FOURIER-SOROK ERŐS SZUMMÁCIÓJÁRÓL

TANDORI KÁROLY

Bemutatta Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag az 1955. április 29-én tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

Az $f(x) \in L[0, 2\pi]$ függvény

$$\mathfrak{S}(f) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sorát az x_0 pontban r-edrendben erősen szummálhatónak, vagy egyszerűbben H_r-szummálhatónak nevezzük, ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f; x_0) - f(x_0)|^r = 0,$$

ahol $s_\nu(f; x)$ jelöli a $\mathfrak{S}(f)$ sor ν-edik részletösszegét.

G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD [2] bebizonyították, hogy ha $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ $(p > 1)$, akkor $\mathfrak{S}(f)$ az $f(x)$ függvény bármely p-edrendű Lebesgue-pontjában minden pozitív r rendben erősen szummálható. A $p = 1$ esetben ennek a tételnek érvényessége sokáig kétséges volt, míg G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD [3] példát adtak olyan integrálható függvényre, amelynek az $x = 0$ pontban Lebesgue-pontja van, mégis Fourier-sora az $x = 0$ pontban nem H_1-szummálható; egyúttal felvetették a következő problémát: igaz-e, hogy integrálható függvény Fourier-sora valamilyen pozitív rendben majdnem mindenütt erősen szummálható. Ezt a problémát J. MARCINKIEWICZ [4] oldotta meg; megmutatta, hogy integrálható függvény Fourier-sora majdnem mindenütt H_2-szummálható. Később A. ZYGMUND [5] bebizonyította, hogy integrálható függvény Fourier-sora bármely pozitív r rendben majdnem mindenütt erősen szummálható.

Mivel G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD említett példája szerint integrálható függvény Fourier-sora a függvény valamely Lebesgue-pontjában nem szükségképpen H_1-szummálható és így annál inkább nem H_2-szummálható, ezért felvetődik az a kérdés, hogy megadható-e olyan, aránylag egyszerű analitikus reláció, amely majdnem mindenütt teljesül és amelynek egy x_0 pontban való teljesüléséből következik a függvény Fourier-sorának az x_0 pontban való H_2-szummálhatósága. Ezzel a kérdéssel foglalkozunk ebben a dolgozatban. A H_{2m}-szummálhatóság kérdése (m természetes szám) hasonlóan tárgyalható, mégis az egyszerűbb számolás kedvéért a H_2-szummáció esetére szorítkozunk.

2. §. Tételek integrálható függvényekre

1. TÉTEL. *Ha $f(t)$ 1-periódusú függvény és $f(t) \in L[0, 1]$, akkor $[0, 1]$-en majdnem mindenütt $k(>0)$-ban egyenletesen*

$$(1) \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3 + hk} \int_{-h}^{h} |f(x+u) - f(x)| \, du \int_{u-k}^{u+k} |f(x+v) - f(x)| \, dv = 0 \qquad (h > 0).$$

A tétel bizonyítására felhasználjuk J. MARCINKIEWICZ (lásd pl. [4]) következő két lemmáját.

1. LEMMA. *Ha az $f^*(t) \in L[0, 1]$ függvény egy $E(\subseteq [0, 1])$ mérhető halmazon 0-val egyenlő, akkor minden $\eta > 0$ számhoz van olyan $F \subseteq E$ perfekt halmaz és olyan M pozitív szám, hogy*

$$\text{mes}\, F \geqq \text{mes}\, E - \eta,$$

$$\int_{-k}^{k} |f^*(x+v)| \, dv \leqq Mk \qquad (x \in F)$$

és

$$\int_{I_\nu} |f^*(v)| \, dv \leqq M \,\text{mes}\, I_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

ahol I_ν-k jelölik az F halmaznak a $(0, 1)$ intervallumban levő komplementer-intervallumait.

2. LEMMA. *Legyen $F \subseteq [0, 1]$ perfekt halmaz és legyenek I_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ F-nek a $(0, 1)$ intervallumban lévő komplementer-intervallumai. Ha a $\Phi(t)$ 1-periódusú függvény az F halmazon 0-val egyenlő és $\Phi(t) = \text{mes}\, I_\nu$, ha $t \in I_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, akkor a $[0, 1]$ intervallum majdnem minden x pontjában*

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x+t)}{t^2} \, dt < \infty.$$

AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Csak azt fogjuk részletesen megmutatni, hogy majdnem minden x pontra $k(>0)$-ban egyenletesen teljesül a

$$(2) \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3 + hk} \int_0^1 |f(x+u) - f(x)| \, du \int_u^{u+k} |f(x+v) - f(x)| \, dv = 0 \qquad (h > 0)$$

reláció; ennek alapján (1) egyszerűen adódik.

Legyen η tetszőleges pozitív szám és ω-át válasszuk olyan nagyra, hogy az $E = \underset{t}{E}[|f(t)| \leqq \omega;\ 0 \leqq t \leqq 1]$ halmazra teljesüljön a

$$\text{mes}\, E \geqq 1 - \eta$$

feltétel. Legyen

$$f^*(t)=\begin{cases} f(t), & \text{ha } |f(t)|>\omega, \\ 0, & \text{ha } |f(t)|\leqq\omega \end{cases}$$

és $f^{**}(t)=f(t)-f^*(t)$.

Mivel az E halmazon $f^*(t)=0$, azért az 1. lemma szerint van olyan $F\subseteqq E$ perfekt halmaz és olyan M pozitív szám, hogy

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{mes} F \geqq \operatorname{mes} E-\eta \geqq 1-2\eta,$$

$$\text{(4)} \qquad \int_{-k}^{k} |f^*(x+v)|\,dv \leqq Mk \qquad (x\in F)$$

és

$$\text{(5)} \qquad \int_{I_\nu} |f^*(v)|\,dv \leqq M \operatorname{mes} I_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

ahol $I_\nu=(a_\nu, b_\nu)$ $(\nu=1,2,\ldots)$ jelölik az F halmaznak a $(0,1)$ intervallumban levő komplementer-intervallumait.

Legyen $x_0\in F$ olyan hely, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$\text{(6)} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{mes}(F\cap[x_0-h, x_0+h])}{2h}=1 \qquad (h>0),$$

$$\text{(7)} \qquad \int_{-h}^{h} |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du=o(h) \qquad (0<h\to 0),$$

$$\text{(8)} \qquad \int_{0}^{1} \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt<\infty.$$

Továbbá legyen ε tetszőleges pozitív szám és a $h_0(>0)$ pozitív számot válaszszuk olyan kicsinynek, hogy $0<h\leqq h_0(\leqq 1)$ esetén teljesüljön az

$$\text{(9)} \qquad \int_{-h}^{h} |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du<\varepsilon h$$

egyenlőtlenség.

Mivel $f(t)=f^*(t)+f^{**}(t)$ és $f^*(x_0)=0$, ezért érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du\int_u^{u+k} |f(x_0+v)-f(x_0)|\,dv \leqq$$

$$\leqq \int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv+$$

$$+\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du\int_u^{u+k} |f^{**}(x_0+v)-f^{**}(x_0)|\,dv=J_1+J_2.$$

Mivel $|f^{**}(t)| \leqq \omega$, ezért (9) alapján

$$J_2 \leqq 2\omega\varepsilon h k, \tag{10}$$

ha $0 < h \leqq h_0$.

(4) és (5) alapján adódik, hogy

$$\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv = \int_0^k |f(x_0+u+v)|\,dv \leqq \begin{cases} Mk, & \text{ha} \quad x_0+u \in F, \\ M(\operatorname{mes} I_\nu + k), & \text{ha} \quad x_0+u \in I_\nu, \end{cases}$$

tehát

$$\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv \leqq M\{\Phi(x_0+u)+k\},$$

ahol $\Phi(t)$ jelöli a 2. lemmában definiált függvényt. Ebből az egyenlőtlenségből (9) alapján nyerjük, hogy

$$J_1 < M\varepsilon h k + M\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du, \tag{11}$$

ha $0 < h \leqq h_0$. Nyilvánvaló, hogy

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du = \int_0^h u^2|f(x_0+u)-f(x_0)|\,\frac{\Phi(x_0+u)}{u^2}\,du \leqq$$

$$\leqq \sum_\nu{}' \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(a_\nu-x_0)^2}\int_{I_\nu}(u-x_0)^2|f(u)-f(x_0)|\,du,$$

ahol az összegezés az olyan ν indexekre van kiterjesztve, amelyekre $I_\nu \subseteqq [x_0, x_0+h]$. (6) miatt van olyan $N = N(x_0)$ pozitív szám, amelyre $(b_\nu-x_0)/(a_\nu-x_0) \leqq N$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ és így érvényes a következő becslés:

$$\sum_\nu{}' \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(a_\nu-x_0)^2}\int_{I_\nu}(u-x_0)^2|f(u)-f(x_0)|\,du \leqq N^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(b_\nu-x_0)^2}\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du.$$

Mivel $\Phi(t)$ definíciója szerint

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(b_\nu-x_0)^2} \leqq \int_0^1 \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt,$$

ezért a fentiek alapján

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du \leqq$$

$$\leqq N^2h^2\int_0^1 \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du.$$

Ebből (8), (9) és (11) szerint nyerjük, hogy

$$J_1 < A\varepsilon(h^3 + hk),$$

ha $0 < h \leqq h_0$, ahol A egy ε-tól, h-tól és k-tól független állandó. Ebből és (10)-ből nyerjük végül, hogy az x_0 pontban (2) teljesül. A Lebesgue-féle tétel és a 2. lemma szerint (6), (7) és (8) F-en majdnem mindenütt teljesül és így (2) is F-en majdnem mindenütt érvényes. Mivel η tetszőleges, ezért (3) miatt (2) majdnem mindenütt fennáll.

Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

Egyszerűen bizonyítható a következő tétel:

2. TÉTEL. *Legyen $f(t) \in L[0, 1]$ 1-periódusú függvény. Ha az x_0 pontban* (1) *teljesül, akkor az $f(t)$ függvénynek az x_0 pontban Lebesgue-pontja van, azaz*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} |f(x_0+u) - f(x_0)|\, du = 0 \qquad (h > 0).$$

BIZONYÍTÁS. Ha majdnem mindenütt $f(t) = f(x_0)$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ellenkező esetben

$$a = \int_0^1 |f(x_0+v) - f(x_0)|\, dv > 0$$

és így (1)-ből $k = \frac{1}{2}$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\int_{-h}^{h} |f(x_0+u) - f(x_0)|\, du =$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-h}^{h} |f(x_0+u) - f(x_0)|\, du \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} |f(x_0+v) - f(x_0)|\, dv,$$

amiből az állítás következik.

3. §. Integrálható függvények Fourier-sorának H_2-szummálhatósága

3. TÉTEL. *Legyen $f(x) \in L[0, 2\pi]$ 2π-periódusú függvény. Ha az x_0 pontban* (1) *teljesül, akkor az x_0 pontban $\mathfrak{S}(f)$ H_2-szummálható.*

BIZONYÍTÁS. A tétel bizonyítására GRÜNWALD GÉZA [1] alapgondolatát használjuk fel. Feltehetjük, hogy $x_0 = 0$ és $f(0) = 0$. Legyen ε tetszőleges pozitív szám és δ $(0 < 2\delta < \pi)$ olyan kicsiny, hogy $0 < h \leqq 2\delta$ esetén teljesüljenek az

$$\text{(12)} \qquad \int_{-h}^{h} |f(u)|\, du \int_{u-k}^{u+k} |f(v)|\, dv < \varepsilon(h^3 + hk) \qquad (k > 0)$$

és

$$(13)\qquad \int_{-h}^{h} |f(u)|\,du < \varepsilon h$$

feltételek.

Legyen $f_1(t) = f(t)$, ha $|t| \leqq \delta$ és $f_1(t) = 0$, ha $\delta < |t| \leqq \pi$, továbbá legyen $f_2(t) = f(t) - f_1(t)$. A Riemann-lemma szerint

$$(14)\qquad \lim_{\nu \to \infty} s_\nu(f_2; 0) = 0.$$

Mivel $s_\nu^2(f; 0) \leqq 2(s_\nu^2(f_1; 0) + s_\nu^2(f_2; 0))$ és mivel (14) szerint

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^2(f_2; 0) = 0,$$

ezért elég a $\mathfrak{S}(f_1)$ sornak az $x = 0$ pontban való H_2-szummálhatóságát megmutatni. Minthogy

$$s_\nu^2(f_1; 0) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(u) f(v) \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) u \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) v}{2 \sin \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}}\, du\, dv,$$

ezért

$$(15)\qquad \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^2(f_1; 0) = \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv,$$

ahol

$$k_n(u, v) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u - v)}{\sin \frac{u - v}{2}} - \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u + v)}{\sin \frac{u + v}{2}} \right|.$$

Tekintsük az

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv - \left(\int_0^{\delta}\int_0^{\delta} + \int_0^{\delta}\int_{-\delta}^{0} + \int_{-\delta}^{0}\int_0^{\delta} + \int_{-\delta}^{0}\int_{-\delta}^{0} \right) f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv$$

felbontást. A tétel bizonyítására elég megmutatni, hogy a jobboldali tagok abszolút értékben elég nagy n-re kisebbek lesznek, mint ε-nak egy ε-tól független konstansszorosa. Csak a

$$J = \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv = 2 \int_0^{\delta}\int_0^{u} f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv$$

integrált becsüljük részletesen, a többi integrál hasonlóan becsülhető.

Legyen n olyan nagy, hogy teljesüljön a $2\pi/n \leqq \delta$ feltétel és tekintsük a következő tartományokat:

$$\sigma_1 = \underset{(u,v)}{E}[0 \leqq u \leqq 2\pi/n;\ 0 \leqq v \leqq u],\quad \sigma_2 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ 0 \leqq v \leqq \pi/n],$$
$$\sigma_3 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ u-\pi/n \leqq v \leqq u],$$
$$\sigma_4 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ \pi/n \leqq v \leqq u-\pi/n].$$

A következőkben jelöljenek $c_1, c_2, \ldots$ n-től és δ-tól független állandókat. Érvényesek a következő becslések (lásd pl. GRÜNWALD G. [1]):

$$|k_n(u,v)| \leqq \begin{cases} c_1 n^2, & \text{ha } (u,v) \in \sigma_1, \\ c_2 \dfrac{1}{u^2}, & \text{ha } (u,v) \in \sigma_2, \\ c_3 \dfrac{1}{uv}, & \text{ha } (u,v) \in \sigma_3, \\ \dfrac{1}{nuv(u-v)}, & \text{ha } (u,v) \in \sigma_4. \end{cases}$$

Ezek alapján

$$|J| \leqq 2c_1 n^2 \iint_{\sigma_1} |f(u)f(v)|\, du\, dv + 2c_2 \iint_{\sigma_2} \frac{|f(u)f(v)|}{u^2}\, du\, dv +$$
$$\tag{16} + 2c_3 \iint_{\sigma_3} \frac{|f(u)f(v)|}{uv}\, du\, dv + \frac{2}{n} \iint_{\sigma_4} \frac{|f(u)f(v)|}{uv(u-v)}\, du\, dv = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

(13)-ból következik, hogy

$$\tag{17} J_1 \leqq 2c_1 n^2 \int_0^{2\pi/n} |f(u)|\, du \int_0^{2\pi/n} |f(v)|\, dv < c_4 \varepsilon.$$

(12) alapján parciális integrálással nyerjük, hogy

$$\tag{18} J_2 = 2c_2 \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\, du \int_0^{\pi/n} |f(v)|\, dv < 2c_2 \varepsilon \frac{\pi}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\, du < c_5 \varepsilon.$$

Mivel a σ_3 tartományon $v \geqq u$, $\dfrac{\pi}{n} \geqq \dfrac{u}{2}$, ezért

$$J_3 \leqq 4c_3 \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\, du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)|\, dv.$$

Bevezetve a

$$\psi(t) = \int_0^t |f(u)|\, du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)|\, dv$$

függvényt, (12) szerint parciális integrálással adódik, hogy

$$\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\,du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)|\,dv = \left[\frac{\psi(t)}{t^2}\right]_{2\pi/n}^{\delta} + 2\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{\psi(t)}{t^3}\,dt <$$

$$< c_6\varepsilon + 2\varepsilon \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{t^3 + t\pi/n}{t^3}\,dt < c_7\varepsilon + 2\varepsilon\pi/n \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{dt}{t^2} < c_8\varepsilon,$$

tehát

(19) $$J_3 < c_9\varepsilon.$$

Ha $v \leqq \frac{u}{2}$, akkor $u - v \geqq \frac{u}{2}$ és így J_4-re érvényes a következő becslés:

(20)
$$J_4 = \frac{2}{n}\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u}\,du \int_{\pi/n}^{u-\pi/n} \frac{|f(v)|}{v(u-v)}\,dv \leqq \frac{4}{n}\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\,du \int_{\pi/n}^{u/2} \frac{|f(v)|}{v}\,dv +$$

$$+ \frac{4}{n}\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} \int_{u/2}^{u-\pi/n} \frac{|f(v)|}{(u-v)}\,du = J_1^* + J_2^*.$$

(13) alapján parciális integrálással adódik, hogy

$$\int_{2v}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\,du < c_{10}\varepsilon\frac{1}{v},$$

így (13) alapján egy újabb parciális integrálással nyerjük, hogy

(21) $$J_1^* = \frac{4}{n}\int_{\pi/n}^{\delta/2} \frac{|f(v)|}{v}\,dv \int_{2v}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\,du < \frac{c_{11}}{n}\varepsilon \int_{\pi/n}^{\delta/2} \frac{|f(v)|}{v^2} < c_{12}\varepsilon.$$

Legyen végül p olyan természetes szám, amelyre $2^p\pi/n \leqq \delta < 2^{p+1}\pi/n$. Akkor érvényes a következő becslés:

$$J_2^* \leqq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{p} \int_{2^i\pi/n}^{2^{i+1}\pi/n} \frac{|f(u)|}{u^2}\,du \left(\sum_{j=0}^{i-1} \int_{u-2^{j+1}\pi/n}^{u-2^j\pi/n} \frac{|f(v)|}{u-v}\,dv\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1} \frac{n}{2^i\pi}\,\frac{n}{2^j\pi} \int_{2^i\pi/n}^{2^{i+1}\pi/n} |f(u)|\,du \int_{u-2^{j+1}\pi/n}^{u-2^j\pi/n} |f(v)|\,dv <$$

$$< \frac{c_{13}}{n}\varepsilon \sum_{i=1}^{p} 2^i \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2^j} + c_{14}\varepsilon \sum_{i=1}^{p} \frac{i}{2^i} < c_{15}\varepsilon.$$

Ebből és (21)-ből nyerjük (20) szerint, hogy $J_4 < c_{16}\varepsilon$. Ebből, (16), (17), (18) és (19) alapján adódik, hogy $|J| < c_{17}\varepsilon$, ha n elég nagy.

Ezzel a 3. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

IRODALOM

[1] G. GRÜNWALD, Über die Summabilität der Fourierschen Reihe, *Acta Sci. Math. Szeged,* 10 (1941—43), 55—63.

[2] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, Note on the theory of series (IV.), On the strong summability of Fourier series, *Proceedings of the London Math. Society,* **26** (1927), 273—286.

[3] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, The strong summability of Fourier series, *Fundamenta Math.,* 25 (1935), 162—189.

[4] J. MARCINKIEWICZ, Sur la sommabilité forte de séries de Fourier, *Journal of the London Math. Society,* 14 (1939), 162—168.

[5] A. ZYGMUND, On the convergence and summability of power series on the circle of convergence (II), *Proceedings of the London Math. Society,* 47 (1942), 326—350.