AZ ÁLTALÁNOS VALÓSZÍNŰSÉGI TÉTELRŐL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Jordan Károly lev. tag az 1954. november 26-án tartott felolvasó ülésen

Jacobus Bernoulli 300-adik születésnapjára, 1954. dec. 27-ére

Bevezetés

Tekintsünk egy véletlen kísérletet, melynek kimenetelét az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események bekövetkezése szempontjából vizsgáljuk. Jelölje η_n valószínűségi változó az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül előfordulók számosságát. Az η_n valószínűségi változó a $0, 1, 2, \ldots, n$ értékeket veheti fel. Legyen a rövidség kedvéért $\mathbf{P}(\eta_n = k) = P_k$ és $\mathbf{E}\left\{\binom{\eta_n}{k}\right\} = B_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, ahol $\mathbf{P}$ a valószínűség és $\mathbf{E}$ a várható érték szimbóluma.

JORDAN KÁROLY [1], 1927-ben megjelent dolgozatában közölte az ún. *általános valószínűségi tételt*, amely a fenti jelölésben a következőképpen fejezhető ki:

$$P_k = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} B_j, \tag{1}$$

ahol $B_0 = 1$ és $j = 1, 2, \ldots, n$-re

$$B_j = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_j)} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_j}). \tag{2}$$

(2)-ben az összegezés kiterjesztendő az $(1, 2, \ldots, n)$ számokból alkotható valamennyi $(i_1, i_2, \ldots, i_j)$, j-edosztályú ismétlés nélküli kombinációra.

JORDAN KÁROLY [1] dolgozatában a B_j mennyiség még formálisan van definiálva a (2) összeggel. Későbbi (2) munkájában azonban kimutatja, hogy a B_j mennyiségek az η_n változó binomiális momentumaival egyeznek meg. Megjegyezzük, hogy JORDAN KÁROLY rámutatott arra is, hogy az (1) képlet általános érvényű olyan értelemben, hogy egy $0, 1, 2, \ldots, n$ értékkészletű, egyébként tetszőleges változó $\{P_k\}$ valószínűségeloszlása és $\{B_k\}$ binomiális momentumai között fennáll az (1) összefüggés.

JORDAN KÁROLY (1) tételének történelmi gyökerei egészen JACOBUS BERNOULLInak a valószínűségszámítás zseniális úttörőjének eredményéig nyúlnak vissza. JACOBUS BERNOULLI (1654—1705) állapította meg, hogy mi a valószínűsége annak, hogy n kísérlet során valamilyen esemény pontosan k-szor következzék be. Az (1) tétel ennél általánosabban, tetszőleges eseményekre is megadja ezt a valószínűséget. Megjegyezzük, hogy JORDAN KÁROLY tétele magában foglalja POINCARÉ tételét is, amely azt adja meg, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül legalább egy előfordulásának a valószínűsége $\mathbf{P}(A_1+A_2+\cdots+A_n)=B_1-B_2+B_3-\ldots+(-1)^{n-1}B_n$. Erre a valószínűségre JORDAN KÁROLY tétele az $1-P_0$ eredményt szolgáltatja, ami megegyezik az előzővel.

A fenti tételeknek fontos speciális esetét kapjuk, ha feltesszük, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események *ekvivalens események*. Ez alatt azt értjük, hogy bárhogyan is választunk ki az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül j különbözőt $(j=1,2,\ldots,n)$, ezen események együttes bekövetkezésének a valószínűsége független a kiválasztás módjától és csupán a j számtól függ, azaz fennáll

$$\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j})=\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_j), \; (1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_j\leqq n;\, j=1,2,\ldots,n).$$

Vezessük be ekkor a következő jelölést: $\pi_0=1$ és $j=1,2,\ldots,n$-re:

$$\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_j)=\pi_j.$$

Ekkor speciálisan ekvivalens eseményekre (1) és (2) a következő egyszerűbb alakot ölti:

$$(1') \qquad P_k=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{n}{j}\pi_j=\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{n-k}{n-j}\pi_j,$$

és

$$(2') \qquad B_j=\binom{n}{j}\pi_j.$$

A következőkben JORDAN KÁROLY (1) és (2) képletekben kifejezésre jutó eredményeivel foglalkozunk. Mégpedig az általános esetre két bizonyítást és az ekvivalens események speciális esetére egy harmadik bizonyítást is adunk. Bár JORDAN KÁROLY fenti tételeire eredeti bizonyítása óta több más bizonyítást is adtak (M. FRÉCHET [3], W. FELLER [4], K. L. CHUNG és L. C. HSU [5] stb.), mégis úgy véljük, hogy nem szaporítjuk feleslegesen ezen bizonyítások számát a következőkben közölt, aránylag egyszerű bizonyításokkal. Végül az általános valószínűségi tételnek a sztochasztikus folyamatok körében való néhány új alkalmazási lehetőségére mutatunk példát.

1. §. Első bizonyítás

A bizonyítás gondolatmenete abban áll, hogy először megmutatjuk, hogy a (2) alatti B_j mennyiségek valóban az η_n változó binomiális momentumaival egyeznek meg, azaz, hogy fennáll

$$B_j=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}P_k, \qquad (j=0,1,2,\ldots,n).$$

Ezután az egyelőre ismeretlen $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ valószínűségeket ezen egyenletrendszerből meghatározzuk és így megkapjuk az (1) eredményt is.

Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy az I biztos esemény a következő szorzat alakjában írható fel:

$$I=(A_1+\bar{A}_1)(A_2+\bar{A}_2)\cdots(A_n+\bar{A}_n),$$

ahol $\bar{A}$ jelöli A esemény ellentétét. Ha most a jobboldalon álló szorzásokat elvégezzük, akkor ezzel az I eseményt előállítottuk egymást páronként kizáró események összegeként. Nevezzük ezt I felbontásának.

Tekintsük most a (2) összeget:

$$B_j=\sum_{(i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_j)} \mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j}).$$

Ebben az összegben az egyes $\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j})$ valószínűségek annak az eseménynek a valószínűségét jelentik, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_j}$ mindenesetre előfordul. Ez az utóbbi esemény pedig megegyezik I említett felbontásában szereplő azon események összegével, amelyek az $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j}$ szorzatot tartalmazzák. Ezek egymást páronként kizáró események és így összegüknek a valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségeinek összegével, azaz a $\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j})$ valószínűség előállítható, mint I felbontásában szereplő bizonyos események valószínűségeinek az öszszege. Végezzük el a B_j összeg minden tagjára ezt az előállítást és csoportosítsuk a kapott valószínűségeket aszerint, hogy megfelelő esemény az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül hányat tartalmaz (a többi eseménynek nyilvánvalóan az ellentéteit fogja tartalmazni). Ez a szám $k=j, j+1, \ldots, n$ lehet. Tekintsük a k-adik csoportot. Ebben egyrészt mindazon események valószínűségeinek összege előfordul, amelyek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül pontosan k-nak a szorzatát (és a többi ellentétének szorzatát) tartalmazzák, másrészt minden ilyen valószínűség $\binom{k}{j}$-szer fordul elő, ugyanis minden ilyen valószínűség a B_j összeg annyi tagjának kifejtésében fog szerepelni, ahányféleképpen a tekintett k esemény közül kiválasztható j. Így a k-adik csoporthoz tartozó valószínűségek összege $\binom{k}{j} P_k$ és ezt $k=j, j+1, \ldots, n$-re összegezve nyerjük B_j-t, azaz

$$B_j=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}P_k, \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ezzel igazoltuk (2) helyességét.

A fenti egyenletrendszer a P_k ismeretlenekre a legegyszerűbben úgy oldható meg, hogy a j-edik egyenletet $(-1)^{j-k}\binom{j}{k}$-val szorozzuk és összegezzük az egyenleteket. Ekkor ugyanis

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}B_j=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\sum_{l=j}^{n}\binom{l}{j}P_l=\sum_{l=k}^{n}P_l\sum_{j=k}^{l}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{l}{j}$$

és itt

$$\sum_{j=k}^{l}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{l}{j}=\begin{cases}1 \text{ ha } l=k\\ 0 \text{ ha } l\neq k,\end{cases}$$

ami könnyen belátható $\binom{j}{k}\binom{l}{j}=\binom{l}{k}\binom{l-k}{l-j}$ átalakítással. Így tehát

$$P_k=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}B_j,$$

amivel az (1) állítást is igazoltuk.

2. §. Második bizonyítás

Egy kísérlettel kapcsolatban értelmezzük a ξ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ valószínűségi változókat úgy, hogy $\xi_i=1$ ha A_i előfordul és $\xi_i=0$ ha A_i nem fordul elő. Ekkor nyilvánvalóan az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül előfordulók számosságát $\eta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ szolgáltatja. Miként az első bizonyításnál, most is először η_n, j-edik binomiális momentumát, azaz $\binom{\eta_n}{j}$ várható értékét határozzuk meg. Vegyük tekintetbe, hogy az ismert Cauchy-féle formula szerint

$$\binom{\eta_n}{j}=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=j}\binom{\xi_1}{k_1}\binom{\xi_2}{k_2}\cdots\binom{\xi_n}{k_n}$$

és nyilvánvalóan $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_j\leqq n$-re

$$\mathbf{E}\{\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_j}\}=\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j}).$$

Így tehát

$$B_j=\mathbf{E}\left\{\binom{\eta_n}{j}\right\}=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=j}\mathbf{E}\left\{\binom{\xi_1}{k_1}\binom{\xi_2}{k_2}\cdots\binom{\xi_n}{k_n}\right\}=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_j)}\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j}).$$

Ugyanis fennáll, hogy valószínűségi változók összegének a várható értéke egyenlő az egyes tagok várható értékeinek összegével. Most zérustól különböző tagokat csak akkor nyerünk, ha $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a 0 vagy 1 értékeket veszik fel éspedig kell, hogy közülük j számú 1 és $n-j$ számú 0 legyen, mégpedig legyen $k_{i_1}=k_{i_2}=\cdots=k_{i_j}=1$. Így nyerjük a jobboldalt, amivel (2) fennállását igazoltuk. Innen (1) fennállása az első bizonyításban követett számolással adódik.

3. §. Harmadik bizonyítás

Most szorítkozzunk arra a speciális esetre, midőn $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ekvivalens események.*

Először az (1′) képletet igazoljuk. Jelölje V_k annak a valószínűségét, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül kiválasztott k előfordul és a többi nem fordul elő. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalenciájából következik, hogy ez a valószínűség nem függ a kiválasztás módjától, azaz írható $V_k = \mathbf{P}(A_1 A_2 \ldots A_k \bar{A}_{k+1} \ldots \bar{A}_n)$. Ekkor viszont fennáll, hogy

$$P_k = \binom{n}{k} V_k, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ugyanis V_k annak az eseménynek a valószínűségét jelenti, hogy pontosan k kiválasztott esemény fordul elő és n esemény közül k, $\binom{n}{k}$-féleképpen választható ki.

A V_k valószínűségek meghatározására a következő egyenletrendszer írható fel:

$$(*) \qquad \pi_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{n-k} V_k, \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Itt a baloldal annak a valószínűségét jelöli, hogy kiválasztott j esemény mindenesetre előfordul és ez több egymást kizáró módon jöhet létre, mégpedig a többi $n-j$ esemény közül még előfordulhat: $0, 1, 2, \ldots, n-j$. A jobboldal éppen ezen utóbbi esemény valószínűségét szolgáltatja. Ha most a fenti egyenletrendszer j-edik egyenletét $(-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j}$-vel szorozzuk és az egyenleteket összegezzük, úgy azt kapjuk, hogy

$$V_k = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j} \pi_j.$$

Mivel $P_k = \binom{n}{k} V_k$, tehát ezzel (1')-et igazoltuk.

Továbbá B_j-re most fennáll, hogy

$$B_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} P_k = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \binom{n}{k} V_k = \binom{n}{j} \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{n-k} V_k = \binom{n}{j} \pi_j,$$

ahol az utolsó egyenlőség (*)-ból adódik. Ezzel (2') fennállását is bebizonyítottuk.

1. *Megjegyzés:* Speciálisan ekvivalens eseményekre az η_n változó várható értéke

$$(3) \qquad \mathbf{E}\{\eta_n\} = B_1 = n\pi_1$$

és szórásnégyzete

$$(4) \qquad \mathbf{D}^2\{\eta_n\} = 2B_2 + B_1 - B_1^2 = n^2(\pi_2 - \pi_1^2) + n(\pi_1 - \pi_2).$$

Az η_n változó s-edik hatványmomentuma pedig

$$(5) \qquad \mathbf{E}\{\eta_n^s\} = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{S}_s^j j!\, B_j = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{S}_s^j j! \binom{n}{j} \pi_j,$$

ahol $\mathfrak{S}_s^j$ a másodfajú Stirling számokat jelöli (lásd pl. CH. JORDAN [6] p. 168).

2. *Megjegyzés:* Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ekvivalens események, úgy könnyen belátható, hogy $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ események is ekvivalensek. Annak a valószinűsége, hogy $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ események közül pontosan k fordul elő nyilván megegyezik annak a valószinűségével, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ közül pontosan $n-k$ fordul elő és ezen utóbbi valószínűség megállapítása szintén az (1′) képlettel történik. Persze közvetlenül is meghatározhatjuk ezen utóbbi valószinűséget JORDAN KÁROLY tétele alapján, de ahhoz ismernünk kell a

$$\pi_j^* = \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_j)$$

valószínűségeket. Ezek a π_j valószínűségekkel a következőképpen függnek össze

$$\pi_j^* = 1 - \binom{j}{1}\pi_1 + \binom{j}{2}\pi_2 - \ldots + (-1)^j \binom{j}{j}\pi_j,$$

ami szintén JORDAN (1′) tétele alapján nyerhető, ha azt arra az esetre alkalmazzuk, midőn arról van szó, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_j$ események közül egy sem fordul elő. Gyakorlati feladatok megoldásánál π_j és π_j^* közül mindig azt célszerű tekinteni, amelyiket könnyebb meghatározni.

4. §. Alkalmazások

Ebben a fejezetben azt szeretnénk megmutatni, hogy JORDAN KÁROLY általános valószínűségi tétele mennyire hasznos eredménye a valószínűségszámításnak. Az (1) és (2) képletekben kifejezésre jutó tételek segítségével a valószínűségszámítás sok olyan problémája egyszerűen megoldható, amelyeket eddig csak bonyolultabb módszerek alkalmazásával sikerült tárgyalni. Ez a megállapítás a valószínűségszámítás újabb fejezetére, a sztochasztikus folyamatok elméletére is érvényes, amit néhány példa megoldásával mutatunk meg.

A következőkben mindvégig feltesszük, hogy a vizsgálatunk tárgyát képező $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalensek, $\pi_j = \mathbf{P}(A_1 A_2 \ldots A_j)$ és η_n valószínűségi változó jelöli az n esemény közül előfordulók számát.

1. A valószínűségszámításról szóló kézikönyvekben és tudományos értekezésekben gyakori feladat, hogy egy bizonyos, a fentiekben értelmezett, η_n valószínűségi változó várható értékének, szórásának, vagy magasabbrendű momentumainak meghatározásáról van szó. Ilyenkor sok esetben meghatározzák η_n valószínűségeloszlását és ennek ismeretében terjedelmes számítással nyerik a szóban forgó mennyiségeket. Most arra a tényre szeretnénk rámutatni, hogy a (3), (4) és (5) formulák közvetlenül alkalmazhatók ezen mennyiségek kifejezésére és erre elegendő csupán a π_j valószínűségeket ismerni, amelyek sokszor könnyen meghatározhatók. Az alábbiakban néhány példára megadjuk a π_j valószínűségek értékeit, amelyek ismeretében a fent adott általános tárgyalás alkalmazható.

a) Tekintsünk egy urnát, amelyben K fehér és $N-K$ fekete golyó van. Egymásután visszatevés nélkül kiveszünk n golyót. Jelölje A_i esemény azt, hogy az i-edik húzásra fehér golyót kapunk. Ekkor az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalensek és η_n jelöli a fehér golyók számát a kihúzottak között. Most

$$\pi_j = \frac{(K)_j}{(N)_j} = \frac{\binom{K}{j}}{\binom{N}{j}}$$

és (1') alkalmazásával

$$P_k = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}}.$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy az n egymásutáni húzás egyenértékű n golyó egyszerre történő kivételével, úgy közvetlenül azt kapjuk, hogy

$$P_k = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

ami az előzővel megegyezik.

Most (3) és (4) szerint

$$\mathbf{E}\{\eta_n\} = \frac{nK}{N}$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\eta_n\} = \frac{nK}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

b) Elhelyezünk N számú golyót n dobozban. Legyen minden egyes elhelyezkedés egyenlően valószínű. Jelölje A_i esemény azt, hogy az i-edik doboz üres. Ekkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ekvivalens események és

$$\pi_j = \left(1-\frac{j}{n}\right)^N.$$

c) Az előző kísérletnél jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik dobozban ν golyó van. Ekkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ekvivalens események és

$$\pi_j = \frac{N!}{(\nu!)^j(N-j\nu)!}\frac{1}{n^N}$$

ha $j \leqq N/\nu$, különben $\pi_j = 0$.

d) Elhelyezünk N számú golyót n dobozba a Bose-Einstein statisztika feltevése szerint (az egyes golyók megkülönböztethetetlenek, azaz két különböző dobozban levő golyó felcserélése nem ad új elhelyezkedést). Minden egyes elhelyezkedés egyenlően valószínű. Jelölje A_i esemény azt, hogy az i-edik doboz üres. Ekkor $A_1, A_2, \dots, A_n$ ekvivalens események és

$$\pi_j = \frac{\binom{N+n-j-1}{N}}{\binom{N+n-1}{N}}$$

e) Tekintsük az előző feladatot azzal a módosítással, hogy A_i esemény azt jelöli, hogy az i-edik dobozban ν golyó van. Ekkor $A_1, A_2, \dots, A_n$ ekvivalens események és

$$\pi_j = \frac{\binom{N+n-j(\nu+1)-1}{N-j\nu}}{\binom{N+n-1}{N}}$$

2 a) A $(0, t)$ intervallumon válasszunk $n-1$ számú egymástól független egyenletes eloszlást mutató pontot. Ez az $n-1$ pont a $(0, t)$ intervallumot (1 valószínűséggel) n szakaszra osztja. Jelölje ezen szakaszok hosszát rendre $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ valószínűségi változó és A_i esemény legyen az, hogy $\delta_i > \alpha$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Könnyen megmutatható, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események ekvivalensek és fennáll

$$\pi_j = \begin{cases} \left(1 - \frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1} & \text{ha } 0 \leqq j\alpha \leqq t \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k szakasz nagyobb α-nál, (2') szerint

$$P_k = \binom{n}{k} \sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j} \left(1 - \frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1}.$$

Ez az eredmény a valószínűségszámítás múlt századbeli irodalmától kezdve egészen napjainkig számos helyen újra és újra előfordul, de mindig bonyolult számításokkal, vagy geometriai megfontolásokkal igazolják fennállását.

b) Tekintsünk most egy t kerületű kört. Ezen a körön válasszunk n számú független, egyenletes eloszlást mutató pontot. Ez az n pont a kör kerületét n szakaszra osztja. Jelölje a szakaszok hosszát rendre $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ valószínűségi változó és legyen A_i esemény az, hogy $\delta_i > \alpha$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Ekkor az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események ekvivalensek és a π_j és P_k mennyiségek szószerint megegyeznek az előző feladat eredményeivel.

3) C. LEVERT és W. L. SCHEEN [7] munkájukban részecskeszámlálókkal kapcsolatosan foglalkoznak a következő problémával: Egy λ eseménysűrűségű

Poisson-folyamat $(0, t)$ időközben előforduló valamennyi eseménye elindít egy-egy α időtartamú impulzust. Regisztrált eseményeknek nevezzük azokat, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn nincs folyamatban impulzus. Meghatározandó a $(0, t)$ időközben regisztrált események számának eloszlása. LEVERT és SCHEEN ezt a problémát úgy oldják meg, hogy a $(0, t)$ intervallumot egy körkerülettel helyettesítik. Ezzel a problémát módosítják, mert a $(0, t)$ intervallum végén kezdődő impulzusok esetleg befolyást gyakorolnak a kezdeti állapotra és így lehetséges, hogy az első esemény nem lesz regisztrált, pedig különben az lenne. Megjegyezzük, hogy a probléma eredeti alakjában könnyen megoldható és általánosítható tetszőleges eloszlású impulzusokra is ([8] 535. o. és [9] 148 o.). Mindazonáltal a módosított probléma matematikai szempontból érdekes. LEVERT és SCHEEN a módosított problémát is terjedelmes és bonyolult számítással oldják meg. Most megmutatjuk, hogy JORDAN KÁROLY (1') tételének alkalmazásával a probléma egyszerűen megoldható.

Annak a valószínűsége, hogy a Poisson-folyamatban $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordul elő

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Ha tudjuk, hogy a $(0, t)$ intervallumban pontosan n számú esemény fordult elő, akkor ezen feltétel mellett az n esemény előfordulási pontjai úgy tekinthetők, mint n számú független, egyenletes eloszlású pont elhelyezkedése, ezen az intervallumon, illetve a körkerületen. Ez az n pont a körkerületet n szakaszra osztja. Legyenek ezek hosszai rendre $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Az n esemény közül pontosan k lesz regisztrálva akkor, ha a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ távolságok közül k számú nagyobb, mint α. Ezen utóbbi esemény valószínűsége pedig 2.b) szerint

$$\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}(-1)^{j-k}\binom{n-k}{n-j}\left(1-\frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1}.$$

Jelölje $P(t,k)$ annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ időközben regisztrált események száma pontosan k. Ha tekintetbe vesszük, hogy több egymást kizáró módon nyerhetünk k regisztrált eseményt, mégpedig úgy, hogy $(0, t)$ időközben a Poisson-folyamatban $n=k, k+1, k+2, \ldots$ esemény fordul elő, akkor a teljes valószínűségek tétele szerint

$$P(t, k)=\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}(-1)^{j-k}\binom{n-k}{n-j}\left(1-\frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1}$$

adódik. Ha az n szerinti összegezést végrehajtjuk, úgy azt kapjuk, hogy

$$P(t,k)=\sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\frac{e^{-\lambda\alpha j}(\lambda t)^j}{j!}\left(1-\frac{j\alpha}{t}\right)^{j-1},$$

ami megegyezik C. LEVERT és W. L. SCHEEN [7] eredményével.

Most meghatározzuk a $\{P(t,k)\}$ valószínűségeloszlás $B_s(t)$ binomiális momentumait. Ha tudjuk, hogy $(0,t)$ intervallumban pontosan n esemény fordult elő, akkor ezen feltétel mellett a regisztrált események száma eloszlásának s-edik binomiális momentuma (2') szerint $\binom{n}{s}\pi_s$, ahol most 2.b) szerint $\pi_s=\left(1-\frac{s\alpha}{t}\right)^{n-1}$ ha $0\leqq s\alpha\leqq t$. Mivel a $(0, t)$ intervallumban előforduló események száma valószínűségi változó ($\{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!\}$ eloszlással), ezért a $(0, t)$ intervallumban regisztrált események száma eloszlásának s-edik binomiális momentumát a feltételes várható érték definiciója alapján a következő kifejezés szolgáltatja:

$$B_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{s}\left(1-\frac{s\alpha}{t}\right)^{n-1}=\frac{e^{-\lambda\alpha s}(\lambda t)^s}{s!}\left(1-\frac{s\alpha}{t}\right)^{s-1},$$

ha $0\leqq s\alpha\leqq t$, különben $B_s(t)=0$.

LEVERT és SCHEEN is meghatározták a $B_s(t)$ binomiális momentumokat, de $P(t,k)$ ismeretében történő számítással. Az itteni számítás ezzel szemben közvetlen, amely nem támaszkodik $P(t,k)$ ismeretére. Ez egy új lehetőséget is ad $P(t,k)$ kiszámítására. A bevezetésben ugyanis említettük, hogy JORDAN KÁROLY észrevette, hogy az (1) összefüggés általánosan érvényes egész értékeket felvevő valószínűségi változók eloszlása és binomiális momentumai között. Így tehát eszerint fennáll

$$P(t,k)=\sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}B_j(t),$$

ami megegyezik a korábbi eredménnyel.

IRODALOM

[1] JORDAN KÁROLY: A valószínűségszámítás alapfogalmai. *Matematikai és Fizikai Lapok* 34 (1927) 109—136.

[2] CH. JORDAN: Problèmes de la probabilité des épreuves répétées dans le cas général. *Bulletin de la Société Mathematique de France,* 1939.

[3] M. FRÉCHET: Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants. *Actualités scientifiques et industrielles,* Paris, 1940.

[4] W. FELLER: An introduction to probability theory and its applications. New-York, 1950.

[5] K. L. CHUNG AND L. C. HSU: A combinatorial formula and application to the theory of probability of arbitrary events. *Annals of Mathematical Statistics* **16** (1945) 91—95.

[6] CH. JORDAN: Calculus of finite differences. Budapest, 1939.

[7] C. LEVERT AND W. L. SCHEEN: Probability fluctuation of discharges in a Geiger—Müller counter produced by cosmic radiation. *Physica,* **10** (1943) 225—238.

[8] TAKÁCS L.; Poisson folyamat által származtatott történésfolyamatokról. *MTA III. Oszt. Közl.* **4** (1954) 526—541.

[9] TAKÁCS L.: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál *MTA. Alk. Mat. Int. Közl.* **2** (1953) 135—151.