EGY KÖZLEKEDÉSSEL KAPCSOLATOS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

A Közlekedéstudományi Műszaki Egyetem Matematikai Tanszékének megbízásából Intézetünk a következő kérdés megoldásával foglalkozott: Egy vasúti pályaudvarra $t_1 + kT, t_2 + kT, \ldots, t_n + kT$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ időpontokban érkeznek mozdonyok, és ezek $u_1 + kT, u_2 + kT, \ldots, u_n + kT$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ időpontokban hagyják el a pályaudvart. Legyen $0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$ és $0 \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_n < T$. (A gyakorlatban $T = 1$ nap.) Tegyük fel, hogy a forgalmat minimális mozdonykészlet látja el, azaz a pályaudvaron nincs feleslegesen sok várakozó mozdony, hanem csak annyi, amennyi a forgalom lebonyolításához feltétlenül szükséges. Meghatározandó a mozdonyoknak egy T hosszúságú periódusra jutó állási ideje: $\tau = \tau(t_1, t_2, \ldots, t_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Vizsgálatainkban feltesszük, hogy a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ és $u_1, u_2, \ldots, u_n$ időpontok valószínűségi változók, mégpedig a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpontok és az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ időpontok is a $(0, T)$ intervallumon n számú független, egyenletes eloszlású pont nagyság szerint rendezett koordinátáival egyeznek meg. Ebben az esetben a $\tau = \tau(t_1, t_2, \ldots, t_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ állási időtartam is valószínűségi változó lesz.

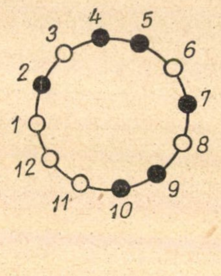
A fenti feltevés azzal indokolható, hogy bár az egyes pályaudvarokra vonatkozó érkezési és indulási időpontok rögzített értékek, mégis országos viszonylatban igen különbözők, és bennünket az országos átlag érdekel. Ennek meghatározására viszont célszerű a fenti egyszerű feltevéssel élni, amelyben az előforduló időpontokat valószínűségi változóknak tekintjük.

A fenti esetre a τ valószínűségi változó várható értékét SARKADI KÁROLY [1] dolgozatában meghatározta. SARKADI KÁROLY hasonló módszert alkalmazott, mint ZIERMANN MARGIT [2] dolgozatában gépalkatrészek raktározási idejének meghatározására használt. Ennek a módszernek lényege az, hogy nem kell az egyes mozdonyok érkezési és indulási idejét, illetve az egyes gépalkatrészek beérkezési és felhasználási időpontjait külön figyelembe venni, hanem elegendő a mozdonykészlet, illetve a raktárkészlet időbeli változását vizsgálni. Ezen a módon az átlagos állási idő meghatározható, de az állási idő szórásának, illetve eloszlásának meghatározása már nagy nehézségekbe ütközik.

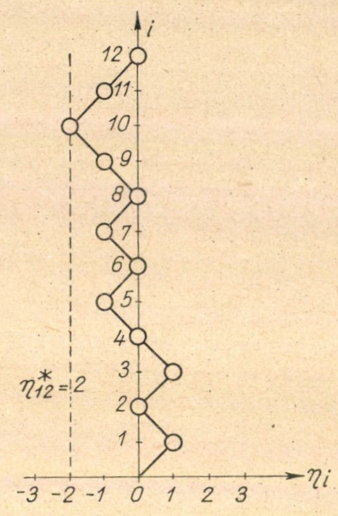
Most következő megjegyzésünkben a problémát oly módon tárgyaljuk, amely lehetővé teszi, hogy nemcsak az állási idő várható értékét, de a szórásnégyzetét és magasabbrendű momentumait is egyszerűen meghatározhassuk.

1. §. A probléma megoldásának módszere

Vigyük fel a $(0, T)$ intervallumot egy T kerületű körre. Ekkor a $t_1, t_2, \ldots, t_n, u_1, u_2, \ldots, u_n$ időpontoknak a körkerületen $2n$ számú pont fog megfelelni. Gondoljuk ezeket $1, 2, \ldots, 2n$ számjegyekkel megszámozva. Jelölje rendre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}$ valószínűségi változó az egymást követő pontok közötti távolságokat a kör kerületén. Vezessük be továbbá az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}$



1. ábra



2. ábra

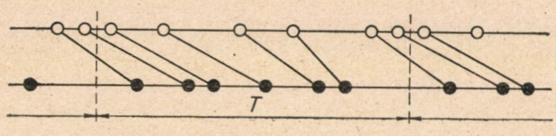
valószínűségi változókat, ahol η_i jelöli azt, hogy az $1, 2, \ldots, i$ pontok között mennyivel több az érkezési időpont, mint az indulási időpont. Legyen továbbá $\eta_{2n}^* = -\min(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n})$. Tekintsük illusztrálásképpen az 1. és 2. ábrákat, amelyek $n = 6$ esetre vonatkoznak. A fehér pontok jelentik az érkezési időpontokat, a feketék pedig az indulási időpontokat.

Azt állítjuk, hogy minimális mozdonykészlet használata mellett a T periódusra jutó állási idő

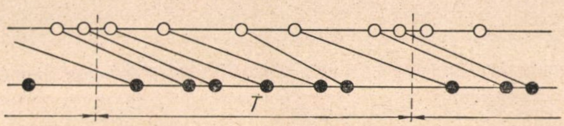
$$\tau = \sum_{i=1}^{2n} (\eta_i + \eta_{2n}^*)\, \xi_i . \tag{1}$$

Ugyanis a mozdonykészlet változását a kezdőponthoz viszonyítva egy perióduson belül az η_i $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ mennyiségek írják le. A felhasználásra kerülő mozdonykészlet akkor lesz minimális, ha olyan időpontban, midőn η_i minimális értékét veszi fel, nincs várakozó mozdony, vagyis, ha a periódus kezdőpontjában η_{2n}^* a várakozó mozdonyok száma. Ekkor az i-edik és $(i+1)$-edik pont közötti szakaszon, amelynek hossza ξ_i, a vesztegl? mozdonyok száma $\eta_i + \eta_{2n}^*$, és ennek alapján adódik (1).

Megjegyezzük, hogy az említett példánál optimális indítási rendszert tüntet fel a 3. ábra. Itt az egyes mozdonyok összetartozó érkezési és időpontjai össze vannak kötve. Nem optimális indítási rendszert tüntet fel a 4. ábra. Megjegyezzük azonban, hogy az állási időt nem érinti az a tény, hogy az egyidejűleg várakozó mozdonyok közül melyiket indítjuk el.



3. ábra



4. ábra

Az eddig felsorolt feltevésekből következik, hogy a $\{\xi_i\}$ és az $\{\eta_i\}$ valószínűségi változók egymástól függetlenek. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}$ valószínűségi változók ekvivalens valószínűségi változók, amelyekre fennáll, hogy $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{2n} = T$, és a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i)$ változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i) = \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-i+1)}{T^i}\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_i}{T}\right)^{2n-i},$$

ha $x_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, i)$ és $x_1 + x_2 + \ldots + x_i \leqq T$; $(i = 1, 2, \ldots, 2n-1)$. Továbbá az $\eta_i (i = 1, 2, \ldots, 2n)$ változók egy bolyongó pont mozgását írják le. Ha egy pont kiindul az $x = 0$ pontból és n egységnyi lépést tesz előre és n egységnyi lépést hátra, és minden egyes lehetséges bolyongása egyenlően valószínű, úgy η_i jelöli a pont helyzetét i lépés megtétele után. η_i előállítható a következő alakban is: $\eta_i = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$, ahol a $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{2n}$ változók közül n számú 1 és n számú -1, és minden egyes választás egyenlően valószínű.

A fent elmondottak segítségével a τ változó egyértelműen jellemezve van. Célszerű τ-t a következő, (1)-gyel ekvivalens alakban felírni:

$$\tau = \sum_{i=1}^{2n} \eta_i \xi_i + T\eta_{2n}^*.$$

Az $\{\eta_i\}$ és $\{\xi_i\}$ változók eloszlásainak ismeretében τ eloszlása is meghatározható. Most azonban csak τ várható értékének és szórásának meghatározásával foglalkozunk.

2. §. A τ várható értékének meghatározása

Fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\{\tau\} = T\,\mathbf{M}\{\eta_{2n}^*\}.$$

Ugyanis $\mathbf{M}\{\eta_i\,\xi_i\} = 0$, mert egyrészt η_i és ξ_i függetlensége következtében $\mathbf{M}\{\eta_i\,\xi_i\} = \mathbf{M}\{\eta_i\}\,\mathbf{M}\{\xi_i\}$, másrészt $\mathbf{M}\{\eta_i\} = 0$, mivel η_i eloszlása szimmetrikus a 0-pontra nézve.

Most

$$\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* \geqq c\} = \frac{\binom{2n}{n-c}}{\binom{2n}{n}}, \tag{2}$$

és így

$$\mathbf{M}\{\eta_{2n}^*\} = \sum_{c=1}^{n} \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* \geqq c\} = \frac{1}{2}\left[\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} - 1\right], \tag{3}$$

vagyis

$$\mathbf{M}\{\tau\} = \frac{T}{2}\left[\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} - 1\right]. \tag{4}$$

(2) a következőképpen indokolható: Az említett bolyongásban az összes lehetséges utak száma $\binom{2n}{n}$. Az $\eta_{2n}^* \geqq c$ esemény akkor következik be, ha a pont bolyongása során érinti az $x = -c$ pontot. Az $x = -c$ pontot érintő utak száma viszont $\binom{2n}{n-c}$, ugyanis ez megegyezik azon utak számával, a melyeknél a pont az $x = 0$ pontból kiindulva $2n$ lépéssel az $x = -2c$ pontba az $x = 0$ pontnak $x = -c$-re vonatkozó tükörképébe jut.

3. §. A τ szórásnégyzetének meghatározása

$\mathbf{M}\{\tau\}$ már ismeretes, és $\mathbf{D}^2\{\tau\} = \mathbf{M}\{\tau^2\} - [\mathbf{M}\{\tau\}]^2$. Így elegendő $\mathbf{M}\{\tau^2\}$-et kiszámítani. Erre fennáll:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{M}\{\tau^2\} &= \mathbf{M}\{\xi_1^2\}\sum_{i=1}^{2n}\mathbf{M}\{\eta_i^2\} + \mathbf{M}\{\xi_1\,\xi_2\}\sum_{i\neq j}\mathbf{M}\{\eta_i\eta_j\} + \\ &+ 2T\,\mathbf{M}\{\xi_1\}\sum_{i=1}^{2n}\mathbf{M}\{\eta_i\,\eta_{2n}^*\} + T^2\,\mathbf{M}\{\eta_{2n}^{*2}\}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Itt könnyen adódik, hogy

$$\mathbf{M}\{\xi_1\} = \frac{T}{2n}, \tag{6}$$

$$\mathbf{M}\{\xi_1^2\} = \frac{2T^2}{2n(2n+1)}, \tag{7}$$

és

$$\mathbf{M}\{\xi_1 \xi_2\} = \frac{T^2}{2n(2n+1)}, \tag{8}$$

továbbá (2) szerint

$$\mathbf{M}\{\eta_{2n}^{*2}\} = \sum_{c=1}^{n} (2c-1)\,\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* \geqq c\} = n + \frac{1}{2} - \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}. \tag{9}$$

A következőkben bebizonyítjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i^2\} = \frac{n(n+1)}{3}, \tag{10}$$

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_j\} = \frac{(n-1)\,n\,(2n+1)}{3} \tag{11}$$

és

$$\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_{2n}^*\} = -\frac{n(2n+1)}{6}. \tag{12}$$

Ezek segítségével azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{M}\{\tau^2\} = T^2 \left(\frac{5n}{6} + \frac{1}{2} - \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} \right), \tag{13}$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\tau\} = T^2 \left(\frac{5n}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2^{4n-2}}{\binom{2n}{n}^2} \right). \tag{14}$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}},$$

úgy a következő aszimptotikus becslést nyerjük $\mathbf{D}^2\{\tau\}$-ra:

$$\mathbf{D}^2\{\tau\} = n\,T^2 \left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + \ldots \sim n T^2 \cdot 0{,}0479\ldots \tag{15}$$

Ezután rátérünk a felhasznált (10), (11) és (12) eredmények bizonyítására.

(10) **bizonyítása.** Könnyen látható, hogy az η_i változó csupán a $2r-i$ $(r=0, 1, 2, \ldots, i)$ értékeket veheti fel, éspedig fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta_i = 2r - i\} = \frac{\binom{i}{r}\binom{2n-i}{n-r}}{\binom{2n}{n}}.$$

Innen könnyű számítással adódik, hogy

$$\mathbf{M}\{\eta_i^2\} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{r=0}^{i} (2r-i)^2 \binom{i}{r}\binom{2n-i}{n-r} = \binom{i}{1} - \frac{2}{2n-1}\binom{i}{2}$$

és így

$$\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i^2\} = \binom{2n+1}{2} - \frac{2}{2n-1}\binom{2n+1}{3} = \frac{n(2n+1)}{3}.$$

(11) **bizonyítása.** Fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\{(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{2n})^2\} = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i^2\} + \sum_{i \neq j} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_j\}.$$

A jobboldal első tagját (10) szerint ismerjük. Ha a baloldal értékét is sikerül meghatározni, úgy ezzel a (11) kifejezés is ismertté válik. Most, mint már említettük, $\eta_i = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ írható, ahol a $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{2n}$ változók közül n számú 1-gyel és n számú (-1)-gyel egyenlő és minden egyes választás egyenlő valószínű, Ilyen körülmények között $\mathbf{M}\{\chi_i\} = 0$, $\mathbf{D}^2\{\chi_i\} = 1$ és $\mathbf{M}\{\chi_i \chi_j\} = -1/(2n-1)$, ha $i \neq j$. Most

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{2n} = 2n\chi_1 + (2n-1)\chi_2 + \ldots + \chi_{2n},$$

és ebből

$$\mathbf{M}\{(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{2n})^2\} = \frac{n^2(2n+1)}{3};$$

Végül (10) tekintetbe vételével

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_j\} = \frac{(n-1)n(2n+1)}{3}.$$

(12) **bizonyítása.** Tekintsük először az $\eta_i + \eta_{2n}^*$ változót. Ennek eloszlása könnyen meghatározható. Ugyanis fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta_i = 2r - i, \eta_{2n}^* \geqq c\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\binom{i}{r}\binom{2n-i}{n-r}}{\binom{2n}{n}}, & \text{ha } 0 \leqq r \leqq \dfrac{i-c}{2}; \\[2ex] \dfrac{\binom{i}{r}\binom{2n-i}{n-c-r}+\binom{i}{c+r}\binom{2n-i}{n-r}-\binom{i}{c+r}\binom{2n-i}{n-c-r}}{\binom{2n}{n}}, & \text{ha } \dfrac{i-c}{2} \leqq r \leqq i. \end{cases}$$

Ez a következőképpen látható be: Az említett bolyongásnál az összes lehetséges utak száma $\binom{2n}{n}$ és $(\eta_i = 2r - i, \eta_{2n}^* \geqq c)$ esemény ama utakra teljesül, amelyek az i-edik lépésben az $x = 2r - i$ ponton haladnak át és közben érintik az $x = -c$ pontot. Ha $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}(i-c)$, úgy az $\eta_{2n}^* \geqq c$ esemény önmagától teljesül, és a kedvező utak száma $\binom{i}{r}\binom{2n-i}{n-r}$. Ha $\frac{1}{2}(i-c) \leqq r \leqq i$, úgy az olyan utak száma, amelyek az i-edik lépés után elérik az $x = -c$ pontot: $\binom{i}{r}\binom{2n-i}{n-c-r}$, az olyan utak száma, amelyek az i-edik lépésig elérik az $x = -c$ pontot, $\binom{i}{c+r}\binom{2n-i}{n-r}$. Ezek összegében azonban kétszer szerepelnek azon utak, amelyek az i-edik lépés előtt és után is érintik az $x = -c$ pontot. Ha az ilyen utak számát, $\binom{i}{c+r}\binom{2n-i}{n-c-r}$-et levonjuk az összegből, úgy a kedvező utak számát nyerjük.

A fenti valószínűség segítségével:

$$\mathbf{P}\{\eta_i + \eta_{2n}^* \geqq s\} = \sum_{r=0}^{i} \mathbf{P}\{\eta_i = 2r - i, \eta_{2n}^* \geqq s + i - 2r\} =$$

$$= \sum_{0 \leqq r < \frac{s+i}{2}} \frac{\binom{i}{r}\binom{2n-i}{n-r+s}+\binom{i}{r-s}\binom{2n-i}{n-r}-\binom{i}{r-s}\binom{2n-i}{n-r+s}}{\binom{2n}{n}} +$$

$$+ \sum_{\frac{s+i}{2} \leqq r \leqq i} \frac{\binom{i}{r}\binom{2n-i}{n-r}}{\binom{2n}{n}} =$$

$$= 1 + \sum_{0 \leq r < \frac{s+i}{2}} \frac{\left[\binom{i}{r} - \binom{i}{r-s}\right]\left[\binom{2n-i}{n-r+s} - \binom{2n-i}{n-r}\right]}{\binom{2n}{n}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{s+i} \frac{\left[\binom{i}{r} - \binom{i}{r-s}\right]\left[\binom{2n-i}{n-r+s} - \binom{2n-i}{n-r}\right]}{\binom{2n}{n}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{\binom{2n}{n+s} - 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-s}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{2n}{n-s}}{\binom{2n}{n}}.$$

Vagyis azt nyertük eredményül, hogy η_{2n}^* eloszlása megegyezik $\eta_i + \eta_{2n}^*$ eloszlásával.[1)] Következőleg

$$\mathbf{M}\{(\eta_i + \eta_{2n}^*)^2\} = \mathbf{M}\{\eta_{2n}^{*2}\},$$

ahonnan

$$\mathbf{M}\{\eta_i \eta_{2n}\} = -\frac{1}{2}\mathbf{M}\{\eta_i^2\}$$

és így (10) szerint

$$\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_{2n}^*\} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i^2\} = -\frac{n(2n+1)}{6},$$

amivel (12)-t is igazoltuk.

További feladat lenne a

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\tau}{T\sqrt{n}} \leq x\right\},$$

határeloszlás meghatározása.

IRODALOM

[1] Sarkadi Károly: „Mozdonyok várakozási idejéről." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 191—194.

[2] Ziermann Margit: „A raktárkészlet pótlásáról, II. A készletpótló rendelés." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 203—216.

(Beérkezett: 1955. IX. 15.)

[1)] Sarkadi Károly volt szíves figyelmemet felhívni arra, hogy a két eloszlás azonossága az η_i definíciójának közvetlen következménye.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СВЯЗАННОЙ С ТРАНСПОРТОМ

Л. ТАКАЧ

Резюме

Предположим, что на какой то вокзал в течение одного дня ($T = 1$ день) прибывает и отправляется n паровозов. Пусть времена прибытия и отправления являются независимыми друг от друга случайными величинами с равномерным распределением. Требуется определить суточное время простоя паровозов при возможно лучшей системе отправки. К. ШАРКАДЪИ уже определил в статье [1] математическое ожидание времени простоя. Теперь мы предлагаем метод, который делает возможным помимо вычислении математического ожидания также вычисление дисперсии и моментов высшего порядка Математическое ожидание времени простоя дается формулой (4), дисперсия — формулой (14).

ON A PROBABILISTIC PROBLEM ARISING IN SOME TRAFFIC INVESTIGATIONS

L. TAKÁCS

Summary

Suppose that there are n locomotives arriving in and departing from a railway station during a day ($T = 1$ day). Suppose that all the moments of arrivals and departures are mutually independent uniformly distributed random variables. We investigate the daily resting time of the locomotives when an optimal dispatching system has been established. The expectation of the resting time has already been determined by K. SARKADI [1]. The present paper deals with a new method which enables to calculate also the standard deviation and the higher moments besides the expectation. The expectation and the variance of the resting time τ are given by (4) and (14), respectively.