A NEUTRONOK LELASSÍTÁSÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL

PÁL LÉNÁRD[1]

1. §.

A nagyenergiájú neutronok a lassító közeg atommagjaival ütköznek és közben energiájuk fokozatosan csökken. Tegyük fel, hogy az ütközések rugalmasak és hogy az ütköző partnerek tömegközéppontjához képest nyugvó koordináta rendszerben a szóródás izotóp [1]. Ezeknek a feltevéseknek alapján könnyen meghatározhatjuk annak a valószínűségét, hogy egyetlen ütközési aktusban egy E_0 energiájú neutron energiacsökkenése éppen akkora legyen, hogy ütközés után energiája az $(E, E + dE)$ energia-intervallumba essék. Jelöljük ezt a valószínűséget $w(E_0, E)\, dE$-vel. Mivel a neutron energiája egyetlen ütközési aktusban nem csökkenhet αE_0-nál kisebb értékre,

$$w(E_0, E)\, dE = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} \dfrac{dE}{E_0} & \text{ha } \alpha E_0 \leqq E \leqq E_0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Az α mennyiség a lassító közeg A atomsúlyával igen egyszerű kapcsolatban van, ugyanis

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2. \tag{1.2}$$

Az (1.1) alatti kifejezés sokkal kényelmesebben használható formába írható át, ha az

$$u = \log \frac{E_0}{E} \tag{1.3}$$

összefüggés segítségével új változót vezetünk be. Az u mennyiséget letargiának nevezzük. Értéke annál nagyobb, minél nagyobb az energiacsökkenés. Rövid számolás után azt találjuk, hogy

$$w(u)\, du = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} e^{-u}\, du, & \text{ha } 0 \leqq u \leqq \varepsilon \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{1.4}$$

---

[1] Központi Fizikai Kutató Intézet.

annak a valószínűsége, hogy a letargia értéke egyetlen ütközés után az $(u, u + du)$ intervallumba esik; függetlenül attól, hogy mi volt az ütközés előtt a neutron energiája. Az ε mennyiség nem más, mint az egyetlen ütközés aktusban bekövetkező maximális letargia-növekedés, azaz

$$\varepsilon = \log \frac{1}{\alpha}. \tag{1.5}$$

Tegyük fel, hogy a lassító közeg csak egyfajta atommagból áll és neutronokat nem fog be. Jelöljük $p_n(u)\,du$-val annak a valószínűségét, hogy az n-ik ütközés után a letargia az $(u, u + du)$ intervallumba esik. Mivel az egyes ütközésekhez tartozó letargia-növekedések függetlenek,

$$p_n(u) = \int^{u} p_{n-1}(u')\, w(u - u')\, du'. \tag{1.6}$$

Mivel $p_1(u) = w(u)$,

$$\Pi_n(z) = \{\omega(z)\}^n, \tag{1.7}$$

ahol

$$\Pi_n(z) = \int_0^\infty e^{-uz} p_n(u)\, du \quad \text{és} \quad \omega(z) = \int_0^\infty e^{-uz} w(u)\, du. \tag{1.8}$$

Az (1.4) alatti függvény Laplace-transzformáltjának kiszámítása segítségével a következő kifejezést kapjuk:

$$\Pi_n(z) = \left\{ \frac{1 - \alpha e^{-\varepsilon z}}{(1-\alpha)(z+1)} \right\}^n. \tag{1.9}$$

(1.9)-ből könnyen kiszámítjuk a $p_n(u)$ függvényt (lásd: [2]):

$$p_n(u) = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^n \frac{e^{-u}}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m (u - m\varepsilon)^{n-1} \Delta(u - m\varepsilon), \tag{1.10}$$

ahol

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A valószínűségszámítás centrális határeloszlástétele szerint nagy n esetén (1.10) jól közelítő a normális eloszlás sűrűségfüggvényével:

$$p_n(u) \sim \{2\pi n[\xi + (1-\xi)(\xi - \varepsilon)]\}^{-1/2} \exp\left\{ - \frac{(u - n\xi)^2}{n[\xi + (1-\xi)(\xi-\varepsilon)]} \right\}, \tag{1.11}$$

ahol

$$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \log \alpha. \tag{1.12}$$

Az n-edik ütközés utáni letargia várható értékére azt az eredményt kapjuk, hogy

$$M_n = n\xi , \tag{1.13}$$

mivel minden egyes ütközésnél átlagosan ξ értékkel nő a letargia. Az n-edik ütközés utáni letargia szórásnégyzetre pedig a következő kifejezés vezethető le :

$$D_n^2 = n[\xi + (1-\xi)(\xi-\varepsilon)] = n\left[1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\log^2\alpha\right]. \tag{1.14}$$

Ha a lassító közeg atomsúlya nem túl kicsi, akkor a letargia egy ütközést aktura vonatkozó növekedése és szórása kicsiny lesz. Ez a magyarázata annak, hogy nagy atomsúlyú lassító közegben a neutronok energiacsökkenését (letargia növekedését) jó közelítéssel folytonos folyamatként kezelhetjük.

Hidrogén atommagokkal történő ütközések esetében $\alpha = 0$ és így a $\Pi_n(z) = (z+1)^{-n}$ összefüggésből könnyen meghatározhatjuk a jól ismert

$$p_n(E_0, E) = \frac{\left(\log \frac{E_0}{E}\right)^{n-1}}{(n-1)!\,E_0} \tag{1.15}$$

formulát [3]. Ezeket az eredményeket korábban is jól ismerték, azonban azok a módszerek, amelyekkel ezekhez az eredményekhez jutottak, feleslegesen bonyolultak voltak. Az eddigiekben csak olyan ütközéseket vizsgáltunk, ahol az ütközések szóródásra vezetett (az elnyelés lehetőségét kizártuk).

2. §.

Könnyen általánosíthatjuk az eddigi meggondolásokat többféle atommagból álló lassító közegre is. Tegyük fel, hogy k különféle atommag tökéletes homogén keveréket alkot. Jelöljük N_i-vel az i-edik fajta atommagok számát a lassító közeg egy cm³-ében. Legyen továbbá σ_s^i az i-edik atommagra vonatkozó rugalmas szóródási hatáskeresztmetszet. Tegyük fel azt is, hogy bizonyos valószínűséggel minden atommag abszorbeál neutronokat. Jelöljük az i-edik magra vonatkozó abszorpciós hatáskeresztmetszetet σ_a^i-vel. Annak a valószínűsége, hogy egy ütközés az i magon való szóródásra vezet,

$$r_i = \frac{N_i\sigma_s^i}{N_1\sigma_t^1 + N_2\sigma_t^2 + \ldots + N_k\sigma_t^k}, \tag{2.1}$$

ahol $\sigma_t^i = \sigma_s^i + \sigma_a^i$ az úgynevezett teljes hatáskeresztmetszet. A σ_a^i abszorpciós (befogási) keresztmetszetek általában függnek a letargia értékétől. Ez a számításokat megnehezíti. Jelöljük $p_n(u)du$-val annak a valószínűségét, hogy az n-edik ütközés után a neutron letargiája az $(u\,,\,u+du)$ intervallumba esik és az első n ütközés nem vezet abszorpcióra. Természetesen

$$\int_0^\infty p_n(u)\,du < 1, \tag{2.2}$$

mivel a neutron közben abszorbeálódhat is. $p_n(u)$-ra a következő rekurziós kifejezés írható fel:

$$p_n(u) = \int_0^u p_{n-1}(u') \sum_{i=1}^{k} r_i(u')\, w_i(u-u')\, du'\,. \tag{2.3}$$

Abban az esetben, ha feltételezzük, hogy az r_i mennyiségek nem függnek a letargiától, (2.3) Laplace-transzformáltjára, $\Pi_n(z)$-re egyszerű kifejezés vezethető le. Azt kapjuk, hogy

$$\Pi_n(z) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} r_i\, \omega_i(z) \right\}^n \tag{2.4}$$

3. §.

A neutronok lelassításának elméletében igen fontos szerepet játszik az ütközési sűrűség. Jelöljük az ütközési sűrűséget $f(u)$-val. $f(u)du + o(du)$ annak a valószínűsége, hogy az $(u, u+du)$ letargia intervallumból ütközés révén (legyen az akár abszorpcióra vezető ütközés is) a neutron kikerül. Stacionárius esetben, amikor is az $(u, u+du)$ letargia-intervallumba kerülő és onnan kilépő neutronok száma megegyezik, $f(u)\,du$-nak egyenlőnek kell lennie annak a valószínűségével, hogy a neutron az $(u, u+du)$ intervallumba bekerül. Ez utóbbi nyilván $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(u)\, du$, tehát stacionárius esetben

$$f(u) = \sum_{n=1}^{k} p_n(u)\,. \tag{3.1}$$

Az $f(u)$ fizikai jelentése az, hogy megadja az u körüli egységnyi intervallumban egy neutron ütközéseinek átlagos számát.

Foglalkozzunk először a legegyszerűbb esettel, amikor a lassító közeg csak egyfajta atommagot tartalmaz és a neutron-befogás lehetőségét kizárjuk. Ebben az esetben könnyen előállíthatjuk $f(u)$ Laplace-transzformáltját. Azt találjuk, hogy

$$\varphi(z) = \frac{\omega(z)}{1-\omega(z)}, \tag{3.2}$$

ahol

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-uz} f(u)\, du\,. \tag{3.3}$$

Ha a lassító közeg többfajta atommagot tartalmaz és bizonyos, de állandó valószínűséggel neutronokat abszorbeál, akkor $f(u)$ Laplace-transzformáltja a következő lesz:

$$\varphi(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k} r_i \, \omega_i(z)}{1 - \sum_{i=1}^{k} r_i \, \omega_i(z)} . \tag{3.4}$$

A legáltalánosabb esetben (3.1)-ből megkaphatjuk $f(u)$-ra a már más szerzők [4] által levezetett

$$f(u) = \sum_{i=1}^{k} r_i(0) \, w_i(u) + \int_0^u f(u') \sum_{i=1}^{k} r_i(u') \, w_i(u - u') \, du' \tag{3.5}$$

integrál-egyenletet. Ennek az egyenletnek a megoldását az $r_i(u')$ fellépte nehezíti meg. A fenti egyenletnek különböző közelítő módszerekkel történő megoldásával később foglalkozunk.

A neutronok lelassításának elméletében további fontos mennyiség a befogás elkerülésének valószínűsége. Jelöljük ezt a mennyiséget $p(u)$-val. $p(u)$ annak a valószínűsége, hogy valamilyen lassító közegben a neutron letargia az u érték fölé emelkedik, és közben maga a neutron nem abszorbeálódik. Könnyen belátható, hogy

$$p(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_0^u p_{n-1}(u') \, r_i(u') \, [1 - W(u - u')] \, du' , \tag{3.6}$$

ahol

$$W_i(u) = \int_0^u w_i(u') \, du' . \tag{3.7}$$

(3.6)-ból rövid számolás után a

$$p(u) = \sum_{i=1}^{k} r_i(0) \, [1 - W_i(u)] + \int_0^u f(u') \sum_{i=1}^{k} r_i(u') \, [1 - W_i(u - u')] \, du' \tag{3.8}$$

összefüggéshez jutunk. $p(u)$ és $f(u)$ között a következő egyszerű összefüggés áll fenn:

$$\frac{d \, p(u)}{du} = - \left[1 - \sum_{i=1}^{k} r_i(u) \right] f(u) . \tag{3.9}$$

Ha (3.5) alapján valamilyen közelítő módszerrel meghatározzuk az $f(u)$-t akkor $p(u)$ (3.9)-ből közvetlenül kiszámítható.

Ismét tegyük fel, hogy $r_i =$ konst. ($i = 1, 2, \ldots, k$). Ekkor $p(u)$ Laplace-transzformációval határozható meg. Felhasználva a (2.4) alatti összefüggést, rövid számolással azt találjuk, hogy

$$\Pi(z)=\frac{1}{z}\,\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i[1-\omega_i(z)]}{1-\sum_{i=1}^{k} r_i\,\omega_i(z)}, \tag{3.10}$$

ahol

$$\Pi(z)=\int_0^\infty e^{-zu}\,p(u)\,du\,. \tag{3.10'}$$

Nem abszorbeáló lassító közegben $p(u)\equiv 1$. A (3.10) alatti kifejezésből nagy u értékekre a következő közelítő formula vezethető le:

$$p(u)\sim\frac{\bar{\xi}}{1-r+\bar{\xi}}\exp\left\{-\frac{(r-1)\,u}{1-r+\bar{\xi}}\right\}, \tag{3.11}$$

ahol

$$\bar{\xi}=\sum_{i=1}^{k} r_i\,\xi_i \quad \text{és} \quad r=\sum_{i=1}^{k} r_i\,. \tag{3.11'}$$

A neutronok lelassításának elméletében gyakran használatos mennyiség a lassítási sűrűség. Ha másodpercenként Q_0 gyors neutron keletkezik, akkor stacionárius esetben másodpercenként

$$q(u)=Q_0 p(u) \tag{3.12}$$

neutron letargiája emelkedik az u érték fölé. A $q(u)$ mennyiséget nevezzük lassítási sűrűségnek.

A (3.5) alatti egyenlet egy közelítő megoldását a következő eljárással kaphatjuk meg. Tegyük fel, hogy $u\gg u_r\gg\varepsilon_{\max}$, ahol u_r az utolsó rezonancia energiához tartozó letargiaérték és $\varepsilon_{\max}$ az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ számok legnagyobbika. Ekkor a (3.5) alatti kifejezésből, ha az $u-\varepsilon_{\max}\gg u_r$ feltétel is teljesül, az

$$\left[1-\sum_{i=1}^{k} r_i(u)\right]f(u)=-\sum_{i=1}^{k}\frac{d\,[f(u)\,r_i(u)]}{du}\,\xi_i \tag{3.13}$$

egyenletet kapjuk. Fejtsük ugyanis sorba a (3.5) jobboldalán álló integrál alatti kifejezésben $f(u')$-t és $r_i(u')$-t $u-u'$ hatványai szerint, és rekesszük be a sorfejtést a lineáris tagokkal, akkor a (3.13) alatti kifejezéshez jutunk. Ez a közelítés jogosult, mivel a $w_i(u-u')$ függvény tulajdonságai miatt az integrál az $f(u')$ és $r_i(u')$ függvények csupán gyengén változó szakaszára terjesztendő ki. Helyettesítsük a (3.13) kifejezést a (3.9)-be; azt kapjuk, hogy

$$p(u)-f(u)\sum_{i=1}^{k} r_i(u)\,\xi_i=\text{konst}\,. \tag{3.14}$$

A (3.14) felhasználásával nagy u értékekre Wiegner jól ismert formulája származtatható. Nevezetesen azt találjuk, hogy

(3.15) $$p(u) \sim \text{konst.} \exp\left\{-\int_{u_0}^{u} \frac{r(u')-1}{\bar{\xi}(u')}\,du'\right\},$$

$$(u_0 < u_r)$$

ahol

(3.15') $$r(u') = \sum_{i=1}^{k} r_i(u') \quad \text{és} \quad \bar{\xi}(u') = \sum_{i=1}^{k} r_i(u')\,\xi_i .$$

Az itt közölt levezetés világosan mutatja, hogy (3.15) csak olyan u értékekre érvényes, amelyek elég távol vannak a legutolsó rezonancia energiának megfelelő u_r értéktől.

4. §.

G. Placzek [4] részletesen foglalkozott a lassítási sűrűség aszimptotikus értékének meghatározásával. Az általunk közölt módszer alapján mind az aszimptotikus érték, mind pedig a nagy letargia-értékekre vonatkozó kifejezés könnyűszerrel meghatározható. Egyfajta atommagot tartalmazó, nem abszorbeáló lassító közegben az ütközési sűrűség Laplace-transzformáltját, mint ahogy már láttuk, a következőképpen állíthatjuk elő:

(4.1) $$\varphi(z) = \frac{\omega(z)}{1-\omega(z)}.$$

Ha a $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)$ határérték létezik, akkor

(4.2) $$\lim_{z\to 0} z\,\varphi(z) = \lim_{u\to\infty} f(u)$$

tehát

(4.3) $$\lim_{u\to\infty} f(u) = -\left.\frac{1}{\omega'(z)}\right|_{z=0} = \frac{1}{\xi}$$

szolgáltatja a végtelen nagy letargiához tartozó asszimptotikus értéket.[2] Megmutatható, hogy az $1-\omega(z) = \Omega(z)$ egyenletnek egyetlen egy olyan gyöke van, amelynek a valós része nem negatív, éspedig $z_0 = 0$; az összes többi gyök a képzetes tengelytől balra esik. Legyen x olyan valós szám, amely nagyobb a képzetes tengelytől balra eső első gyök valós részénél. Ekkor $\varphi(z)$ az $x \leq \mathcal{R}e\, z \leq y$ szakaszon a $z_0 = 0$ pont kivételével analitikus. A $z_0 = 0$ pontban pedig $\varphi(z)$-nek, amint az könnyen megmutatható, elsőrendű pólusa van. Doetsch [5] könyvében idézett Abel-féle tételek egyike (488. oldal 1. tétel) alkalmazható, amely szerint $u \to \infty$ esetben

$$f(u) = \frac{1}{\xi} + o(e^{xu}),$$

[2] Megjegyzendő, hogy a $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)$ határérték létezését külön kell bizonyítani. Lásd erre vonatkozóan: Doetsch [5], p. 458., 3. tétel.

ahol $x < 0$ és

$$\frac{1}{\xi} = \lim_{z \to 0} z\,\varphi(z)\,,$$

illetve pontosabban

$$f(u) = \frac{1}{\xi} + a\,e^{-bu}\,, \tag{4.4}$$

ahol

$$a = \frac{2\xi - \varepsilon}{\varepsilon\,\xi} \quad \text{és} \quad b = \frac{2\xi}{\varepsilon(1-\xi)}\,. \tag{4.5}$$

A (3.4) alatti kifejezésből teljesen hasonló módszerrel vezethető le a PLACZEK által nagy nehézségek árán meghatározott aszimptotikus formula, valamint a kvázi-aszimptotikus tartományban érvényes kifejezés. Rövid számítás után azt találjuk, hogy

$$\lim_{z \to 0} \varphi(z) = \int_0^\infty f(u)\,du = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\,\sigma_s^i}{\sum_{i=1}^{k} N_i\,\sigma_a^i}\,, \tag{4.6}$$

illetve

$$f(u) \sim \frac{r}{1 - r + \xi} \exp\left\{ -\frac{(r-1)\,u}{1 - r + \xi} \right\}. \tag{4.7}$$

Ha abszorpció nincs, akkor $\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$. Ebben az esetben vissza kell nyúlni a (3.4) alatti formulához, hogy az asszimptotikus értéket megkaphassuk. Rövid számolás után

$$\lim_{u \to \infty} f(u) = \frac{1}{\bar{\xi}}\,, \tag{4.8}$$

ahol most

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\,\sigma_s^i\,\xi_i}{\sum_{i=1}^{k} N_i\,\sigma_s^i}\,. \tag{4.8'}$$

A kvázi-aszimptotikus tartományban pedig a (4.4)-hez hasonlóan

$$f(u) = \frac{1}{\bar{\xi}} + \frac{1}{\bar{\xi}} \left\{ \frac{2\,(1-\bar{\xi})\,\bar{\xi}}{\sum_{i=1}^{k} r_i\,\varepsilon_i(1-\xi_i)} - 1 \right\} \exp\left\{ -\frac{2\,\bar{\xi}\,u}{\sum_{i=1}^{k} r_i\,\varepsilon_i(1-\xi_i)} \right\}. \tag{4.9}$$

Állandó hatáskeresztmetszetek esetén nem okoz különösebb nehézséget a pontos megoldás előállítása sem. Foglalkozzunk először a (3.2) alatti kifejezéssel. Egyszerű átalakítások után

$$\varphi(z)=\frac{1}{(1-\alpha)\left(z-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}+ \tag{4.10}$$

$$+\left\{1+\frac{1}{(1-\alpha)\left(z-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}\right\}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j\frac{e^{-j\varepsilon z}}{\left(z-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j}.$$

A (4.10) alatti kifejezés inverz transzformáltját az

$$f(u)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j\times \tag{4.11}$$

$$\times\exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}(u-j\varepsilon)\right\}\frac{(u-j\varepsilon)^j}{j!}\Delta(u-j\varepsilon)\left\{\frac{1}{1-\alpha}+\frac{j}{u-j\varepsilon}\right\}+$$

$$+\frac{1}{1-\alpha}\exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right\}$$

végtelen sor adja meg. A valóságban (4.11) nem végtelen sor, mert minden véges u értékéhez maximálisan olyan j tartozhat, amelyre teljesül az $u \geq j\varepsilon$ kikötés. A (4.11)-ből könnyűszerrel leszármaztathatjuk az $f(u)$ függvényt a $(0,\varepsilon)$, $(0,2\varepsilon)$, $\ldots$, $(0,j\varepsilon)$, $\ldots$ intervallumokban. Így pl. a $(0,\varepsilon)$ intervallumban az

$$f(u)=\frac{1}{1-\alpha}\exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right\} \tag{4.12}$$

megoldás, míg a $(0,2\varepsilon)$ intervallumban az

$$f(u)=\frac{1}{1-\alpha}\exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right\}-\alpha\exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}(u-\varepsilon)\right\}\left(u-\varepsilon+\frac{1}{1-\alpha}\right) \tag{4.13}$$

megoldás érvényes. Könnyen megmutatható, hogy $f(u)$-nak az $u=\varepsilon$ pontban elsőfajú szakadása van, ugyanis

$$f(\varepsilon+0)-f(\varepsilon-0)=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Az is egyszerűen belátható, hogy bármely $u=j\varepsilon$ pontban az $f(u)$ $(j+1)$-edik differenciálhányadosa szakadást mutat. Természetesen ez azzal a feltevéssel kapcsolatos, hogy monoenergetikus neutronforrásból származó neutronok lassulnak le. A valóságban a neutronforrások sohasem monoenergetikusak és így ez a jelzett tulajdonság elmosódik.

A (3.4) kifejezésből a (4.11)-hez hasonlóan kaphatjuk meg az $f(u)$-ra vonatkozó pontos megoldást, állandó hatáskeresztmetszetek esetében.

A (4.10)-ből JENSEN [6], vagy (3.5)-ből RÉNYI módszere segítségével is bebizonyítható a $\lim_{n\to\infty} f(u)$ aszimptotikus kifejezés létezése, amit fentebb az $f(u)$ Laplace-transzformált inverziója útján az előbb levezettünk.

5. §.

Számítsuk még ki annak a valószínűségét, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott $(0, u)$ letargia-intervallumban éppen n ütközés következik be. Jelöljük ezt a valószínűséget $v_n(u)$-val. Mivel

$$\sum_{j=0}^{n-1} v_j(u) = \int_u^\infty p_n(u')\,du' \tag{5.1}$$

$v_n(u)$-ra egyszerűen a következő kifejezést írhatjuk fel:

$$v_n(u) = \int_0^u \{p_n(u') - p_{n+1}(u')\}\,du', \tag{5.2}$$

amiből pedig Laplace-transzformációval a

$$\psi_n(z) = \frac{1}{z}\{\Pi_n(z) - \Pi_{n+1}(z)\} \tag{5.3}$$

összefüggésre jutunk, ahol $\psi_n(z) = \int_0^\infty e^{-u}\, v_n(u)\,du$. Hasznosítsuk mindenekelőtt az egyfajta atommagot tartalmazó, nem abszorbeáló közegre vonatkozó (1.7) alatti eredményünket. Ekkor az (5.3)-ból

$$\psi_n(z) = \frac{1 - \omega(z)}{z}\{\omega(z)\}^n \tag{5.4}$$

formulához jutunk. Többfajta atommagot tartalmazó és energiától független hatáskeresztmetszettel abszorbeáló lassító közegben ez a kifejezés a következőképpen módosul:

$$\psi_n(z) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{k} r_i\,\omega_i(z)}{z}\left\{\sum_{i=1}^{k} r_i\,\omega_i(z)\right\}^n. \tag{5.5}$$

Ha a hatáskeresztmetszetek függnek az energiától, akkor $v_n(u)$ meghatározására vissza kell nyúlnunk a (2.3) alatti kifejezésre.

Számunkra különösen fontos az n átlagértékének meghatározása, vagyis annak ismerete, hogy átlagban hány ütközés után nő a letargia u értékre.

Az n átlagértékét egyszerű módon határozhatjuk meg az (5.3) alatti egyenletből kiindulva. Vezessük be a

$$\gamma(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z)\, e^{nx} \tag{5.6}$$

generátorfüggvényt. A $\gamma(x,z)$ függvényből az n átlagértékének Laplace-transzformáltjára az (5.5) felhasználásával a következő kifejezés vezethető le:

$$\mu(z) = \frac{1}{z} \frac{\sum_{i=1}^{k} r_i\, \omega_i(z)}{1 - \sum_{i=k}^{k} r_i\, \omega_i(z)}, \tag{5.7}$$

ahol

$$\mu(z) = \int_0^{\infty} m(u)\, e^{-u} du$$

Ebből nagy u értékekre meghatározhatjuk az $m(u)$ aszimptotikus alakját. Mivel $m(u)$ monoton függvény, alkalmazható VAN DER POL és BREMMER [7] könyvében idézett Tauber-féle tétel (163. oldal, IV. tétel), és azt találjuk, hogy

$$\lim_{u\to\infty} m(u) = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\, \sigma_s^i}{\sum_{i=1}^{k} N_i\, \sigma_a^i}, \tag{5.8}$$

illetve

$$m(u) \sim m(\infty) \left\{ 1 - \exp\left[- \frac{(r-1)\, u}{1 - r + \bar{\xi}} \right] \right\}. \tag{5.9}$$

Ha az abszorpciótól eltekintünk, azaz felteszük, hogy $\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$, akkor az (5.7)-ből az

$$m(u) \sim \frac{u}{\bar{\xi}} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\,\bar{\xi}(1-\bar{\xi}) - \sum_{i=1}^{k} r_i\, \varepsilon_i (1-\xi_i)}{\bar{\xi}^2} \right\} + \chi(u) \tag{5.10}$$

kifejezésre jutunk.

Igen figyelemreméltó az abszorbeáló lassító közegre érvényes (5.8) alatti kifejezés, amely szerint a teljes lelassuláshoz szükséges ($u \to \infty$) ütközések számának várható értéke véges.

A nem abszorbeáló lassító közegre érvényes (5.10) alatti kifejezésben fellépő, letargiától nem függő korrekció igen kicsiny és könnyen megmutatható, hogy a letargiától függő $\chi(u)$ korrekció pedig exponenciálisan csökken. Ez az eredmény általános formában TAKÁCS [8] egy korábbi dolgozatában megtalálható.

Annak illusztrálására, hogy kis letargia-értékek mellett az átlagos ütközési szám mennyire eltér az irodalomban használatos közelítő kifejezéstől, számítsuk ki egyfajta atommagot tartalmazó, nem abszorbeáló közegben a $(0, \varepsilon)$ intervallumban érvényes átlagos ütközések számát. Az (5.4) alatti kifejezésből azt kapjuk, hogy

$$m(u) = \frac{1}{\alpha}\left\{\exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right) - 1\right\} \qquad (0 \leq u \leq \varepsilon). \tag{5.11}$$

Ha u helyettt ismét energiát használunk, akkor ez a kifejezés a következőképpen módosul:

$$m(E_0, E) = \frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1\right\} \qquad (E_0 \geq E \geq \alpha E_0). \tag{5.12}$$

Az ütközési szám szórásnégyzetére abszorbeáló lassító közeg esetében az (5.5) alatti kifejezés felhasználásával a következő aszimptotikus formula vezethető le:

$$\lim S^2(u) = \Lambda(\Lambda + 1) = S^2(\infty) \tag{5.13}$$

illetve nagy u értékekre

$$S^2(u) \sim \Lambda(\Lambda+1)\left\{1 - \exp\left[-\frac{(r-1)u}{1-r+\xi}\right]\right\} - \tag{5.14}$$

$$- 2\Lambda^2 \frac{(r-1)u}{1-r+\xi} \exp\left[-\frac{(r-1)u}{1-r+\xi}\right],$$

ahol

$$\Lambda = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} N_i \sigma_s^i}{\sum\limits_{i=1}^{k} N_i \sigma_a^i}. \tag{5.14'}$$

Nem abszorbeáló közegben pedig a korrekciók figyelembevétele nélkül a következő aszimptotikus kifejezés származtatható:

$$S^2(u) \sim \frac{u^2}{\xi^2}. \tag{5.15}$$

Szembetűnő a szórás magas értéke.

IRODALOM

[1] S. GLASSTONE—M. E. EDLUND: *The elements of nuclear reactor theory.* van Nostrand, New York, 1952.

[2] R. E. MARSHAK: „Theory of the slowing down of neutrons by elastic collision with atomic nuclei." *Review of Modern Physics* **19** (1947) 185—238.

[3] Л. Арцимович—И. Курчатов и другие, *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики* **5** (1935) 659—664.

[4] G. PLACZEK: „On the theory of the slowing down of neutrons in heavy substances." *Physical Review* **69** (1946) 423—438.
[5] G. DOETSCH: *Handbuch der Laplace-Transformation.* Birkhäuser, Basel, 1950.
[6] J. L. W. V. JENSEN: „Sur une identité d'Abel et sur d'autres formules analogues." *Acta Mathematica* **26** (1902) 307—318.
[7] Б. ван дер Пол—Х. Бреммер: *Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа.* Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1952.
[8] L. TAKÁCS: „Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1955) 135—151.

(Beérkezett. 1956. II. 3.)

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЗАМЕДЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ

Л. ПАЛ

Резюме

Применение хорошо обоснованных теоретико-вероятностных методов для изучения процессов замедления нейтронов существенно облегчает решение целого ряда важных проблем. В данной работе выводятся точные выражения для плотности столкновений и для вероятности избежать резонансного захвата нейтронов при стационарных условиях.

Прежде всего определим вероятность того, что летаргия нейтрона (1.3) после n столкновений находится в интервале $(u, u+du)$. Обозначим эту вероятность через $p_n(u)du$ (1.6). Выражение (1.10) является точным решением задачи в случае непоглощающей однородной замедляющей среды. (В дальнейшем однородной будем называть такую среду, которая состоит лишь из одного типа атомов. Неоднородная среда, наоборот, состоит из гомогенной смеси разного типа атомов.) Формулы (1.13) и (1.14) определяют среднее значение и дисперсию летаргии после n столкновений.

Обобщение выражения (1.16) для поглощающей и неоднородной замедляющей среды дается уравнением (2.3), решение которого в случае независящего от энергии сечения поглощения легко может быть наидено с помощью преобразования Лапласа (2.4).

Для определения плотности столкновений используем выражение (3.1) и после несложных операций выводим для f(u) самое общее уравнение (3.5), решение которого в некоторых частных случаях легко получается. Общее решение уравнение (3.5) трудно получить, но при определенных условиях из (3.5) может быть выведено приближенное уравнение (3.13), решение которого дается формулой (3.14).

Уравнением (3.9) устанавливается связь между плотностью столкновений и вероятностью избежать резонансного захвата. (3.10) определяет вероятность избежать резонансного захвата в случае поглощающей и неоднородной среды при условии, что сечения поглощения постоянны, а (3.15) в более общем случае.

Характер функции плотности столкновений для больших значений летаргии имеет важное значение для целого ряда вопросов. Используя некоторые теоремы типа Таубера и Абеля, определили ассимптотическое поведение плотности столкновений в разных случаях (4.4), (4.7) и (4.9). В самом простейшем случае (случай однородной непоглащающей среды) выписали точное выражение для $f(u)$ в любом интервале $(0, u)$.

В литературе часто дается неправильный метод для вычисления среднего числа столкновений, необходимого для увеличения летаргии на определенную величину. Выражение (5.2) является вероятностью того, что в интервале летаргии $(0, u)$ происходит n столкновений. Вводя производяшую функцию (5.6), в простих случаях легко может быть вычислено среднее значение числа столкновений в интервале $(0, u)$ при больших значениях u. В случае поглощающей среды выражение (5.9), для непоглощеющей среды (5.10) успешно могут быть применены для определения среднего значения числа столкновений. Дисперсия определяется формулами (5.14) и (5.15).

SOME PROBLEMS CONCERNING THE SLOWING DOWN OF NEUTRONS

L. PÁL

Summary

The process of slowing down of neutrons may be simply treated in the stationary case by means of well founded methods of the calculus of probability. In the following expressions for collision density and resonance escape probability will be deduced which are more accurate than those given up to now in the literature.

To start with, the lethargy u of a neutron is defined by (1.3), and in (1.5) the maximum of the increase in lethargy of the neutron during a collision, denoted by ε is defined. Subsequently in assuming the collisions to be elastic and that scattering with respect to the center of the mass system may to be isotropic, the probability, represented by $w(u)\,du$ that the neutron lethargy increases in course of a single collision by a value lying in the letarghy interval $(u, u+du)$ is given.

Let us denote by $p_n(u)\,du$ the probability that the lethargy of a neutron falls in the interval $(u, u+du)$ after the n-th collision. We assume first that the moderator is homogeneous and non-absorbing. After having found the precise expression (1.10) of $p_n(u)$, an approximate value (1.11) of $p_n(u)$ for great values of n is given. Subsequently the average change in lethargy (1.13) and dispersion (1.14) for n collisions is calculated.

Let $r_i(u)$ be the probability (2.1) that the neutron will not be absorbed when colliding with the i--th nucleus. [In (2.1) σ_a^i is the cross section for absorption of the nucleus of type i and σ_t^i is the total cross section of the nucleus of type i; the number of the nuclei of type i in 1 cm^3 is represented by N_i.] In § 2. a general recursion formula (2.3) is given for $p_n(u)$ with help of the r_i.

In §. 3. the collision density $f(u)$ is introduced. The general relation between $f(u)$ and $p_n(u)$ is given by (3.1). The Laplace-transform of $f(u)$ is calculated postulating homogeneous, non-absorbing media (3.2) as well as heterogeneous media with an absorption cross section independent of the energy (3.4). From (3.1) the known integral equation for $f(u)$ is obtained. Further a relation is given between the resonance escape probability represented by $p(u)$ and $f(u)$ (3.9) and assuming that $r_i =$ constant, we obtain the Laplaeotransform of $p(u)$ (3.10). From (3.10) we obtain (3.11) for great values of u.

In §. 4. the asymptotic and quasi-asymptotic value of $f(u)$ is given by using (3.2) and (3.4) with the postulates mentioned when deriving (3.2) and (3.4).

For heterogeneous, non-absorbing media the asymptotic and quasi-asymptotic values of $f(u)$ are given by (4.8) and (4.9), Subsequently the precise value of $f(u)$ is also given by means of (3.2) for homogeneous, non-absorbing media (4.11), and it is shown that the function obtained and its derivatives possess the known discontinuities.

In §. 5. the probability that in the lethargy interval $(0, u)$ exactly n collisions occur (5.2) which is denoted by $v_n(u)$ is considered. The Laplace-transform of $v_n(u)$ is given by (5.3) for the general case and by (5.4) with respect to homogeneous, nonabsorbing media; finally (5.5) gives the transform of the function when assuming heterogeneous moderators. If $r_i =$ constant, we can define by using (5.5) the Laplace-transform of the average number of collisions necessary to attain the value u of lethargy concerning the moderator in question. Thus we may calculate the asymptotic (5.8) and quasi-asymptotic value (5.9) of the mean. (5.10) gives the average asymptotic value for heterogeneous non-absorbing media. (5.11) gives also the average value looked for but referring to homogeneous, non-absorbing media in the lethargy range $0 \leq u \leq \varepsilon$.

Finally the asymptotic value of the dispersion of the number of collisions necessary to attain the lethargy u is given first for heterogeneous, absorbing moderators (5.14). then for heterogeneous non-absorbing media.