ATOMMAG-REAKTOROK ELMÉLETÉVEL KAPCSOLATOS NÉHÁNY VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI KÉRDÉSRŐL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

E dolgozat az atommag-reaktorokban lejátszódó neutronlassítás folyamat valószínűségszámítási vizsgálatával foglalkozik. A tárgyalt kérdések közelítő megoldása már ismeretes volt, és megtalálható például S. GLASSTONE és M. C. EDLUND [1] könyvének VI. fejezetében. Továbbá néhány speciális eset pontos vizsgálatát is megadta O. OLSSON [2]. Jelen dolgozat célja az említett kérdések közül egyeseknek a sztochasztikus folyamatok elméletének segítségével való exakt és a szakirodalomban találhatónál teljesebb tárgyalása.[1]

1. §. A neutronlassítás folyamata

Mint ismeretes, az atommag-reaktorokban a meghasadások során keletkező többmillió eV-os neutronok termikus neutronokká, azaz néhány század eV-os neutronokká lassulnak le. A lassulás úgy megy végbe, hogy a neutronok a lassító közeg atommagjaival ütköznek és minden egyes ütközésnél elvesztenek bizonyos energiát. Sőt, előfordulhat az is, hogy ütközés alkalmával a neutronokat befogja (abszorbeálja) egy atommag. Fontos kérdés annak megvizsgálása, hogy a neutronok lassulásának időbeli folyamata milyen valószínűségi törvény szerint történik.

Tekintsünk egy $t = 0$ időpillanatban E_0 kezdeti energiával rendelkező neutront. Tegyük fel, hogy a neutron végtelen kiterjedésű homogén közegben mozog. A közeg álljon r különböző típusú atomból. Jelölje az egyes atomok térbeli sűrűségét (térfogategységre eső átlag számát) $N_1, N_2, \ldots N_r$ és az egyes atommagok tömegszámait $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Jelölje továbbá a neutronnak az egyes atommagokra vonatkozó szóródási hatáskeresztmetszeteit $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_r^*$ és a befogási (abszorpciós) hatáskeresztmetszeteit: σ_1^{**}, $\sigma_2^{**}, \ldots, \sigma_r^{**}$. Legyen $\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^{**}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Az említett hatáskeresztmetszetek általában függnek az ütköző neutron E energiájától. Vezes-

---

[1] A neutronok lassításának elméleti vizsgálatával foglalkozik PÁL LÉNÁRD: „A neutronok lelassításának néhány kérdéséről" című, jelen kötet 41—54. oldalain megtalálható dolgozata is. Míg PÁL LÉNÁRD az ütközések számának az energiától való függésével foglalkozik, addig jelen dolgozat a lassítás időbeli folyamatát vizsgálja.

sük be végül a következő rövidítéseket: $\gamma_i = N_i\sigma_i$ és $\gamma_i^* = N_i\sigma_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, és legyen $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_r$ és $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \ldots + \gamma_r^*$.

Vizsgálatainkban feltesszük, hogy E_0, a neutron kezdeti energiája, rögzített érték. Vezessük be továbbá a letargia fogalmát. Egy E energiájú neutron letargiája $x = \log E_0/E$, azaz $E = E_0e^{-x}$. Tegyük fel, hogy a neutronok ütközése olyan természetű, hogy szóródás alkalmával a letargia növekedés független az ütközés előtti értéktől. Az i-edik típusú atommagon történő szóródás alkalmával nyert letargia növekedés eloszlásfüggvénye legyen $H_i(x)$, ahol feltesszük, hogy $H_i(0) = 0$. A neutronok ütközésének szokásos modellje, az izotrop ütközés, eleget tesz a fenti követelményeknek. Ha egy E energiájú neutron ilyen ütközést szenved, az i-edik típusú atommagon, úgy szóródás után az energiája az $(\alpha_i E, E)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó lesz, ahol $\alpha_i = \left(\frac{A_i - 1}{A_i + 1}\right)^2$. Ekkor a letargia növekedés eloszlásfüggvénye

$$H_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - \alpha_i} & \text{ha } 0 \leq x \leq \log \dfrac{1}{\alpha_i} \\ 1 & \text{ha } x > \log \dfrac{1}{\alpha_i} \end{cases}$$

A következőkben a γ_i, γ_i^*, C és C^* mennyiségeket a neutron x letargiájának függvényének tekintjük, azaz $\gamma_i = \gamma_i(x)$, $\gamma_i^* = \gamma_i^*(x)$, $C = C(x)$ és $C^* = C^*(x)$ jelöléseket alkalmazzuk.

Előrebocsátjuk végül, hogy annak a valószínűsége, hogy egy x letargiájú neutron Δt idő alatt legalább egy i-típusú atommagon ütközést szenved: $a\gamma_i(x)e^{-x/2}\Delta t + o(\Delta t)$, és hogy legalább egy szóródást szenved: $a\gamma_i^*(x)e^{-x/2}\Delta t + o(\Delta t)$, ahol $a = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$ és m a neutron tömege. Ugyanis egy E energiájú neutron Δt idő alatt

$$\Delta s = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,\Delta t = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}\,e^{-x/2}\Delta t = a\,e^{-x/2}\Delta t$$

nagyságú elmozdulást végez (eltekintve a $o(\Delta t)$ tagtól) és Δs elmozdulás alatt az ütközés, illetve szóródás valószínűsége $\gamma_i(x)\Delta s + o(\Delta s)$ és $\gamma_i^*(x)\Delta s + o(\Delta s)$.

2. §. A probléma kitűzése

Tekintsünk egy $t = 0$ időpontban E_0 kezdeti energiával rendelkező neutront, amely a fent részletezett körülmények között mozog, végtelen kiterjedésű közegben.

Jelölje η_t valószínűségi változó a neutron letargiáját t időpontban. Ekkor az energia t időpontban $E_t = E_0e^{-\eta_t}$. Legyen A_t az az esemény, hogy

$(0, t)$ időközben nem abszorbeálódik a neutron. Legyen továbbá $\tau_x = \inf\limits_{\eta_t > x} t$. Jelölje $\nu(t)$ a $(0, t)$ időközben történő ütközések számát és legyen $\mu_x = \nu(\tau_x)$. Jelölje végül η_n valószínűségi változó a neutron letargiáját az n-edik ütközés pillanata után ($\eta_0 \equiv 0$) és legyen A_n az az esemény, hogy az első n ütközés nem vezet abszorpcióra.

A következőkben a fent felsorolt valószínűségi változók és véletlen eseményekkel kapcsolatos valószínűségek meghatározásával fogunk foglalkozni.

Fizikai szempontból a τ_x változó bír különös fontossággal. Ez méri ugyanis azt, hogy az E_0 energiájú neutronok mennyi idő alatt lassulnak le bizonyos $E = E_0 e^{-x}$ energiaszint alá (például mennyi idő alatt válnak termikus neutronokká). A τ_x változó várható értékét E. Fermi meghatározta és azt nyerte (S. Glasstone és M. C. Edlund [1], p. 184.), hogy

$$\mathbf{M}\{\tau_x\} \sim \frac{\sqrt{2m}\,\Lambda}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}}\right),$$

ahol m a neutron tömege, Λ a neutronok átlagos szabad úthossza és ε az egy ütközésre eső átlagos letargiacsökkenés.

3. §. Az η_t folyamat vizsgálata

Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy $\eta_t (0 \leq t \leq \infty)$ Markov-folyamat: Ugyanis, ha ismerjük a neutron energiáját t időpontban, úgy ez az adat egyértelműen meghatározza a neutron jövő sztochasztikus viselkedését. Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathbf{P}\{\eta_t \leq x, A_t\} = F(t, x). \tag{1}$$

Ekkor speciálisan

$$\mathbf{P}\{A_t\} = F(t, \infty) \tag{2}$$

és

$$\mathbf{P}\{\eta_t \leq x \mid A_t\} = \frac{F(t, x)}{F(t, \infty)}. \tag{3}$$

Az $F(t, x)$ eloszlásfüggvény a

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -a \int_0^x e^{-y/2}\left[C(y) - \sum_{i=1}^{r} \gamma_i^*(y) H_i(x - y)\right] d_y F(t, y) \tag{4}$$

integro-differenciálegyenletnek $F(0, x) = 1$, ha $x \geq 0$ és $F(0, x) = 0$, ha $x < 0$ kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldása. A megoldás explicit alakban a következőképpen fejezhető ki:

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a t)^n}{n!} G_n(x), \tag{5}$$

ahol

(6) $$G_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

és

(7) $$G_{n+1}(x) = \int_0^x e^{-y/2} [C(y) - \sum_{i=1}^{r} \gamma_i^*(y) H_i(x-y)] \, dG_n(y) .$$

Bizonyítás: Felírhatjuk a következő összefüggést:

$$F(t+\Delta t, x) = \int_0^x [1 - a\, C(y)\, e^{-y/2} \Delta t] \, d_y F(t, y) +$$

$$+ a \sum_{i=1}^{r} \int_0^x \gamma_i^*(y)\, e^{-y/2} \Delta t\, H_i(x-y)\, d_y F(t, y) + o(\Delta t) .$$

Ennek fennállása a következőképpen adódik: $(\eta_{t+\Delta t} \leq x, A_{t+\Delta t})$ esemény akkor valósul meg, ha $(\eta_t = y, A_t)$ feltétel mellett $(0 \leq y \leq x)$ a $(t, t+\Delta t)$ időközben nem történik ütközés, vagy szóródásra vezető ütközés történik és a letargia növekedés legfeljebb $x - y$. A fenti összefüggésből $\Delta t \to 0$ határátmenet elvégzésével adódik (4).

A (4) differenciálegyenlet úgynevezett KOLMOGOROV—FELLER típusú egyenlet. Ilyen egyenletek megoldásával és a megoldás egyértelműségének kérdésével W. FELLER [3] munkájában foglalkozott. Jelenleg ezekkel a kérdésekkel nem foglalkozunk, csupán megemlítjük, hogy könnyen belátható, hogy az (5) megoldás kielégíti a (4) egyenletet és a kezdeti feltételt is.

Speciálisan (5) szerint fennáll, hogy

$$F(t, 0) = e^{-a C(0) t}$$

amely eredmény közvetlenül is megkapható.

Példa: Tekintsük azt a speciális esetet, midőn $\gamma_i^*(x) = \gamma_i^*$ (állandó) és $C(x) = C$ (állandó) és legyen $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \ldots + \gamma_r^*$. Vezessük be a következő eloszlásfüggvényt

(8) $$H(x) = \frac{\gamma_1^* H_1(x) + \gamma_2^* H_2(x) + \ldots + \gamma_r^* H_r(x)}{\gamma_1^* + \gamma_2^* + \ldots + \gamma_r^*} .$$

Ekkor (4) a következő egyszerű alakban írható fel

(9) $$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -w \int_0^x e^{-y/2} [1 - \varrho\, H(x-y)] \, d_y F(t, y) ,$$

ahol $\varrho = C^*/C$ és $w = aC$.

A (9) egyenlet Laplace—Stieltjes transzformáció alkalmazásával is megoldható. Legyen

(10) $$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x)$$

és

(11) $$\psi(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d_x F(t, x)$$

úgy (9) szerint fennáll:

(12) $$\frac{\partial\, \psi(t, s)}{\partial t} = -w[1 - \varrho\, \varphi(s)]\, \psi\left(t, s + \frac{1}{2}\right).$$

Mivel $\eta_0 = 0$, tehát $\psi(0, s) = 1$ és így (12) integrálásával

(13) $$\psi(t, s) = 1 - w[1 - \varrho\, \varphi(s)] \int_0^t \psi\left(u, s + \frac{1}{2}\right) du$$

adódik. Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával $\psi(t, s)$ sorra kifejezhető $\psi\left(t, s + \frac{n}{2}\right)$ segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy $\lim_{n \to \infty} \psi\left(t, s + \frac{n}{2}\right) = 0$ úgy végül azt kapjuk, hogy

(14) $$\psi(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (wt)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \varrho\, \varphi\left(s + \frac{j}{2}\right)\right].$$

Ennek megfordításával $F(t, x)$ egyértelműen meghatározható.

Ebben az esetben fennáll

(15) $$\mathbf{P}\{A_t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (wt)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \varrho\, \varphi\left(\frac{j}{2}\right)\right],$$

ugyanis $\mathbf{P}\{A_t\} = F(t, \infty) = \psi(t, 0)$.

Továbbá az η_t letargia feltételes várható értéke

(16) $$\mathbf{M}\{\eta_t | A_t\} = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (wt)^n \left\{ \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \varrho\varphi\left(\frac{j}{2}\right)\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-\varrho\varphi'\left(\frac{k}{2}\right)}{1 - \varrho\varphi\left(\frac{k}{2}\right)} \right\}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (wt)^n \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \varrho\varphi\left(\frac{j}{2}\right)\right)};$$

ugyanis $\mathbf{M}\{\eta_t | A_t\} = -\psi'(t, 0)/\psi(t, 0)$, ahol $\psi' = \partial\psi/\partial s$.

A neutron energiája t időpontban $E_t = E_0 e^{-\eta_t}$, és így E_t feltételes várható értéke

$$(17)\qquad \mathbf{M}\{E_t|A_t\} = E_0 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (wt)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \varrho\varphi\left(1+\frac{j}{2}\right)\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (wt)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \varrho\varphi\left(\frac{j}{2}\right)\right]}$$

ugyanis $\mathbf{M}\{E_t|A_t\} = E_0\psi(t, 1)/\psi(t, 0)$. Hasonlóképpen határozhatók meg E_t magasabbrendű momentumai is.

4. §. A τ_x változó eloszlása

Vezessük be a következő valószínűséget $\mathbf{P}\{\tau_x \leqq t, A_{\tau_x}\}$. Most az A_{τ_x} esemény nem jelent egyebet, mint a τ_x valószínűségi változó létezésének az eseményét. Könnyen látható, hogy most létezik a következő sűrűségfüggvény

$$(18)\qquad g(t, x) = \frac{d\,\mathbf{P}\{\tau_x \leqq t, A_{\tau_x}\}}{dt},$$

éspedig fennáll, hogy

$$(19)\qquad g(t, x) = a \sum_{i=1}^{r} \int_0^x e^{-y/2} \gamma_i^*(y) \left[1 - H_i(x-y)\right] d_y F(t, y)\,.$$

(19) könnyen adódik annak tekintetbe vételével, hogy $t < \tau_x < t + \Delta t$ akkor fordul elő, ha t időpontban $\eta_t = y$ (ahol $0 \leqq y \leqq x$) és $(t, t + \Delta t)$ időközben történik legalább egy szóródásra vezető ütközés és a letargianövekedés nagyobb, mint $x - y$.

A $g(t, x)$ függvény segítségével felírható, hogy

$$(20)\qquad \mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = \int_0^\infty g(t, x)\, dt$$

A τ_x várható értéke pedig

$$(21)\qquad \mathbf{M}\{\tau_x|A_{\tau_x}\} = \frac{\int_0^\infty t\, g(t, x)\, dt}{\int_0^\infty g(t, x)\, dt}\,.$$

A (20) valószínűség és (21) várható érték kiszámításával most nem foglalkozunk, mert a következő fejezetben, a (28) és (34) képletek segítségével egyszerűbb alakban is ki fogjuk fejezni.

Példa. A 3. §. végén említett speciális esetben felírható, hogy

$$g(t,x) = w\varrho \int_0^x e^{-y/2}[1 - H(x-y)]\, d_y F(t,y)\,. \tag{22}$$

Legyen ebben az esetben $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = A_0(x)$ és $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}\mathbf{M}\{\tau_x|A_{\tau_x}\} = A_1(x)$. Most $A_0(x)$ és $A_1(x)$ könnyen meghatározhatók Laplace—Stieltjes transzformáció segítségével, ugyanis fennáll, hogy

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, d\, A_0(x) = \frac{\varrho[1-\varphi(s)]}{1-\varrho\,\varphi(s)} \tag{23}$$

és

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, d\, A_1(x) = \frac{1}{w}\,\frac{\varrho[1-\varphi(s)]}{[1-\varrho\,\varphi(s)]\left[1-\varrho\,\varphi\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]}, \tag{24}$$

feltéve, hogy ezen integrálok léteznek. Ezek a képletek (22) és (13) képletek alapján adódnak $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t,s) = 0$ és $\lim\limits_{t\to\infty} t\,\psi(t,s) = 0$ tekintetbe vételével.

5. §. A μ_x változó eloszlása

Vezessük be a következő valószínűségeket: $\mathbf{P}\{\eta_n \leqq x,\, A_n\} = Q_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ahol $\eta_0 \equiv 0$ és A_0 a biztos esemény. A $Q_n(x)$ valószínűségek a következő rekurzív képlet segítségével határozhatók meg:

$$Q_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és $n = 1, 2, 3, \ldots$-ra

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{r} \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y)\, H_i(x-y)}{C(y)}\, dQ_{n-1}(y)\,. \tag{25}$$

Ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy ütközés az i-edik típusú atommagon történő szóródás $\gamma_i^*(y)/C(y)$ feltéve, hogy a neutron letargiája y.

A μ_x valószínűségi változó eloszlása könnyen kifejezhető a $Q_n(x)$ valószínűségek segítségével, mégpedig fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\mu_x = n,\, A_{\tau_x}\} = \sum_{i=1}^{r} \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y)\,[1 - H_i(x-y)]}{C(y)}\, dQ_{n-1}(y)\,. \tag{26}$$

Ugyanis a $\{\mu_x = n,\, A_{\tau_x}\}$ esemény akkor teljesül, ha az n-edik ütközésnél szóródás történik és ütközés után a neutron letargiája x-nél nagyobb lesz.

(26) a következő ekvivalens alakban is felírható:

$$\mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\} = \int_0^x \frac{C^*(y)}{C(y)}\, dQ_{n-1}(y) - Q_n(x)\,. \tag{26}$$

Mivel

$$\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\}\,,$$

ezért (27) alapján felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = 1 - \int_0^x \left[1 - \frac{C^*(y)}{C(y)}\right] dM(y)\,, \tag{28}$$

ahol

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)\,. \tag{29}$$

Megjegyezzük, hogy $M(x)$ a következő integrálegyenlet megoldásával is meghatározható:

$$M(x) = 1 + \sum_{i=1}^{r} \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y)\, H_i(x-y)}{C(y)}\, dM(y)\,, \tag{30}$$

amelynek fennállása könnyen igazolható (25) segítségével.

6. §. A τ_x várható értéke

Most μ_x feltételes várható értéke a következőképpen nyerhető:

$$\mathbf{M}\{\mu_x | A_{\tau_x}\} = \frac{1}{\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}} \sum_{n=1}^{\infty} n\, \mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\}\,, \tag{31}$$

ahol a szereplő $\mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\}$ valószínűség a (26) kifejezéssel egyenlő.

Ezután rátérünk a τ_x valószínűségi változó (21) alatti feltételes várható értékének meghatározására. E célból bevezetjük a következő függvényt $z \geqq 0$-ra:

$$M(x\,;z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x\,;z) \tag{32}$$

ahol

$$Q_0(x\,;z) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \geqq z \\ 0 & \text{ha} \quad x < z \end{cases}$$

és

$$Q_n(x, z) = \sum_{i=1}^{r} \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y)\, H_i(x-y)}{C(y)}\, d_y Q_{n-1}(y\,;z)\,. \tag{33}$$

Az itt szereplő $M(x\,;z)$ és $Q_n(x\,;z)$ függvények $z = 0$ speciális esetben megadják a (29) és (25) függvényeket és egyébként csupán abban különböznek azoktól, hogy feltesszük, hogy kezdetben a neutron letargiája z értékű.

A τ_x valószínűségi változó (21) alatti feltételes várható értéke $M(x)$ és $M(x\,;z)$ segítségével a következő alakban is felírható:

$$\mathbf{M}\{\tau_x | A_{\tau_x}\} = \tag{34}$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}} \int_0^x \left\{ 1 - \int_y^x \left[1 - \frac{C^*(u)}{C(u)} \right] d_u M(u\,;y) \right\} \frac{e^{y/2}}{a\,C^*(y)}\, dM(y)\,.$$

Ugyanis τ_x összetevődik azokból az időtartamokból, amelyeket a neutron különböző y letargiájú állapotokban tölt ($0 \leqq y \leqq x$). Ha pedig a neutron szóródásra vezető ütközés által y letargiájú állapotba jut és a következő ütközés is szóródás lesz, akkor az y letargiájú állapotban töltött időtartam várható értéke $\dfrac{1}{aC^*(y)\,e^{-y/2}}$. Ez az időtartam azonban csak akkor veendő figyelembe τ_x meghatározásánál, ha a neutron az x letargia érték eléréséig nem abszorbeálódik, aminek a valószínűsége (28)-hoz hasonlóan:

$$1 - \int_y^x \left[1 - \frac{C^*(u)}{C(u)} \right] d_u M(u\,;y)\,.$$

Megjegyezzük, hogy a (34) alatti várható érték nem tévesztendő össze azzal a várható értékkel, amelyet úgy számolunk, hogy kizárjuk az abszorpció lehetőségét. (34) kiszámításánál tekintetbe vesszük, hogy a neutronok abszorbeálódhatnak, de τ_x várható értékének kiszámításánál csak azokra a neutronokra vagyunk tekintettel, amelyek nem abszorbeálódtak.

Példa. Tekintsük ismét a 3. §. végén említett speciális esetet. Jelölje $H_n(x)$ a $H(x)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres kompozícióját. ($H_0(x) = 1$, ha $x \geqq 0$ és $H_0(x) = 0$, ha $x < 0$). Ekkor fennáll, hogy $Q_n(x) = \varrho^n H_n(x)$ azaz

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n H_n(x) \tag{35}$$

és

$$M(x\,;z) = M(x - z)\,. \tag{36}$$

Ekkor (28) szerint

$$\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = 1 - (1 - \varrho)\, M(x) \tag{37}$$

és (34) szerint

$$\mathbf{M}\{\tau_x | A_{\tau_x}\} = \frac{1}{w\,\varrho\,\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}} \int_0^x e^{y/2} [1 - (1 - \varrho)\, M(x - y)]\, dM(y) \tag{38}$$

amely eredmények megegyeznek a (22) és (23) korábbi eredményekkel, ugyanis most

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, dM(x) = \frac{1}{1-\varrho\,\varphi(s)}. \tag{39}$$

Ha speciálisan a közeg csupán hidrogén atomokból áll, úgy $H(x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \geqq 0$ és ekkor

$$M(x) = 1 + \frac{\varrho}{1-\varrho}\left(1 - e^{-(1-\varrho)x}\right), \tag{40}$$

ahonnan

$$\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = \varrho\, e^{-(1-\varrho)x} \tag{41}$$

és

$$\mathbf{M}\{\tau_x \mid A_{\tau_x}\} = \frac{2}{w}\left(e^{x/2} - 1\right) + \frac{1}{w\varrho}. \tag{42}$$

Ha $E = E_0 e^{-x}$, úgy $w = aC = \sqrt{2E_0/m}\,C$ és $\varrho = C^*/C$ tekintetbe vételével

$$\mathbf{M}\{\tau_x \mid A_{\tau_x}\} = \frac{\sqrt{2m}}{C}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}}\right) + \frac{\sqrt{2m}}{2C^*\sqrt{E_0}}. \tag{43}$$

Ha eltekintünk az utolsó tagtól (vagyis az időt az első ütközés pillanatától kezdve számítjuk), úgy ebben az esetben éppen E. FERMI bevezetésben említett képlete áll előttünk. Ugyanis most az ütközésenkénti letargia csökkenés várható értéke 1, és a neutronok szabad úthossza $1/C$.

IRODALOM

[1] S. GLASSTONE—M. C. EDLUND: *The elements of nuclear reactor theory*. van Nostrand, New York, 1952.

[2] O. OLSSON: „A theoretical study of the time energy distribution of slowed-down neutrons." *Arkiv för Physik* **10** (1955) 129—144.

[3] W. FELLER: „Zur Theorie der stochastischen Prozesse." *Mathematische Annalen* **113** (1936) 116—160.

(Beérkezett: 1956. II. 9.)

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕЙ АТОМНЫХ РЕАКТОРОВ

Л. ТАКАЧ

Резюме

Настоящая работа исследует процессы замедления нейтронов происходящие в атомном реакторе. Рассмотрим нейтрон, обладающий в момент $t = 0$ (фиксированной) начальной энергией E_0. Пусть в момент t случайные величины E_t и $\eta_t = \log E_0/E_t$ обозначают соответственно энергию нейтрона и его *летаргию*. Предположим, что нейтрон

движется в бесконечной однородной среде. Пусть эта среда состоит из атомных ядер r различных типов. Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *атомных масс*, а $N_1, N_1, \ldots N_r$ пространственную плотность (среднее число в единице объема) этих ядер. Пусть $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_r^*$ обозначают микроскопическое эффективное сечение рассеяния, а $\sigma_1^{**}, \sigma_2^{**}, \ldots, \sigma_r^{**}$ микроскопическое эффективное сечение поглощения нейтрона, относящиеся к отдельным атомным ядрам. Пусть, далее $\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^{**}$, $\gamma_i = N_i \sigma_i$, $\gamma_i^* = N_i \sigma_i^*$ $(i = 1,2, \ldots, r)$, $C = \gamma_2 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_r$, $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \ldots + \gamma_r^*$, где эти величины, вообще говоря, зависят от летаргии нейтрона, то есть $\gamma_i = \gamma_i(x)$, $\gamma_i^* = \gamma_i^*(x)$, $C = C(x)$ и $C^* = C^*(x)$, где x летаргия сталкивающегося нейтрона. В случае этой модели можно считать, что вероятность того, что нейтрон, летаргия которого x, столкнется в промежуток времени Δt с атомным ядром i-того типа, равна $a \gamma_i(x) e^{-x/2} \Delta t + o(\Delta t)$ а вероятность рассеивания равна $a \gamma_i^*(x) e^{-x/2} \Delta t + o(\Delta t)$ где $a = \sqrt{2E_0/m}$, m — масса нейтрона. Предположим далее, что сталкивание нейтрона таково, что во время рассеивания увеличение летаргии нейтрона не зависит от значения её до столкновения. Пусть функция распределения увеличения летаргии во время рассеивания на атомном ядре i-того типа есть $H_i(x)$.

Пусть $F(t, x)$ есть вероятность того, что нейтрон в промежуток времени $(0, t)$ не поглощается (событие A_t) и в момент t его летаргия не превосходит x (событие $\eta_t \leq x$). Функция распределения $F(t, x)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (4) и может быть в явном представлена формулой (5). В том специальном случае, когда $\gamma_i^* = \gamma_i$, $C(x) = C$ и $C^*(x) = C^*$ (постоянны), преобразование $F(t, x)$ по Лапласу—Стилтьесу $\psi(t, x)$ может быть дано формулой (14) где $w = aC$ и $\varrho = C^*/C$, а $\varphi(s)$ определяется соотношениями (8) и (10). Вероятность события A_t даётся формулой (15), а условное математическое ожидание E_t формулой (17). Пусть случайная величина τ_x обозначает тот момент, когда летаргия нейтрона как раз становится больше чем x, то есть $\tau = \inf t$ $(\eta_t > x)$. Функцию плотности $g(t, x)$ случайной величины τ_x даёт (19). Точнее говоря $g(t, x) \Delta t + o(\Delta t)$ есть вероятность того, что до момента τ_x нейтрон не абсорбируется (событие A_{τ_x}) и $t < \tau_x < t + \Delta t$. Вероятность события $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}$ даёт (20), а условное математическое ожидание τ_x — (22). Пусть случайная величина η_x обозначает число столкновений, происшедших до момента τ_x. Распределение η_x даётся формулой (27) где $Q_n(x)$ определяется формулой (25). Упомянутая в предыдушей главе вероятность $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}$ может быть выражена и формулой (28) где $M(x)$ может быть найдено на основании (29) и (24). Условная вероятность $\mathbf{M}\{\eta_t | A_{\tau_x}\}$ может быть выражена и формулой (34), где фигурирующие в ней величины даются соотношениями (32), (33), (28) и (29).

В упомянутом выше специальном случае все эти величины вычислены в работе в явном виде.

ON SOME PROBABILISTIC PROBLEMS IN THE THEORY OF NUCLEAR REACTORS

L. TAKÁCS

Summary

This paper deals with the process of slowing-down of neutrons which take place in the moderators of nuclear reactors. Let us consider a neutron having a (fixed) initial energy E_0 in the moment $t = 0$. Let the random variables E_t and $\eta_t = \log E_0/E_t$ denote the energy and the lethargy resp., of the neutron at the moment t. Suppose that the neutron moves in a homogeneous medium of infinite extension consisting of atomic nuclei of r different nuclei and by $N_1, N_2, \ldots, N_r$ the spatial density (the average number in unit volume) of these types of atoms. In addition denote by $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_r^*$ resp. by $\sigma_1^{**}, \sigma_2^{**}, \ldots, \sigma_r^{**}$ the cross-sections of scattering resp. of capturing (absorbtion), of the neutron, with respect to the different types of nuclei. Put $\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^{**}$, $\gamma_i = N_i \sigma_i$, $\gamma_i^* = N_i \sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_r$ and $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \ldots + \gamma_r^*$; these quantities generally depend on the lethargy of the neutron, i. e. $\gamma_i = \gamma_i(x)$, $\gamma_i^* = \gamma_i^*(x)$ $C = C(x)$ and $C^* = C^*(x)$, where x denotes the lethargy of the colliding neutron. In case of the above model, it can be supposed that the probability that, during the time Δt

a neutron of lethargy x collides with a nucleus of type i, is $a\gamma_i(x)\, e^{-x/2}\ \Delta t + o(\Delta t)$ and that of scattering $a\gamma_i^*(x)\, e^{-x/2}\ \Delta t + o(\Delta t)$ (where $a = \sqrt{2E_0/m}$ and m is the mass of the neutron). In addition, suppose — as usual — that the collisions are such, that in case of scattering, the increase of the lethargy of the neutron is independent of its value before the collision. Let $H_i(x)$ be the distribution function of the increase in lethargy gained at the scattering on a nucleus of type i.

Let $F(t, x)$ be the probability that during the time interval $(0, t)$ the neutron will not be absorbed (event A_t) and in the moment t its lethargy will be at most x (event $\eta_t \geq x$). In §. 3. it is proved, that the distribution function $F(t, x)$ satisfies the integro-differential equation (4) and can be written in the explicite form (5). The following example is considered: Put $\gamma_i^*(x) = \gamma_i$, $C(x) = C$ and $C^*(x) = C^*$ (const.) then the Laplace—Stieltjes transform $\psi\ (t, s)$ of $F(t, x)$ is given by the formula (14) where $w = aC$ and $\varrho = C^*/C$; $\varphi(s)$ is defined by (8) and (10). The probability of the event A_t resp. the conditional expected value of E_t are given by (15) resp. (17). Let the random variable τ_x denote the moment in which the lethargy of the neutron reaches (or jumps over) the value x, i. e. $\tau_x = \inf\ t\ (\eta_t > x)$. The density function $g(t, x)$ of the random variable τ_x is determined in §. 4., it is given by (19). More exactly, $g(t, x)\, \Delta t + o(\Delta t)$ is the probability that the neutron will not be absorbed till the moment τ_x (event A_{τ_x}) and $t < \tau_x < t + \Delta t$. The probability of the event A_{τ_x} and the conditional expectation of τ_x are given by (20) and (22) respectively. All these quantities are calculated for the example mentioned in 1.

Let the random variable μ_x denote the number of collisions which occurred before the moment τ_x. The distribution of μ_x is given in § 5. by (27), where $Q_n(x)$ is defined by (25). The probability $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}$ mentioned in the preceding chapter may be expressed also by the formula (28) where $M(x)$ can be obtained by means of (29) and (25). The conditional expectation $\mathbf{M}\{\eta_t | A_{\tau_x}\}$ may be expressed by formula (34) too, where the occurring quantities are yielded by the formulae (32), (33) and (29) and (28).

All these quantities are calculated explicitely for the special case mentioned above.