# EGY RÉSZECSKESZÁMLÁLÁSSAL KAPCSOLATOS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁRÓL

## MEGJEGYZÉS BÉKÉSSY ANDRÁS »HIBÁS SCALEREK (JELOSZTÓK) VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁSÁRÓL« CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ

TAKÁCS LAJOS

### Bevezetés

BÉKÉSSY ANDRÁS [1] dolgozatában a következő problémával foglalkozik: Egy számlálócsőhöz Poisson-folyamat szerint érkeznek részecskék. A számlálócső által szolgáltatott impulzusok egy leosztó berendezésen (scaler) keresztül jutnak a regisztráló fokozathoz. A leosztó azonban hibásan működik, mégpedig az egyes fokozatok billenő körei a beérkező impulzusok hatására nem biztosan, hanem csak bizonyos valószínűséggel lépnek működésbe. Kérdés, hogy a $t$ idő alatt regisztrált impulzusok szórásnégyzetének és várható értékének hányadosa miként függ a leosztó hibájától.

BÉKÉSSY ANDRÁS eredményeit a szóbanforgó sztochasztikus folyamat részletes elemzésével nyeri. A következőkben azt kívánjuk megmutatni, hogy ezek az eredmények még általánosabb esetben is könnyen nyerhetők a rekurrens folyamatok elmélete segítségével. Először a probléma általános tárgyalásával foglalkozunk, majd több példát tárgyalunk, amelyek tartalmazzák BÉKÉSSY [1] eredményét.

### 1. §. A véletlen leosztás problémája

Tegyük fel, hogy egy számlálócsőhöz $0 < t < \infty$ időközben $t_1, t_2, \ldots$ $t_n, \ldots$ időpontokban érkeznek részecskék (vagy egy számlálóberendezéshez impulzusok). A $t_n - t_{n-1} = \xi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; t_0 = 0)$ időkülönbségekről feltesszük, hogy egyforma eloszlású, független valószínűségi változók. Most vizsgáljuk azt az esetet, midőn a $\{t_n\}$ sorozatból ritkítással egy új $\{t'_n\}$ sorozatot nyerünk, ahol a $\{t'_n\}$ sorozat részsorozata a $\{t_n\}$-nek. A ritkítás történjék úgy, hogy sorra haladva a $\{t_n\}$ sorozat $\nu_1$-edik, $(\nu_1 + \nu_2)$-edik, $\ldots$, $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n)$-edik, $\ldots$ elemét kiválasztjuk $\{t'_n\}$ számára. Feltesszük, hogy a $\nu_i$ mennyiségek valószínűségi változók, amelyek függetlenek és azonos $\mathbf{P}\{\nu_i = n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ valószínűségeloszlással bírnak. Ebben az esetben a $\{t'_n\}$ sorozatra is érvényes, hogy a $t'_n - t'_{n-1} = \xi'_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; t'_0 = 0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók, mégpedig $\xi'_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eloszlása megegyezik a $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\nu_i}$ változó eloszlásával.

Legyen az alapul vett sorozatban $\mathbf{M}\{\xi_n\} = \mu$ és $\mathbf{D}^2\{\xi_n\} = \sigma^2$, úgy a ritkított sorozatban

$$\mathbf{M}\{\xi'_n\} = \mathbf{M}\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\nu_i}\} = \mu\,\mathbf{M}\{\nu_i\} \tag{1}$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\xi'_n\} = \mathbf{D}^2\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\nu_i}\} = \mu^2\,\mathbf{D}^2\{\nu_i\} + \sigma^2\,\mathbf{M}\{\nu_i\}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) képletek könnyen adódnak a teljes várható érték tétel alapján.

Jelölje most a $\{t_n\}$ sorozatban $(0, t)$ időközben előforduló események várható számát $m(t)$ és szórásnégyzetét $d^2(t)$. Ezen mennyiségekre elemi módon a következő aszimptotikus becslések adhatók (S. TÄCKLIND [2]):

$$m(t) \sim \frac{t}{\mu}, \tag{3}$$

és ha $\sigma^2$ véges

$$d^2(t) \sim \frac{\sigma^2}{\mu^3}\, t. \tag{4}$$

Vagyis a $\{t_n\}$ sorozatra fennáll, hogy

$$f = \lim_{t\to\infty} \frac{d^2(t)}{m(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2}. \tag{5}$$

Ha a ritkított $\{t'_n\}$ sorozatban a $(0, t)$ időközben előforduló események számának várható értékét $M(t)$, szórásnégyzetét pedig $D^2(t)$ jelöli, úgy (5)-höz hasonlóan fennáll, hogy

$$f' = \lim_{t\to\infty} \frac{D^2(t)}{M(t)} = \frac{\mathbf{D}^2\{\xi'_n\}}{\mathbf{M}^2\{\xi'_n\}} = \frac{\sigma^2}{\mu^2}\,\frac{1}{\mathbf{M}\{\nu_i\}} + \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_i\}}{\mathbf{M}^2\{\nu_i\}}. \tag{6}$$

Ennek a képletnek alapján egy érdekes eredmény olvasható le. Első pillanatra azt gondolhatnánk, hogy $f'$ az $f$-ből egyszerűen $\mathbf{M}\{\nu_i\}$-vel való osztással nyerhető, de, mint kiderül, fellép még egy additív tag is, amely nem függ a $\{t_n\}$ sorozat törvényszerűségétől, hanem csakis a ritkítás sajátságaitól.

## 2. §. Példák

1. Legyen $\{t_n\}$ a korábban említett sorozat. Ha speciálisan $\nu_i \equiv m$ (állandó), úgy

$$f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2}\,\frac{1}{m}. \tag{7}$$

Ha $\mathbf{P}\{\nu_i = n\} = p(1-p)^{n-1}$, azaz minden egyes $\{t_n\}$ sorozathoz tartozó esemény $p$ valószínűséggel tartozik a $\{t'_n\}$ sorozathoz is, úgy

$$f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2}\,p + (1-p), \tag{8}$$

ugyanis ekkor $\mathsf{M}\{\nu_i\} = 1/p$ és $\mathsf{D}^2\{\nu_i\} = (1-p)/p^2$. Ha ezen utóbbi esetben feltesszük, hogy az alapulvett $\{t_n\}$ folyamat Poisson-féle, amikoris $\sigma^2/\mu^2 = 1$, úgy (8) szerint $f' = 1$. Ez természetes eredmény is, mivel ekkor a $\{t_n'\}$ folyamat is Poisson-féle lesz.

2. BÉKÉSSY [1] példája. Jelölje most a fent említett $\{t_n\}$ sorozat egy számlálócső által szolgáltatott impulzusok sorozatát. BÉKÉSSY felteszi, hogy $\{t_n\}$ Poison-folyamat, mikoris $f = \sigma^2/\mu^2 = 1$. (Megjegyezzük, hogy ha feltesszük, hogy $\lambda$ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket számlálunk $\tau$ holtidejű Geiger—Müller számlálócsővel, úgy $\mu = \tau + 1/\lambda$ és $\sigma^2 = 1/\lambda^2$, azaz $f = \sigma^2/\mu^2 = 1/(1+\lambda\tau)^2$, és ha a számlálást $\tau$ impulzusidejű elektronsokszorzóval végezzük, úgy $\mu = e^{\lambda\tau}/\lambda$ és $\sigma^2 = (e^{\lambda\tau} - 2\lambda\tau)/\lambda^2$, azaz $f = \sigma^2/\mu^2 = 1 - 2\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$.)

Tegyük fel most, hogy az impulzusok $\{t_n\}$ sorozata egy $m$ fokozatú leosztón halad át és jelölje $\{t_n'\}$ a leosztó után a regisztrálóhoz érkező impulzusok sorozatát. Megállapítandó az $f'$ mennyiség. Ha a leosztó ideálisan működik, úgy minden $\nu_i = 2^m$-edik impulzust jelzi és ekkor $f' = f/2^m$.

A leosztó működési elve, mint ismeretes, a következő: Egy $m$-fokozatú leosztó minden egyes fokozata kétféle állapotban lehet, mondjuk $A$ és $B$ állapotban. Legyen $t = 0$ időpontban valamennyi fokozat $A$ állapotban. Az első impulzus hatására az első fokozat átmegy $B$ állapotba. A második impluzus hatására az első fokozat visszabillen $A$ állapotba és lead egy impulzust a második fokozatnak, mire az átmegy $B$ állapotba. A jelenség hasonlóképpen folytatódik tovább, ha egy fokozat impulzust kap, úgy megváltoztatja állapotát és a $B \to A$ átmenetek alkalmával a következő fokozatnak lead egy impulzust. Az utolsó fokozat által továbbított inpulzusok vezérlik a regisztrálót.

BÉKÉSSY [1] dolgozatában azt az esetet vizsgálja, midőn a leosztó hibásan működik, azaz az impulzusok hatására nem következik be okvetlenül átbillenés, hanem csak bizonyos valószínűséggel. Mégpedig tegyük fel, hogy ha az $i$-edik fokozat impulzust kap és $A$ állapotban van, úgy $p_i$ valószínűséggel billen át, míg, ha $B$ állapotban van, úgy $q_i$ valószínűséggel billen át ($i = 1, 2, \ldots, m$). Ebben az esetben a leosztó mindegyik fokozata egy véletlen ritkítást végez. Jelölje rendre az $1, 2, \ldots, m$-edik ritkításhoz tartozó $\nu_l$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$) változókat $\nu_{1l}, \nu_{2l}, \ldots, \nu_{ml}$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$). Ezek eloszlása könnyen megállapítható, éspedig fennáll, hogy

$$\mathsf{P}\{\nu_{rl} = k\} = \sum_{j=1}^{k-1} (1-p_r)^{j-1} p_r (1-q_r)^{k-j-1} q_r, \tag{9}$$

ugyanis $\nu_{rl}$ jelöli az $r$-edik fokozatnál azt, hogy az $(l-1)$-edik $B \to A$ átmenet után hányadik impulzus hozza létre a következő $B \to A$ átmenetet. A fent felírt valószínűség úgy adódik, hogy feltesszük, hogy a $j$-edik ($j = 1, 2, \ldots, k-1$) impulzusra $A \to B$ átmenet és a $k$-adikra $B \to A$ átmenet következik. Most a (9) valószínűségeloszlás generátorfüggvénye könnyen felírható:

$$u_r(s) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathsf{P}\{\nu_{rl} = k\} s^k = \frac{p_r s}{1-(1-p_r)s} \cdot \frac{q_r s}{1-(1-q_r)s}. \tag{10}$$

Ha a leosztót mint egészet tekintjük, úgy érvényes, hogy a leosztó is véletlen ritkítást végez, mégpedig a $\nu_1$-edik, $(\nu_1+\nu_2)$-edik, $\ldots$, $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)$-edik, $\ldots$ impulzust választja ki. A $\nu_i$ változó generátorfüggvénye:

$$U(s) = \mathsf{M}\{s^{\nu_i}\} = u_1(u_2(\ldots u_m(s)\ldots)). \tag{11}$$

Ez a következőképpen indokolható: A $\nu_i$ valószínűségi változó úgy tekinthető, mint egy individuum által elindított kaszkád-processzusnál az $m$-edik generációban levő individuumok száma, ha feltesszük, hogy az $r$-edik generációban a $\nu_{rl}$ változó írja le egy individuum utódainak számát. (Erre vonatkozólag utalunk például T. E. HARRIS [3] munkájára.)

A $\nu_i$ változó várható értéke és szórásnégyzete (11) alapján könnyen meghatározható. Legyen egyszerűség kedvéért

$$\alpha_r = \frac{1}{p_r} + \frac{1}{q_r} \quad \text{és} \quad \beta_r = \frac{1-p_r}{p_r^2} + \frac{1-q_r}{q_r^2},$$

úgy

$$\mathbf{M}\{\nu_i\} = A_m = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \tag{12}$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\nu_i\} = B_m^2 = \\ = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)^2 \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1^2} + \frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2^2} + \frac{\beta_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2} + \ldots + \frac{\beta_m}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1} \alpha_m^2}\right). \tag{13}$$

Ugyanis $\mathbf{M}\{\nu_i\} = U'(1)$ és $\mathbf{D}^2\{\nu_i\} = U''(1) + U'(1) - [U'(1)]^2$.

Így tehát (6) szerint a regisztrálóhoz érkező impulzusok sorozatára fennáll, hogy

$$f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{A_m} + \frac{B_m^2}{A_m^2}. \tag{14}$$

Ha most azt is tekintetbe vesszük, hogy a regisztráló csupán $p_{m+1}$ valószínűséggel jelzi az egyes impulzusokat, úgy a $\{t_n'\}$ sorozatot a (8) képlettel kapcsolatban leírt modell szerint tovább kell ritkítani egy $\{t_n''\}$ sorozattá, amely végülis a regisztrálások sorozata. Most (8) szerint erre fennáll, hogy

$$f'' = f' p_{m+1} + (1 - p_{m+1}) = \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{A_m} + \frac{B_m^2}{A_m^2}\right) p_{m+1} + (1 - p_{m+1}). \tag{15}$$

Az $f''$ szolgáltatja végülis a regisztrálások sorozatára jellemző szórásnégyzet/várható-érték viszony határértékét $t \to \infty$ esetben. Ha $p_{m+1} = 1$, úgy $f'' = f'$.

Vizsgáljuk meg a (14) alatti $f'$ értékét néhány speciális esetben. Ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \alpha$ és $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = \beta$, úgy

$$f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{\alpha^m} + \frac{\beta}{\alpha^{m+1}} \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1}.$$

Ha $p_r = q_r = p$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, úgy az előző képletben $\alpha = 2/p$, $\beta = 2(1-p)/p^2$ és

$$f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{p^m}{2^m} + \frac{1-p}{2-p}\left[1 - \left(\frac{p}{2}\right)^m\right].$$

Ha még azt is feltesszük, hogy $\{t_n\}$ Poisson-folyamat, úgy $\sigma^2/\mu^2 = 1$ és

$$f' = \frac{1}{2-p}\left[1 - p + \left(\frac{p}{2}\right)^m\right].$$

**Megjegyzés.** Érdekességgel bír annak az esetnek a megvizsgálása is, midőn $\{t_n\}$ nem homogén Poisson-folyamat $\lambda(u)$ $(0 \leqq u < \infty)$ eseménysűrűséggel. Ekkor

$$m(t) = d^2(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du,$$

és a transzformált $\{t'_n\}$ sorozatban

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D^2(t)}{M(t)} = 1 + \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_i\}}{\mathbf{M}^2\{\nu_i\}},$$

feltéve, hogy $\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$.

## IRODALOM

[1] BÉKÉSSY A. : „Hibás scalerek (jelosztók) jeleinek valószínűségeloszlásáról." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 171—181.

[2] S. TÄCKLIND : „Elementare Behandlung von Erneuerungsproblem für den stationären Fall." *Skandinavisk Aktuarietidskrift* (1944) 1—15.

[3] T. E. HARRIS : „Branching processes." *Annals of Mathematical Statistics* **19** (1948) 474—494.

(Beérkezett : 1955. X. 1.)

# ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, СВЯЗАННОЙ С РЕГИСТРАЦИЕЙ ЧАСТИЦ

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ А. БЕКЕШШИ

Л. ТАКАЧ

## Резюме

Предположим, что в промежутке $0 \leqq t < \infty$ к регистратору прибывают частицы (или к счётному устройству сигналы) в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. О промежутках времени $t_n - t_{n-1} = \xi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots;\ t_0 = 0)$ предположим, что они являются независимыми случайными величинами с одинаковыми распределениями, для которых $\mathbf{M}\{\xi_n\} = \mu$ и $\mathbf{D}^2\{\xi_n\} = \sigma^2$. Выберем из последовательности $\{t_n\}$ $\nu_1$-ий, $(\nu_1 + \nu_2)$-ий, ..., $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n)$-ий элемент. Так мы получим разреженную последовательность $\{t'_n\}$. Предположим, что $\nu_i$ есть суть независимые случайные величины, распределение которых $\mathbf{P}\{\nu_i = n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ известно. Обозначим через $m(t)$ математическое ожидание, а через $d^2(t)$ дисперсию числа событий последовательности $\{t_n\}$ происходящих в промежутке времени $(0, t)$ а через $M(t)$ и $D^2(t)$ соответствующие величины для последовательности $\{t'_n\}$. Для этих величин имеют место соотношения

$$f = \lim_{t\to\infty} \frac{d^2(t)}{m(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2},$$

и

$$f' = \lim_{t\to\infty} \frac{D^2(t)}{M(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2}\,\frac{1}{\mathbf{M}\{\nu_i\}} + \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_i\}}{\mathbf{M}^2\{\nu_i\}},$$

Рассматривается несколько примеров на применение этих формул. Так мы подробно рассматриваем результат А. БЕКЕШИ [1], который указывает как отражается счёт с помощью дефектных счётчиков на величине $f'$. В настоящей работе показывается, что для вычисления этого отношения $f'$ не требуется подробного исследования соответствующего стохастического процесса, как это делает БЕКЕШИ, так как проблема может быть разрешена даже в более общем случае с помощью теории рекуррентных процессов.

# ON SOME PROBABILISTIC PROBLEMS CONCERNING THE COUNTING OF PARTICLES

## A NOTE ON A PAPER OF A. BÉKÉSSY

L. TAKÁCS

**Summary**

Suppose that in the time-interval $(0 \leq t < \infty)$, particles (or pulses) arrive to a counter-tube (or to a counting device) in the moments $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. It will be supposed that the time-differences $t_n - t_{n-1} = \xi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; \ t_0 = 0)$ are equally distributed independent random variables for which $\mathbf{M}\{\xi_n\} = \mu$ and $\mathbf{D}^2\{\xi_n\} = \sigma^2$. Now, proceeding in the sequence $\{t_n\}$ from member to member, let us choose the $\nu_1$-th, $(\nu_1 + \nu_2)$-th, $\ldots$, $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n)$-th, $\ldots$ element. Then we get the filtered sequence $\{t_n'\}$. We suppose that $\nu_i$ are independent random variables whose distribution $\mathbf{P}\{\nu_i = n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ is known. Denote by $m(t)$ resp. $d^2(t)$ the expectation resp. the variance of the number of events occurring in the sequence $\{t_n\}$ during the time interval $(0, t)$. The corresponding quantities for the sequence $\{t_n'\}$ shall be denoted by $M(t)$ and $D^2(t)$. Then following formulae hold:

$$f = \lim_{t \to \infty} \frac{d^2(t)}{m(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2},$$

and

$$f' = \lim_{t \to \infty} \frac{D^2(t)}{M(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{\mathbf{M}\{\nu_i\}} + \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_i\}}{\mathbf{M}^2\{\nu_i\}}.$$

As an application of these formulae some examples are considered, especially the problem, treated by A. BÉKÉSSY [1], how a counting carried out with scalers which make sometimes mistakes influences of the value of $f'$. In the present paper it is shown, that in order to calculate $f'$, no detailed investigation of the stochastic process in question, as it is done in BÉKÉSSY's paper[1] is needed; as the problem can be solved, even under more general assumptions by means of the elementary theory of recurrent processes.