MEGJEGYZÉSEK A GYENGÉN-KOMPLEMENTUMOS HÁLÓKRÓL*

SZÁSZ GÁBOR

1. §. Bevezetés

Ismeretes [1], hogy legkisebb elemmel rendelkező hálók bármely kongruenciarelációjában, a gyűrűk esetéhez hasonlóan, a legkisebb elemmel kongruens elemek a hálónak egy ideálját alkotják, melyet a *kongruenciareláció magjának* nevezünk. Azonban, míg gyűrűkben minden egyes kongruenciarelációt egyértelműen meghatároz a magja, addig legkisebb elemmel rendelkező hálók esetén hasonló állítás általában nem érvényes.

Egyes speciális esetekben azonban, például komplementumos disztributív hálók (azaz Boole-algebrák) esetén ugyanaz a helyzet, mint a gyűrűknél: ha a háló minden egyes kongruenciarelációjához hozzárendeljük a kongruenciareláció magját, akkor a háló összes kongruenciarelációi és összes ideáljai közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleléshez jutunk. Ez a tény egyszerű következménye annak a STONE-tól származó eredménynek [2], hogy a Boole-algebrák és az egységelemes idempotens gyűrűk kölcsönösen egyértelmű megfelelésbe hozhatók egymással, de ettől függetlenül, tisztán hálóelméleti úton is kimutatható [3].

A fenti eredmények nyomán G. BIRKHOFF azt az igen érdekes problémát vetette fel [4], mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy legkisebb elemmel rendelkező hálóra nézve a kongruenciarelációk és az ideálok között a komplementumos disztributív hálóknál tapasztalt kölcsönösen egyértelmű megfelelés fennálljon. Ez a probléma, teljes általánosságban tekintve, még megoldatlan; disztributív hálókra nézve azonban ARESKIN nemrég megoldotta. Mégpedig kimutatta [5], hogy *legkisebb elemmel rendelkező disztributív L hálóra nézve a kongruenciarelációknak és az ideáloknak — mint a kongruenciarelációk magjának — kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése akkor és csak akkor áll fenn, ha minden egyes K kongruenciareláció esetén az L/K faktorháló*** *gyengén-komplementumos* a következő, szintén általa bevezetett értelemben:

* A hálóelmélet alapfogalmaira és a jelölésmódra vonatkozólag l. G. BIRKHOFF [1].

** Egy L háló valamely K kongruenciarelációja esetén az L-nek mod K tekintett maradékosztályai ismét egy hálót adnak, amely az L-nek homomorf képe; ezt az L háló K szerinti faktorhálójának nevezzük, s L/K-val jelöljük.

1. DEFINÍCIÓ. *Egy O legkisebb elemmel rendelkező L hálót gyengén-komplementumosnak nevezünk, ha L minden egyes u, v $(u \neq v)$ elempárjához található olyan $x (\in L)$, hogy*

$$x \cap (u \cap v) = O, \quad x \cap (u \cup v) > O.$$

ARESKIN igen értékes és mély eredményének egyetlen szépséghibája, hogy a gyengén-komplementumos hálók definíciója nem elég egyszerű. E rövid dolgozat egyik célja éppen az, hogy áttekinthetőbb definíciót adjon a gyengén-komplementumos hálókra, a szerző által régebben bevezetett félkomplementum segítségével. Továbbá, az Areskin-féle eredmény szerint a gyengén-komplementumos hálók a legkisebb elemmel rendelkező hálók osztályának igen fontos alosztályát képezik, s úgy hiszem, hogy csak a dolgozat megjelenése óta eltelt rövid idővel magyarázható, hogy a gyengén-komplementumos hálók tulajdonságait vizsgáló dolgozat még nem jelent meg. Jelen dolgozatnak éppen az a másik célja, hogy ilyen természetű kérdéseket tárgyaljon; részletesebben, a dolgozat utolsó részében a gyengén-komplementumos hálóknak a komplementumos, relatív komplementumos és félkomplementumos hálókkal való logikai kapcsolatait vizsgáljuk.

2. §. A gyengén-komplementumos hálók egyszerű jellemzése

A félkomplementum fogalmának jelen dolgozatunkban való felhasználásával kapcsolatban megragadjuk az alkalmat, hogy az eredetileg adott definíción [6] egy apró, de igen hasznos módosítást hajtsunk végre, s a félkomplementumot a következőképpen definiáljuk:

2. DEFINÍCIÓ. *Egy O legkisebb elemmel rendelkező L háló valamely x elemének félkomplementumán értjük az L minden olyan y elemét, amelyre $x \cap y = O$. Az x-nek O-tól különböző félkomplementumait valódi félkomplementumoknak nevezzük.**

Ennek megfelelően a „félkomplementumos hálók" (tartalmilag változatlan) definícióját a következőképpen fogalmazzuk meg:

3. DEFINÍCIÓ. *Valamely legkisebb elemmel rendelkező hálót félkomplementumosnak nevezünk, ha a háló minden egyes — az esetleg létező legnagyobb elemtől különböző — elemének van valódi félkomplementuma.*

Ezek után a gyengén-komplementumos hálókat a következőképpen jellemezhetjük:

* Régebbi definíciónkkal szemben tehát azt a változtatást tettük, hogy minden elem triviális félkomplementumának tekintjük az O elemet. E változtatás célszerűségét mutatja többek között az, hogy az új definícióval érvényes a következő két könnyen belátható állítás: Ha y az x-nek félkomplementuma, akkor minden olyan z elem is, amelyre $z \leqq y$; legkisebb elemes disztributív háló esetén pedig bármely x elem összes félkomplementumai ideált alkotnak.

1. TÉTEL. *Az O legkisebb elemmel rendelkező L háló akkor és csak akkor gyengén-komplementumos, ha az L minden u, v $(u < v)$ elempárja esetén az u-nak van olyan x félkomplementuma, amely v-nek már nem félkomplementuma* (azaz, van olyan x, amelyre $u \cap x = O$, $v \cap x > O$).

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy L gyengén-komplementumos, s tekintsük L valamely u, v $(u < v)$ elempárját. Az 1. definíció szerint, található olyan $x (\in L)$, amelyre

$$x \cap (u \cap v) = O, \quad x \cap (u \cup v) > O,$$

azaz, $u < v$ miatt,

$$x \cap u = O, \quad x \cap v > O.$$

Vagyis, találtunk olyan x elemet L-ben, amely u-nak félkomplementuma, v-nek viszont nem; eszerint a tételben szereplő feltétel szükséges.

Fordítva, tegyük fel, hogy L-nek van egy O legkisebb eleme, és eleget tesz a tételben szereplő feltételnek. Legyen u, v az L tetszés szerinti olyan elempárja, amelyre $u < v$. De akkor $u \cap v < u \cup v$, s így a feltevésünk szerint az $u \cap v$ elemnek van olyan félkomplementuma L-ben, amely $u \cup v$-nek nem félkomplementuma, azaz, amelyre

$$x \cap (u \cap v) = O$$
$$x \cap (u \cup v) > O$$

érvényes. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy L gyengén-komplementumos. Ezzel a feltétel elegendőségét is kimutattuk.

A most bebizonyított tétel szerint az 1. definícióval ekvivalens a következő:

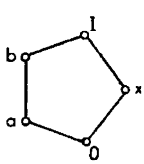
4. DEFINÍCIÓ. *Egy O legkisebb elemmel rendelkező L hálót gyengén-komplementumosnak nevezünk, ha az L bármely olyan u, v elempárjához, ahol $u < v$, található u-nak olyan félkomplementuma, amely v-nek nem félkomplementuma.*

A továbbiakban mindig ezt a definíciót tartjuk szem előtt.

3. §. A gyengén-komplementumos hálók kapcsolata a komplementumos, relatív komplementumos és félkomplementumos hálókkal

Könnyű látni, hogy a gyengén-komplementumosság a komplementumosságtól független tulajdonság: *a komplementumosság sem nem elegendő, sem nem szükséges a gyengén-komplementumossághoz.* Előbbit az

(1)



diagrammal megadott komplementumos háló mutatja, amelyben az a elem félkomplementumai (azaz az O és x elemek) az a-nál nagyobb b-nek is félkomplementumai, tehát (1) nem gyengén-komplementumos. Utóbbival kapcsolatban elegendő pl. utalni arra, hogy léteznek legnagyobb elemmel nem rendelkező (s így szükségképpen nem-komplementumos) gyengén-komplementumos hálók, például a négyzetmentes pozitív egészek oszthatóság szerint rendezett hálója *.

Egészen más a helyzet a relatív komplementumos hálók esetében:

2. TÉTEL. *Minden olyan relatív komplementumos háló, amelynek van legkisebb eleme, gyengén-komplementumos.*

KÖVETKEZMÉNY. Ha egy komplementumos háló moduláris, akkor gyengén-komplementumos is.

BIZONYÍTÁS. Legyen L a feltételeknek eleget tevő háló, O legkisebb elemmel, a és b pedig az L két tetszés szerinti olyan eleme, amelyre $a < b$ érvényes. Jelöljük x-szel az a-nak $[O, b]$-re vonatkozó (valamely) relatív komplementumát. Akkor a relatív komplementum definíciója folytán

$$O \leqq x \leqq b, \tag{2}$$

$$x \cap a = O, \tag{3}$$

$$x \cup a = b. \tag{4}$$

A (2)-ből azonnal következik

$$x \cap b = x. \tag{5}$$

Mivel (3) szerint x az a-nak félkomplementuma, ezért (5) szerint elegendő kimutatni, hogy $x \neq O$. Ez azonban, $a \neq b$ miatt, azonnal következik (4)-ből.

A következmény állításának bizonyításával kapcsolatban elegendő arra a jól ismert tényre utalnunk, hogy minden komplementumos moduláris háló relatív komplementumos [7]; ebből ugyanis most bebizonyított tételünk miatt azonnal adódik a következmény állítása.

A következmény állítására azonban igen egyszerű közvetlen bizonyítás is adható. Legyen L a mondott feltételeknek eleget tevő háló, a és b pedig az L-nek két olyan eleme, amelyre $a < b$ áll. A háló legkisebb elemét jelöljük ismét O-val, legnagyobb elemét pedig I-vel. Tekintsük az a elem valamely x komplementumát; a komplementum definíciója szerint fennállnak az

$$a \cap x = O, \quad a \cup x = I \tag{6}$$

* Ebben a hálóban ugyanis, mint ismeretes, a $\cap$-nek a legnagyobb közös osztó, az $\cup$-nek a legkisebb közös többszörös képzése, az O-elemnek pedig az 1 egész szám felel meg; márpedig, ha a és b négyzetmentes számok és b az a-nak többszöröse, akkor b-nek van olyan prímtényezője, amely a-hoz relatív prím. Ezen a tényen különben az sem változtat, ha a 0 számot is hozzávesszük a hálóhoz, amely, mint minden szám többszöröse, a háló legnagyobb eleme lesz.

egyenletek. A 4. definíció szerint elegendő kimutatnunk, hogy

$$b \cap x > O.$$

Ez pedig azonnal következik abból, hogy $b > a$ miatt

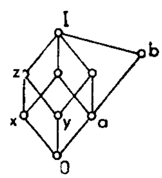
$$b \cup x \geqq a \cup x = I,$$

azaz

$$b \cup x = I; \tag{7}$$

ha ugyanis $b \cap x = O$ lenne, akkor $a < b$, valamint (6) és (7) szerint az O, a, b, x, I elemek egy (1) szerinti részhálót alkotnának L-ben. Mivel azonban egyetlen moduláris hálónak sem lehet ilyen részhálója [8], ezért valóban $b \cap x > O$.

Ezzel szemben, félig-moduláris komplementumos háló nem feltétlenül gyengén-komplementumos. Ezt mutatja például a



háló, amelyben az a és b elem összes félkomplementumai egyaránt az O, x, y, z elemek.

Végül kimutatjuk a következő, igen egyszerűen adódó tételt:

3. TÉTEL. *Minden gyengén-komplementumos háló félkomplementumos.*

BIZONYÍTÁS. Legyen ugyanis L gyengén-komplementumos háló, O legkisebb elemmel. Nyilvánvaló, hogy az L bármely olyan a eleméhez, amely különbözik a háló esetleg létező legnagyobb elemétől, található olyan $b(\in L)$, amelyre $a < b$. De akkor, mivel L gyengén-komplementumos, van olyan $x(\in L)$, amelyre

$$a \cap x = O, \quad b \cap x > O.$$

Utóbbi miatt $x \neq O$, tehát x az a-nak valódi félkomplementuma; ez pedig a 3. definíció szerint éppen azt jelenti, hogy az L háló félkomplementumos.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

IRODALOM

[1] G. BIRKHOFF, Lattice theory, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, **25**, revised edition, New York, 1948, 21.

[2] M. H. STONE, Subsumption of Boolean algebras under the theory of rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U. S. A., **21** (1935), 103—105.

[3] G. BIRKHOFF, id. mű, 159.

[4] G. BIRKHOFF, id. mű, 73. probléma, 161.

[5] Г. Я. Арещкин, Об отношениях конгруенции в дистрибутивных структурах с нулевым элементом, Доклады Акад. Наук СССР, **90** (1953), 485–486.

[6] G. SZÁSZ, Dense and semi-complemented lattices, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (3), **1** (1953), 42—44.

[7] J. NEUMANN, Continuous geometry, Princeton, 1936. Az idézett tétel a mű 7. oldalán található. (Vagy pedig: G. BIRKHOFF, id. mű, 114. o.)

8] G. BIRKHOFF, id. mű, 66. o., 2. tétel.