ORTOGONÁLIS SOROKRÓL

TANDORI KÁROLY

Bemutatta Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag az 1955. április 29-én tartott felolvasó ülésen

1. Legyen $\{\varphi_n(x)\}$ az $[a, b]$ intervallumon ortogonális és normált rendszer. Tekintsük a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

ortogonális sort, ahol az a_k valós együtthatók eleget tesznek a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

feltételnek. Legyen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

és az $\{[s_\nu(x)-f(x)]^2\}$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ sorozat $(C, \alpha > 0)$-közepét jelöljük $\sigma_n^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x)$-szel:

$$\sigma_n^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - f(x)]^2,$$

$$A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

A. ZYGMUND [2] bebizonyította a következő tételt: ha az (1) sor az $[a, b]$ intervallumon majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható az $f(x)$ függvényhez, akkor az $[a, b]$ intervallumon majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)}([s_\nu - f]^2; x) = 0.$$

Felvethető az a kérdés, hogy a fenti feltételek mellett az $\{[s_\nu(x)-f(x)]^2\}$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ sorozat (C, α)-közepei $(0 < \alpha < 1)$ is $[a, b]$-n majdnem mindenütt 0-hoz konvergálnak. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban bebizonyítjuk a következő tételt:

TÉTEL: *Ha az* (1) *sor az* $[a, b]$ *intervallumon majdnem mindenütt* $(C, 1)$-*szummálható az* $f(x)$ *függvényhez, akkor* $[a, b]$-*n majdnem mindenütt*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) = 0.$$

A tétel bizonyítására előrebocsátunk egy segédtételt. Definiáljuk az m_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ indexsorozatot a következő módon: legyen $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, és ha $\nu > 1$, $2^m < \nu \leqq 2^{m+1}$, akkor legyen $m_\nu = 2^m$.

SEGÉDTÉTEL. *Négyzetesen integrálható kifejtés esetén $[a, b]$-n majdnem mindenütt*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = 0.$$

A segédtétel bizonyítására elég megmutatni, hogy a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2}{\nu} \tag{2}$$

sor $[a, b]$-n majdnem mindenütt konvergál; ebből egy ismert tétel szerint (lásd pl. A. ZYGMUND [3], 43. o.) adódik a segédtétel. Mivel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \frac{[s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2}{\nu} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_\nu^2}{\nu} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} (a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_\nu^2) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty,$$

így a B. Levi-féle konvergencia-tétel alkalmazásával nyerjük, hogy a (2) sor $[a, b]$-n majdnem mindenütt konvergál. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

3. A TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Az $(u+v)^2 \leqq 2(u^2+v^2)$ egyenlőtlenség alkalmazásával adódik, hogy

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) \leqq 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) + 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{m_\nu} - f]^2; x).$$

A. N. KOLMOGOROV [1] ismert tétele szerint a tétel feltevései mellett $[a, b]$-n majdnem mindenütt $\lim_{m\to\infty} s_{2^m}(x) = f(x)$, így $[a, b]$-n majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = 0. \tag{3}$$

Mivel $A_{2^n}^{(\alpha)} \sim 2^{n\alpha}$ és $A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \leqq c2^{n(\alpha-1)}$, ha $0 \leqq \nu \leqq 2^{n-1}$, ezért érvényes a következő becslés:

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = O(1)\sigma_{2^{n-1}}^{(1)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) +$$

$$+ \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2.$$

A segédtétel alkalmazásával nyerjük, hogy a jobboldali első tag $[a, b]$-n majdnem mindenütt 0-hoz tart, ha $n \to \infty$, így (3) bizonyítására elég megmutatni, hogy a jobboldali második tag is $[a, b]$-n majdnem mindenütt 0-hoz tart, ha $n \to \infty$. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 \tag{4}$$

sor $[a, b]$-n majdnem mindenütt konvergál. Mivel $A_k^{(\alpha)} \sim (k+1)^\alpha$, ezért tagonként integrálva nyerjük, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \int_a^b [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 dx = \tag{5}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_\nu^2).$$

Minthogy

$$\frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_\nu^2) =$$

$$= O(1)(a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2) \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} k^{\alpha-1} = O(1)(a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2),$$

ezért (5) alapján nyerjük, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \int_a^b [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 dx \leqq M \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

és így a B. Levi-féle tétel alkalmazásával nyerjük, hogy a (4) sor $[a, b]$-n majdnem mindenütt konvergál.

Ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

IRODALOM

[1] A. N. Kolmogorov, Une contribution a l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, 5 (1924), 96—97.

[2] A. Zygmund, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, 10 (1927), 356—362.

[3] A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935).