIOUVILLE-féle integrált[33] az m-dimenziós pszeudo-euklidesi térre:

$$J^{(\alpha)}f(P)=\frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{D_S^P} f(Q)\,r_{PQ}^{\alpha-m}\,dQ, \tag{2}$$

ahol

$$H_m(\alpha)=2^{\alpha-1}\pi^{\frac{\alpha-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right).$$

A D_S^P tartomány az m-dimenziós térnek az a része, melyet a P tartójú fénykúp és a S' térszerű felület megfelelő tartománya[34] határol.

[31] L. R. COURANT und D. HILBERT (1937). 438 old.

[32] $\Re(\alpha)$ az α reális részének a rövidítése.

[33] A soron következő referátumot FREMBERG (1946) munkája alapján állítottam össze, hol az idézett tételek bizonyításai is megtalálhatók.

[34] Ugyanúgy mint azt az 1. §-ban $m=4$ esetén részleteztük.

Minthogy a fénykúpon $r_{PQ}^2=0$, a (2) integrál általában csak $\alpha > m-2$ esetben lesz konvergens. Ha azonban az $f(P)$ függvény és az S' felület, az alábbiakban pontosabban körvonalazott módon reguláris, akkor $I^{(\alpha)}f(P)$ analitikus folytatással $\alpha < m-2$ esetére is értelmezhető és érvényesek az alábbi alapvető formulák

(3) $$I^{(0)}f(P)=f(P)$$

valamint

(4) $$I^{(\alpha)}I^{(\beta)}=I^{(\alpha+\beta)}$$

és

(5) $$\square I^{(\alpha+2)}=I^{(\alpha)}$$

3) A hullámegyenlet Riesz-féle megoldása. A hullámegyenlettel kapcsolatos CAUCHY-féle probléma megoldásánál már most a következőképpen járhatunk el:

Tekintsük a

(6) $$v=\frac{r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{H_m(\alpha+2)}$$

függvényt, mely valahányszor $\alpha > m$ folytonos és eltűnik a tartományunkat határoló fénykúpon első differenciálhányadosával együtt. Minthogy tehát

$$\square v=\frac{r_{PQ}^{\alpha-m}}{H_m(\alpha)}$$

írhatjuk, hogy

(7) $$I^{(\alpha)}f(P)=\frac{1}{H_m(\alpha+2)}\int_{D_S^P}\square u(Q)r_{PQ}^{\alpha+2-m}\,dQ+$$
$$+\frac{1}{H_m(\alpha+2)}\int_{S^P}\left\{\frac{\partial u(Q)}{\partial n}r_{PQ}^{\alpha+2-m}-u(Q)\frac{\partial r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{\partial n}\right\}dS.$$

Vezessük be az

$$I^{*(\alpha)}\{g,f,h\}(P)=\frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{D_S^P}f(Q)r_{PQ}^{\alpha-m}\,dQ+$$
$$+\frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{S^P}\left\{g(Q)r_{PQ}^{\alpha-m}-h(Q)\frac{\partial r_{PQ}^{\alpha-m}}{\partial n}\right\}dS'$$

jelölést, akkor kimutatható, hogy az $I^{*(\alpha)}$ operátor is kielégíti a (4) és (5) alatti relációkat és analitikus folytatással kimutatható, hogy

$$I^{*(0)}\{f,g,h)(P)=f(P).$$

Legyen a megoldandó hullámegyenlet

$$\square u=f.$$

Az u függvény az S' felületen legyen g és $\frac{\partial u}{\partial n}$ legyen h (előre megadott kezdeti értékek). Akkor a probléma RIESZ-potenciálja

$$I^{(\alpha)}u(P)=I^{*(\alpha-2)}\left\{\square u,\frac{\partial u}{\partial n},u\right\}(P)$$

és analitikus folytatással kapjuk, $\alpha = 0$ esetben, hogy

$$u(P) = I^{(0)} u(P) = I^{*(2)} \left\{ \Box u, \frac{\partial u}{\partial n}, u \right\} (P),$$

ami a hullámegyenlet keresett megoldását állítja elő.

Az

$$U^{(\alpha)}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D_S^P} f(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dQ$$

$$v^{(\alpha)}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{S^P} g(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dS'$$

$$W^{(\alpha)}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{S^P} h(Q) \frac{\partial r_{PQ}^{\alpha-m}}{\partial n} \, dS'$$

integrálokat rendre az $f(Q)$ térfogati, $g(Q)$ felületi és $h(Q)$ kettősréteg-eloszlás RIESZ-féle potenciáljának nevezzük.

4) Világvonal mentén eloszlott töltéssűrűség potenciálja. Az elektronelméleti alkalmazások során különösen fontos az a speciális eset, amikor a töltéseloszlás a térben egy görbére korlátozódik. Ezt a töltéseloszlást heurisztikusan egy $f_n(P)$ térbeli töltéseloszlas határesetének tekinthetjük. Tegyük fel, hogy bármely, az adott görbét nem tartalmazó, tartományban egyenletesen teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f_n(P) = 0$$

azonban, ha a D tartomány az L görbét is tartalmazza, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_D f_n(Q) \, dQ = \int\limits_{Q_1}^{Q_2} F(t) \, dt$$

ahol Q_1 és Q_2 a tartománynak és az L görbének a két metszéspontja, $F(t)$ pedig a görbén értelmezett sűrűségeloszlás.

Hogy a fizikai alkalmazásokhoz minél jobban alkalmazkodjunk, tegyük fel, hogy a $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ görbe, mely mentén az $F(t)$ töltéseloszlást, (mely folytonos és megfelelően sokszor folytonosan differenciálható függvénye a t paraméternek) értelmeztük időszerű, tehát

$$\left(\frac{d\mathbf{z}}{dt} \right)^2 = \mathbf{u}^2 > 0.$$

Tegyük továbbá még azt is fel, hogy

$$\frac{dz^0}{dt} > 0,$$

amivel azt biztosítsuk, hogy a görbe befutása a t paraméter változásával egyirányú.

Ezek előrebocsátása után a $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ világvonal mentén értelmezett $F(t)$ töltéssűrűség RIESZ-potenciálját a következőképpen adhatjuk meg

$$\Lambda^{(\alpha)}(P) = \int\limits_{Q_S}^{Q_{\mathrm{ret}}} F(t) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dt, \tag{8}$$

ahol Q_S az a pont, ahol a görbe az S^P felületet metszi, Q_{ret} pedig a görbének a $P(\mathbf{x})$ ponthoz retardált pontja, melyet az

$$\{\mathbf{x}-\mathbf{z}(t_0)\}^2=0$$

egyenletből határozunk meg.

Ha a $P(\mathbf{x})$ pont nem fekszik a görbén, akkor $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ az $\alpha>2$ esetben konvergens integrál és analitikus folytatással $\alpha\geq 2$ esetre is értelmezhető.

Az

$$R=r^2=r_{PQ}^2$$

definícióval vezessünk be új változót.

Tekintsük továbbá a következőkben az $\mathbf{x}$ és az R változókat függetleneknek. Ez azért lehetséges, mert az $\mathbf{x}$ és az R, valamint a t és az R változók között egyértelmű megfeleltetés lehetséges, melyet az alkalmazás során részleteztünk.

Az új változó bevezetésével írhatjuk, hogy

$$\Lambda^{(\alpha)}(P)=\frac{1}{H_m(\alpha)}\int\limits_L F(t)\frac{\partial t}{\partial R}R^{\frac{\alpha-m}{2}}dR. \tag{9}$$

Bevezetve továbbá a

$$c(\alpha)=\frac{1}{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{m-2}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{10}$$

faktort $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ a következő alakba írható

$$\Lambda^{(\alpha)}(P)=\frac{c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+2}{2}\right)}\int\limits_L F(t)\frac{\partial t}{\partial R}R^{\frac{\alpha-m}{2}}dR.$$

Ebből parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\Lambda^{(\alpha)}(P)=\frac{c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+4}{2}\right)}\left[F(t)\frac{\partial}{\partial R}\left\{R^{\frac{\alpha-m+2}{2}}\right\}\right]_{Q_S}^{Q_{\text{ret}}}-$$

$$-\frac{c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+4}{2}\right)}\int\limits_L\frac{\partial}{\partial R}\left\{F(t)\frac{\partial t}{\partial R}\right\}R^{\frac{\alpha-m+2}{2}}dR,$$

ahol a kiintegrált rész a felsőhatáron eltűnik, valahányszor $\alpha>m-2$. Az integrál $\alpha>m-4$ esetben konvergens, így formulánk megadja $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ analitikus folytatását, valahányszor $\alpha>m-4$.

Ismételt parciális integrációval az N-ik lépés után kapjuk:

$$\begin{aligned}\Lambda^{(\alpha)}(P)=&\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(-1)^{i+1}c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+2}{2}+N\right)}\left\{\frac{\partial^i}{\partial R^i}\left(F(t)\frac{\partial t}{\partial R}\right)R^{\frac{\alpha-m+2}{2}+i}\right\}_{Q_S}+\\&+\frac{(-1)^N c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+2}{2}+N\right)}\int\limits_L\frac{\partial^N}{\partial R^N}\left(F(t)\frac{\partial t}{\partial R}\right)R^{\frac{\alpha-m}{2}+N}dR.\end{aligned} \tag{11}$$

Definíció: Az $f(\beta,k_i)$ függvény az $A_\beta[\beta\geq b, E(k_i)]$ függvényosztályba tartozik, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) Az $f(\beta,k_i)$ egyértékű és folytonos függvény, valahányszor $\beta\geq b$ és k_i eleme az $E(k_i)$ tartománynak.

b) Az $f(\beta, k_i)$ az $E(k_i)$ tartomány minden $\{k_i\}$ pontjában analitikus holomorf függvény, valahányszor $\beta > b$.

Tétel: Valahányszor a $g(\beta, t, k_i)$ függvény az $A_\beta[\beta \geqq 0,\ 0 \leqq t \leqq T, E(k_i)]$ függvényosztályba tartozik a

$$G(\beta, k_i) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^T g(\beta, t, k_i)\, t^{\beta-1}\, dt$$

függvény eleme az $A_\beta[\beta \geqq 0, E(k_i)]$ függvényosztálynak és

$$G(0, k_i) = g(0, 0, k_i).$$

A tétel a segédtételünk közvetlen folyamánya.

Visszatérve már most a (11) alatti formulánkhoz tegyük fel, hogy az $F(t)$ és a $\mathbf{z}(t)$ elemei a $c_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$ ill. a $c_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}$ függvényosztályoknak, tehát $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ ill. $\left[\frac{m+1}{2}\right]$-szer folytonosan differenciálhatók[35], akkor $N = \left[\frac{m-1}{2}\right]$ esetben (11) megadja $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ analitikus folytatását, valahányszor $\alpha > 0$. Ha m páratlan, akkor a (11) alatti formulában szereplő integrál konvergens $\alpha = 0$ esetben, ha pedig páros, úgy alkalmazható a fenti tétel. Következésképpen $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ eleme az $A\alpha[\alpha \geqq 0, E(\mathbf{x})]$ függvényosztálynak. Minthogy továbbá $c(0) = 0$

$$\Lambda^{(0)}(P) = 0$$

ha a P pont nem pontja a görbénknek.

Bennünket a továbbiakban csak $\Lambda^{(2)}(P)$ érdekel. Legyen tehát a (11) alatti formulában $N = \left[\frac{m-3}{2}\right]$ akkor. (11) ellőállítja $\Lambda^{(\alpha)}(P)$-t $\alpha > 2$ esetben. Ha m páratlan, úgy a (11) alatti integrál konvergens $\alpha = 2$ esetben is, tehát $\Lambda^{(2)}(P)$ közvetlenül kiszámítható, ha F és $\mathbf{z}$, valamint a differenciálhányadosaik ismeretesek a Q_S pontban.

Ha m páros (ami bennünket is közelebbről érdekel) a (11) alatti összegezés a Γ faktorok következtében tagonként eltűnik, az integrál pedig segédtételünk alapján

$$\Lambda^{(\alpha)}(P) = \frac{(-1)^{N+1}}{2\pi^{N+1}} \left\{ \frac{\partial^N}{\partial R^N} \left(F(t) \frac{\partial t}{\partial R} \right) \right\}_{Q_{\text{ret}}}.$$

Minthogy

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial (r^2)}{\partial t} = -2(\mathbf{r}, \mathbf{u})$$

kapjuk, hogy

$$\frac{\partial t}{\partial R} = -\frac{1}{2(\mathbf{r}, \mathbf{u})}.$$

Következésképpen

$$\Lambda^{(\alpha)}(P) = \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+2}\pi^{N+1}} \left\{ \left(\frac{1}{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \frac{\partial}{\partial t} \right)^N \frac{F(t)}{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \right\}_{Q_{\text{ret}}}. \tag{12}$$

Ez a formula szolgáltatja $m = 4$ esetben, az elektronelméleti alkalmazás során a Lienard—Wiechert-féle potenciálokat.

5) A sugárzási probléma. Foglalkozzunk végül még egy exisztenciális jellegű kérdéssel. Az előzőkben említettük, hogy a görbe menti töltéseloszlás egy $f_n(P)$ térbeli eloszlás határ-

[35] $[x]$ az x egész részét jelenti.

esetének tekinthető. Legyen már most az $f_n(P)$ térbeli töltéseloszláshoz tartozó RIESZ-potenciál $U_n^{(\alpha)}(P)$, akkor (5) alapján

$$\Box U_n^{(\alpha)}(P) = U_n^{(\alpha-2)}(P)$$

és analitikus folytatással $\alpha = 2$ esetre kapjuk, hogy

$$U_n^{(0)}(P) = f_n(P).$$

Bizonyítás nélkül hivatkozom arra, hogy érvényes a következő formális számítás

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n(Q)\,dQ = \lim_{n\to\infty} \left\{ \underset{\alpha\to 2}{\text{anal. folyt.}} \int_D U_n^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ \right\} =$$

$$= \underset{\alpha\to 2}{\text{anal. folyt.}} \left\{ \lim_{n\to\infty} \int_D U_n^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ \right\}.$$

Minthogy azonban definícióknak megfelelően

$$\lim_{n\to\infty} U_n^{(\alpha)}(P) = A^{(\alpha)}(P),$$

kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n(Q)\,dQ = \underset{\alpha\to 2}{\text{anal. folyt.}} \left\{ \int_D A^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ \right\},$$

következésképpen

$$\underset{\alpha\to 2}{\text{anal. folyt.}} \left\{ \int A^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ \right\} = \int_{Q_1}^{Q_2} F(t)\,dt. \tag{13}$$

Eredményünk a következőképpen értelmezhető: A görbénket vegyük körül egy időszerű pontokból álló infinitezimális koaxális henger felülettel, melyet a két végén egy-egy a Q_1 és Q_2 pontokon átmenő térszerű felülettel lezárunk. Alkalmazzuk erre a hengeres tartományra az

$$\int_D \Box \Phi\,dQ = -\int_\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,d\Sigma$$

GAUSS-tételt, akkor

$$\int_D A^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ = \int_D \Box A^{(\alpha)}(Q)\,dQ = -\int_\Sigma \frac{\partial A^{(\alpha)}(Q)}{\partial n}\,d\Sigma,$$

következésképpen

$$-\int_\Sigma \frac{\partial A^{(\alpha)}(P)}{\partial n}\,d\Sigma = \int_{Q_1}^{Q_2} F(t)\,dt.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az $F(t)$ függvénynek a világvonal mentén a Q_1 és a Q_2 pontok között vett vonalmenti integrálja megadja a potenciál fluxusát, tehát a fizikai értelemben vett sugárzást, a görbénket körülvevő infinitezimális hengeren át.

6) Egyszerű alkalmazás a klasszikus elektromágneses tér esetében. Az elektromágneses potenciálok alapegyenlete

$$\Box \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{s}.$$

Az s-ről feltételezzük, hogy reguláris, az A-tól pedig megköveteljük, hogy $x^0 \to -\infty$ esetben első differenciálhányadosaival együtt eltűnjék.

A tér RIESZ-potenciálja az előzőek alapján

$$A^{(\alpha)}(P) = -\frac{4\pi}{H_4(\alpha)} \int_{D^P_{-\infty}} s(Q) r_{PQ}^{\alpha-4} dQ.$$

Vezessünk be új változókat

$$\{(x^i - z^i)(x_i - z_i)\}^{1/2} = \varrho,$$

ahol a latin indexek az 1, 2, 3, értékeket vehetik fel, tehát ϱ a térbeli távolság;

$$r_{PQ}^2 = R \qquad z^i - x^i = \xi^i$$

$$z^0 = x^0 - (R + \varrho^2)^{1/2}$$

$$dQ = dz^0 dz^1 dz^2 dz^3 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{R + \varrho^2}} dR \, d\xi$$

akkor kapjuk, hogy

$$A^{(\alpha)}(P) = \frac{\alpha - 2}{2^{\alpha-2} \left\{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^2} \int_0^\infty R^{\frac{\alpha-4}{2}} \iiint_V \frac{s(x^0 - \sqrt{R+\varrho^2}, \xi^i)}{\sqrt{R+\varrho^2}} d\xi \cdot dR.$$

A (10, 2) alatti formulánkat alkalmazva kapjuk, hogy

$$A(P) = \iiint_V \frac{s(x^0 - \varrho, \xi^i)}{\varrho} d\xi,$$

ami viszont éppen a klasszikus elektrodinamikából jólismert retardált potenciál.

Szegedi Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézet.

IRODALOM

BAKER, B. B. and E. T. COPSON, 1950, *The mathematical theory of* HUYGENS' *principle,* Oxford.
BHABHA, H. J. and H. C. CORBEN, 1941, Proc. Roy. Soc. London. A. **178**. 273.
COURANT, R. und D. HILBERT, 1937, *Methoden der math. Physik.* Bd. 2.
DIRAC, P. A. M. 1938, Proc. Roy. Soc. London. A. **167**. 148.
FOKKER, A. D. 1929, Zs. f. Phys. **58**. 386.
FREMBERG, N. E. 1946, *A study of generalized hyperbolic potentials.* Medd. Lunds. Univ. Math. Sem. Bd. 7. Lund.
FRENKEL, J. I. 1926, Zs. f. Phys. **37**. 243.
HARISH—CHANDRA. 1946, Proc. Roy. Soc. London. A. **185**. 267.
HORVÁTH, J. I. und A. MOÓR, 1952, Zs. f. Phys. **131**. 544.
KRAMERS, H. A. 1938, *Handbuch der Chem. Phys.* Bd. 1. Leipzig.
LATTES, C. M., M. SCHÖNBERG and W. SCHÜTZER, 1947, An. da Acad. Brasileira de Cienc. **19**. 193.
LORENTZ, H. A. 1916, *Theory of the electron.* Leipzig.
MACMANUS, H. 1949, Proc. Roy. Soc. London. A. **195**. 323.
MAJUMDAR, R. C. and S. GUPTA, 1949, Phys. Rev. **75**. 1788.

MARX, G. 1952, Acta Physica Acad. Scient. Hung. **2**. 67.
MIE, G. 1912, Ann. d. Phys. **37**. 511; **39**. 1; 1913, ibid. **40**. 1.
PAULI, W. 1921. *Relativitätstheorie*. (*Enzykl. d. math. Wissensch.* Bd. 5.) Leipzig.
RIESZ, M. 1936, Comptes Rendus du Congr. internat. Les math. Oslo. Vol. II. 44. 1948, Acta Math. **81**. 1.
SCHOUTEN, J. A. 1924, *Der Ricci-kalkül*. Berlin.
TETRODE, H. 1922. Zs. f. Phys. **10**. 317.
THIRRING, H. 1927, *Elektrodynamik bewegter körpen*. (H. GEIGER—K. SCHEEL: *Handb. d. Phys.* Bd. 12). Berlin.
WENTZEL, G. 1949, *Quantum theory of fields*. New York.
WEYL, H. 1918, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin.