

RÉGI ÉS ÚJ MÓDSZEREK LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA¹⁾

EGERVÁRY JENŐ

Bevezetés

Tudvalevő, hogy bár a lineáris egyenletrendszerek elmélete az algebra teljesen feltárt területének tekinthető, a különféle megoldási eljárások mégis mind a mai napig számos dolgot tárgyát képezik. Arra vonatkozóan, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló — első pillanatban a matematikus számára unalmasnak és száraznak tűnő — módszerek érdekesek is lehetnek, elegendő G. E. FORSYTH-nek nemrég megjelent idevágó munkájára utalni [9]. E dolgozatban egyrészt rövid áttekintést kívánunk adni lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló klasszikus és modern módszerekről, másrészt részletesen ismertetni kívánunk egy általános — véges iterációs — megoldási eljárást, amely több ismert módszert is magában foglal, mint speciális esetet, ezenfelül általánosságánál fogva tetszőleges — tehát akár „téglalapalakú” együttható-matrixszal bíró — homogén vagy inhomogén egyenletrendszerek megoldására alkalmas, végül a benne előforduló műveletek egyszerűségénél és áttekinthetőségénél fogva a megoldás gépesítésének alapjául szolgálhat.

1. §. Az együtthatómatrix invertálása a karakterisztikus egyenlet alapján

Tekintsük az

$$(1) \quad Ax = b; \quad |A| \neq 0$$

alakban megadott, nem-szinguláris együtthatómatrixszal bíró inhomogén egyenletrendszert. Nyilvánvalóan ennek megoldását

$$x = A^{-1}b$$

¹⁾Jelen dolgozat a szerzőnek egy idegen nyelven sajtó alatt álló dolgozatát, valamint a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetében 1956. január 18-án elhangzott előadását tartalmazza. A dolgozat anyagának sajtó alá rendezésénél jelentős segítséget nyújtott RÓZSA PÁL, melyért a szerző e helyen is köszönetet mond.

alakban nyerjük. A feladat tehát lényegében az \mathbf{A}^{-1} reciprokmatrix meghatározása.

Legkezdetlegesebb az az eljárás, amikor $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ komponenseit közvetlenül írjuk fel két determináns hányadosaként (*Cramer-szabály*). Noha ezzel a reguláris inhomogén egyenletrendszerek megoldása elvileg elintéztnek tekinthető, a determinánsok közvetlen kiszámítása gyakorlatilag kivihetetlennek bizonyul. Egy n -ismeretlenű egyenletrendszer megoldásához ugyanis $(n+1)!$ szorzatot kellene kiszámítani, ami pl. $n = 26$ esetén egy olyan elektronikus számológéppel, amely 2600 szorzást végez másodpercenként, kb. 10^{17} évet venne igénybe [9].

A fentivel nagyságrendben körülbelül megegyező műveletet igényel az az ugyancsak ismert invertálási eljárás is, amikor a reciprokmatrixot a karakterisztikus egyenlet segítségével számítjuk ki. Ez a módszer *Cayley—Hamilton tételén* alapszik, amely szerint minden matrix kielégíti karakterisztikus egyenletét. Azaz, ha $\varphi(\lambda) \equiv c_0 - c_1\lambda - \dots - c_n\lambda^n$ jelenti a karakterisztikus polinomot, ahol $c_0 = |\mathbf{A}|$, akkor $\varphi(\mathbf{A}) = 0$ a következőképpen is írható:

$$c_0 \mathbf{E} = \mathbf{A} \{ c_1 \mathbf{E} + c_2 \mathbf{A} + \dots + c_n \mathbf{A}^{n-1} \}.$$

Innen kiolvasható, hogy a keresett reciprok:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{A}^{k-1}.$$

A fő nehézséget itt a c_k együtthatók — azaz $2^n - 1$ számú főminor — kiszámítása okozza.

Újabb ez az eljárás gyakorlatibb formát nyert annak a — néhány szerző által követett²⁾ — módszernek a segítségével, amely tulajdonképpen polinom helyettesítési értékének kiszámítására szolgáló jólismert úgynevezett Horner-féle módszernek az általánosítása. Ennek főelőnye, hogy determináns számítása nem szerepel benne, csak matrixok szorzása és „nyom”-ának (Spur, след — a fődiagonál-elemek összege) meghatározása. Ezek szerint, ha $\sigma(\mathbf{A})$ jelenti az \mathbf{A} matrix nyomát, és képezzük az

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A} \left\{ \mathbf{A}_k - \frac{1}{k} \sigma(\mathbf{A}_k) \mathbf{E} \right\}; \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$$

iterációs sorozatot, akkor a keresett reciprokot

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{n}{\sigma(\mathbf{A}_n)} \left\{ \mathbf{A}_{n-1} - \frac{1}{n-1} \sigma(\mathbf{A}_{n-1}) \mathbf{E} \right\}$$

szolgáltatta. Nem nehéz meggyőződni arról, hogy ennél az invertálási eljárásnál csak kb. n^3 számú skalárszorzatot kell kiszámítani, tehát ez a módszer a megoldás lényeges egyszerűsítését biztosítja.

²⁾ Lásd pl. [8], [12].

2. §. Invertálás konvergens iterációval

Lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy másik irányát az iteratív megoldási módszerek képezik. Ezek kezdetben a skalár egyenleteknél már korábban kidolgozott iteratív eljárásokat vették alapul, s mivel a skalár egyenletek megoldására szolgáló iteratív módszerek szinte kivétel nélkül végtelen processzusok, egyes szerzők a lineáris egyenletrendszerek megoldására is kezdetben végtelen iteratív processzusokat konstruáltak.

Tekintsük először az $x = \varphi(x)$ egyismeretlenű (skalár) egyenletet. Ennek megoldására az $x_{k+1} = \varphi_k(x_k)$ általános iterációs „Ansatz” szolgál. Amennyiben olyan intervallumban, ahol van gyök, a $\varphi_k(x)$ függvényt sorozat egyenletesen konvergál a $\varphi(x)$ függvényhez, x_k pedig egy x értékhez, akkor x szükségképpen az egyenlet egyik gyökét szolgáltatja. Ha olyan intervallumban indulunk ki, ahol csak egy gyök van és $\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$, ha $x_k \rightarrow x$, akkor ebben az intervallumban x az egyenlet egyetlen megoldását adja.

Ennek legegyszerűbb esetét mutatja az

$$x = mx + b$$

egyszeretlenű elsőfokú egyenlet,³⁾ illetve annak megoldására szolgáló

$$x_{k+1} = mx_k + b$$

iteratív algoritmus, amely a fenti általános esetből a

$$\varphi_k(x) = mx + b$$

speciális választással keletkezik. Ez az iteráció egyrészt stacionárius, mert $\varphi_k(x) = \varphi(x) = mx + b$ nem függ a k indextől, másrészt lineáris.

Az iteráció céljaira az olyan egyenlet bizonyul „jó”-nak, ahol az eredeti egyenletben x együtthatója 1-hez közel áll. Tegyük fel, hogy $|m| < 1$, ez esetben a létező egyetlen megoldás elegendő az

$$(2) \quad x = mx + b$$

egyenletnek. Az iterációs egyenlet

$$x_{k+1} = mx_k + b.$$

A (2) és (3) egyenletből

$$(3) \quad x_{k+1} - x = m(x_k - x) = \dots = m^k(x_1 - x).$$

Innen látható, hogy $|m| < 1$ esetén a közelítő értékek olymódon konvergálnak a pontos értékhez, hogy a szukcesszív hibák csökkenő mértani sorozatot alkotnak. A konvergencia annál gyorsabb, minél kisebb az eredeti egyenlet együtthatójának az egységtől való eltérése. Az eljárás szemléltetésére szolgál az 1. ábra (lásd: a következő oldalon).

Az inhomogén lineáris egyenletrendszerek iteratív megoldása a fenti egyszerű eljárás közvetlen általánosításával történik. Az előzők szerint az (1) kiindulási egyenletet következőképpen alakítjuk át:

$$x = (E - A)x + b.$$

³⁾ Bármely $ax = b$ egyenlet felírható $x = (1 - a)x + b$ alakban. Rövidség kedvéért a továbbiakban $1 - a$ helyett m -et írunk.

Legyen \mathbf{E} „eltérése” az eredeti \mathbf{A} matrixtól \mathbf{M} , ekkor

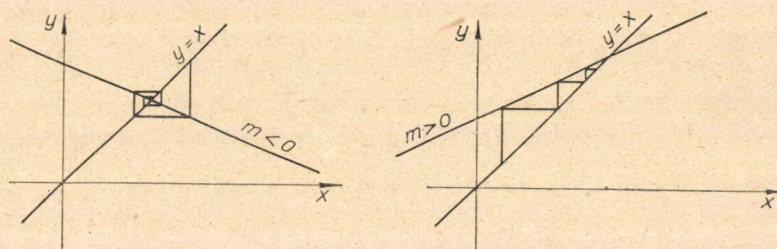
$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

stacionárius iteráció esetén a közelítő megoldási vektorok közötti összefüggés

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}.$$

A fentiek alapján

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) = \dots = \mathbf{M}^k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}).$$



1. ábra

Ha azt kívánjuk, hogy az iterációval nyert közelítések bármely \mathbf{x}_1 kiindulási vektor mellett az \mathbf{x} megoldáshoz tartanak, akkor ehhez szükséges és elegendő, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}^k = \mathbf{0}$$

legyen. A gyakorlatban legtöbbször diagonálizálható matrixok szerepelnek, s ezekre nézve a fenti konvergenciakövetelmény megfogalmazható, mint az \mathbf{M} matrix sajátértékeire vonatkozó feltétel. Ha ugyanis \mathbf{M} sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, bal-, illetve jobboldali normált sajátvektorai $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_n^*$, és $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, akkor a matrix kanonikus alakja

$$\mathbf{M} = \sum_{p=1}^n \lambda_p \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^*,$$

amelyből hatványozással

$$\mathbf{M}^k = \sum_{p=1}^n \lambda_p^k \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^*$$

adódik. Tehát a $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}^k = \mathbf{0}$ feltétel teljesüléséhez elegendő, hogy az összes sajátérték abszolút értékében 1-nél kisebbek legyenek. Ebből az is megállapítható, hogy a konvergencia annál gyorsabb, minél kisebbek abszolút értékben az egységmatrixtól való eltérést mérő $\mathbf{M} = \mathbf{E} - \mathbf{A}$ matrix sajátértékei.

3. §. G. Schulz konvergencia-gyorsító eljárása

Amennyiben az abszolút értékben legnagyobb sajátérték 1-től keveset tér el, a most ismertetett iteráció konvergenciája nagyon meglassulhat. Az iteráció konvergenciájának meggyorsítására G. SCHULZ szerkesztett egy stacionárius,

de nem-lineáris iteratív eljárást [11]. Ennek az iterációnak az ismertetésénél célszerű a megoldandó egyenletet az

$$(\mathbf{E} - \mathbf{M}) \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

alakban írni. Ha \mathbf{M} a fenti feltételnek eleget tesz, akkor az $(\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}$ reciprokmatrix az

$$(\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \dots$$

konvergens geometriai sorral fejezhető ki. G. SCHULZ gyorsító eljárásának mármost az a lényege, hogy k iterációs lépéssel a fenti mértani sornak $2^k - 1$ tagú részletösszegét tudjuk előállítani:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{2^k-1} &= \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \mathbf{M}^\nu = \sum_{\nu=0}^{2^{k-1}-1} \mathbf{M}^\nu (\mathbf{E} + \mathbf{M}^{2^k-1}) = \sum_{\nu=0}^{2^{k-1}-1} \mathbf{M}^\nu \{2\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{M}^{2^k-1})\} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{2^{k-1}-1} \mathbf{M}^\nu \left\{ 2\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{M}) \sum_{\nu=0}^{2^{k-1}-1} \mathbf{M}^\nu \right\}. \end{aligned}$$

Mivel pedig $\mathbf{E} - \mathbf{M} = \mathbf{A}$ tehát

$$\mathbf{S}_{2^k-1} = \mathbf{S}_{2^{k-1}-1} \{2\mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{S}_{2^{k-1}-1}\}.$$

4. §. A Gauss—Banachiewicz-féle eliminációs módszer, mint véges iteráció

A lineáris egyenletrendszerek megoldásának talán legismertebb és legáltalánosabban használt módszere az ismeretlenek, a Gauss-féle algoritmus segítségével történő eliminációja. Ennek matrixtechnikai eszközökkel való kivitele az együtthatómatrixnak a — T. BANACHIEWICZTŐL származó — úgynevezett trianguláris faktorizációjára vezet ([1], [6], [13]). Ennek az eljárásnak a lényege az, hogy ha az együtthatómatrixot egy alsó és egy felső háromszögmatrix szorzatára tudjuk bontani, akkor lehetővé válik az ismeretlenek közvetlen, rekurzív módon való kiszámítása. A módszer hátránya azonban, hogy — mivel a trianguláris faktorizációnak szükséges és elégséges feltétele az, hogy a sarokminorok 0-tól különbözők legyenek, — a számítás során indexcserék és egyéb korrekciók válhatnak szükségessé.

Lényegében a T. BANACHIEWICZ-féle trianguláris faktorizációnak az általánosítása tetszőleges együtthatómatrixszal bíró homogén és inhomogén egyenletrendszerekre az a — szerző által kidolgozott — algoritmus, amely diádok szukszesszív leválasztásával bontja fel az (r -edrangú) együtthatómatrixot egy nem-szinguláris kvadratikus matrix és egy (r -edrangú) háromszögmatrix szorzatára ([5], [6]). A Gauss-féle eliminációs algoritmusnak ily módon való kivitelét véges iterációs eljárásnak minősíthetjük, mivel a megoldást közvetlenül szolgáltató háromszögmatrixhoz véges számú iterációs lépéssel juthatunk el.

5. §. A Stiefel—Hestenes-féle véges iteráció

A véges iteratív eljárások között kell megemlíteni a modern irodalomban sokat vitatott és feltétlenül érdeklődésre számot tartó konjugált irányok módszerét, melynek megalkotása E. STIEFEL és M. R. HESTENES nevéhez

fűződik [10]. A konjugált irányok módszere egy nem-lineáris stacionárius (véges) iterációs eljárás, melynek lényege olyan u_k ($k = 1, 2, \dots, n$) irányoknak a meghatározása, amelyek a (szimmetrikus és pozitív definit) A együtthatómatrixra ortogonálisak (konjugáltak), vagyis eleget tesznek az

$$u_i A u_j^* = 0 \quad (i \neq j)$$

összefüggéseknek. Ezek ismeretében ugyanis a keresett reciprokmatrix

$$A^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^*}{u_k^* A u_k}$$

alakban adódik. További mellékfeltételek nélkül a konjugált irányok kiválasztása nagy fokban határozatlan feladat. E. STIEFEL és M. R. HESTENES ennek a módszernek a gyakorlati alkalmazhatóságát nagy mértékben fokozták az által, hogy a számításban az úgynevezett konjugált gradiens irányokat alkalmazták. Ezeknek az u_k irányoknak a meghatározása a

$$v_k = b - A x_k$$

lineárisan független vektoroknak az (A matrixra való) ortogonalizálásával történik. Itt az x_k vektorok az

$$x_{k+1} = x_k + \frac{u_k v_k^* u_k}{u_k^* A u_k} A u_k,$$

a v_k vektorok a

$$v_{k+1} = v_k - \frac{v_k^* u_k}{u_k^* A u_k} A u_k,$$

az u_k vektorok pedig az

$$(4) \quad u_{k+1} = v_{k+1} - \frac{v_{k+1}^* A u_k}{u_k^* A u_k} u_k$$

iterációval nyerhetők, ahol $u_1 = v_1 = b - A x_1$, és x_1 tetszőleges kiindulási vektor.

A konjugált gradiens módszerének az ötletessége abban rejlik, hogy v_{k+1} az u_1, u_2, \dots, u_{k-1} irányokra már automatikusan konjugált, és a (4) összefüggés biztosítja, hogy az u_k irányra is konjugált legyen.

A módszer geometriailag úgy interpretálható, hogy a (szimmetrikus és pozitív definit) A együtthatómatrix által meghatározott n -dimenziós hiperellipszoid-seregből kiválasztjuk azt, amelyik a tetszőlegesen választott (kiindulási) x_1 ponton áthalad. Ezután az x_1 pontból kiinduló felületi normálisnak meghatározzuk azt az x_2 pontját, amelyben a hozzá konjugált $(n-1)$ -dimenziós hipersíkot döfi. Ebben a hipersíkban fekvő $(n-1)$ -dimenziós hiperellipszoid-seregből kiválasztva azt, amelyik áthalad az x_2 ponton, az eljárást ugyanígy tovább folytatjuk. Véges (legfeljebb n) számú lépésben eljutunk a hiperellipszoid-sereg középpontjába, amely az egyenlet megoldását reprezentálja.⁴⁾

⁴⁾ Megjegyezzük, hogy kikerekítési hibák miatt előfordulhat, hogy n lépésben nem jutunk el a megoldáshoz, ekkor az iteráció tovább folytatható.

Megjegyezzük még, hogy amennyiben az u_k irányoknak éppen az

$$A u_k = \lambda_k u_k$$

egyenletekkel definiált sajátirányokat választjuk, akkor automatikusan kiadódik a reciprokmatrixnak — az A matrix kanonikus felbontásából triválisan következő —

$$A^{-1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1} u_k u_k^*$$

alakú előállítás.

Felvetődik mármost az a kérdés, nem volna-e lehetséges a különböző véges iterációs eljárásoknak egy olyan fokú egységesítése, amely magában foglalná speciális esetekként a fent említett megoldási módszereket, s ezenkívül tetszőleges homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldására egyaránt alkalmazható volna. Mint a következőkben látni fogjuk, ez az egységesítés a legáltalánosabb rangesőkentő művelet megállapításával és alkalmazásával válik lehetségessé.

6. §. Bázisfaktorokra bontás véges iterációval

A szerző több korábbi dolgozatában [2] — [6] rámutatott, hogy matrixok bázisfaktorokra való bontása lehetővé teszi a matrix-elméletben alkalmazott számos eljárás egységes és egyszerű alakban való tárgyalását. Egy $n \times m$ -edrendű és r -edrangú matrix bázisfaktorokra való bontása

$$A = B \cdot C^*$$

$n \times m$ $n \times r$ $r \times m$

alakú. Itt B r oszlopa A oszlopvektorainak, C^* r sora pedig A sorvektorainak egy bázisa. Ez a felbontás, eltekintve a triviális

$$A = B T T^{-1} C^*$$

transzformációtól, egyértelműen meghatározott.

A szerző egyik korábbi dolgozatában [2] a bázisfaktorok tényleges kiszámítására az alábbi iteratív eljárást adta meg, amelynek lényege abban áll, hogy alkalmasan választott diádok (elsőrangú matrixok) ismételt leválasztása által az adott matrix rangja fokozatosan csökken:

$$A_{k+1} = A_k - \frac{A_k e_k e_k^* A_k}{e_k^* A_k e_k}$$

Itt e_k és e_k^* oszlop-, illetve sor-egységvektort jelentenek.

Dolgozatunk most következő részében a fenti eljárást is magában foglaló általános rangesőkentő eljárást fogunk kifejteni, és rámutatunk annak különböző alkalmazásaira a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál.

A jól ismert

$$\varrho(A) - 1 \leq \varrho(A - bc^*) \leq \varrho(A) + 1$$

egyenlőtlenségek azt mutatják, hogy ha egy adott \mathbf{A} matrixból egy diádot levonunk, akkor \mathbf{A} rangja vagy eggyel nő, vagy csökken, vagy pedig változatlan marad.

Könnyen belátható, hogy ezzel az eljárással \mathbf{A} rangja csak akkor csökkenhet, ha a baloldali \mathbf{b} tényező \mathbf{A} matrix oszlopvektor-terében, a jobboldali \mathbf{c}^* tényező pedig \mathbf{A} sorvektor-terében van. Ekkor azonban \mathbf{b} felírható $\mathbf{A}\mathbf{u}$ alakban, \mathbf{c}^* pedig $\mathbf{v}^*\mathbf{A}$ alakban, tehát csak $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A}$ rangját kell vizsgálnunk, ahol λ skalár paraméter.

Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}^*$ az \mathbf{A} matrix bázisfaktorokra bontott alakja. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}^* - \lambda\mathbf{B}\mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B}\mathbf{C}^* = \mathbf{B}(\mathbf{E}_r - \lambda\mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B})\mathbf{C}^*,$$

$$r - 1 \leq \varrho(\mathbf{E}_r - \lambda\mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B}).$$

Abból, hogy $|\mathbf{E}_r - \lambda\mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B}| = 1 - \lambda\mathbf{v}^*\mathbf{B}\mathbf{C}^*\mathbf{u}$, következik, hogy

$$\varrho(\mathbf{E}_r - \lambda\mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B}) = r - 1$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{v}^*\mathbf{B}\mathbf{C}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{u} \neq 0$ és $\lambda = (\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{u})^{-1}$.
Bebizonyítottuk tehát a következő lemmát:

Lemma: *Ha valamely \mathbf{A} matrixból \mathbf{bc}^* diádot levonunk, \mathbf{A} rangja akkor és csak akkor csökken eggyel, ha a \mathbf{bc}^* diád*

$$\mathbf{bc}^* = \frac{\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A}}{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{u}}.$$

alakban írható fel, ahol \mathbf{u} és \mathbf{v} tetszőleges, csupán a $\mathbf{v}^\mathbf{A}\mathbf{u} \neq 0$ feltételt kielégítő vektorok.*

Ha most egy tetszőleges r -edrangú \mathbf{A} matrixból indulunk ki, azt r lineárisan független diád összegére tudjuk bontani az alábbi iteratív eljárással:

$$(5) \quad \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*\mathbf{A}_k}{\mathbf{v}_k^*\mathbf{A}_k\mathbf{u}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

ahol $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ és $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ tetszőleges, csupán a

$$\mathbf{v}_k^*\mathbf{A}_k\mathbf{u}_k \neq 0$$

feltételt kielégítő vektorok. Ekkor \mathbf{A} diadikus felbontását

$$(6) \quad \mathbf{A} = \sum_{k=1}^r \frac{\mathbf{A}_k\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*\mathbf{A}_k}{\mathbf{v}_k^*\mathbf{A}_k\mathbf{u}_k}$$

szolgáltatta.

A (6) összefüggés magában foglalja a legtöbb ismert felbontást, mint speciális esetet. Ha \mathbf{A} kvadratikus, szimmetrikus, nem-szinguláris és definit, akkor

I. $\mathbf{u}_k = \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k^* = \mathbf{e}_k^*$ választása esetén \mathbf{A} trianguláris faktorizációjára jutunk (GAUSS—BANACHIEWICZ).

II. A $v_k = u_k$, $u_k^* A u_l = 0$, ha $k \neq l$ összefüggéseket kielégítő konjugált vektorok rendszerének a választása esetén az

$$A = \sum_{k=1}^r \frac{A u_k u_k^* A}{u_k^* A u_k},$$

felbontásra jutunk, amely az úgynevezett konjugált irányok módszerénél fordul elő (STIEFEL—HESTENES).

III. Az

$$A u_k = \lambda u_k; \quad u_k^* u_l = \delta_{kl}$$

összefüggésekkel definiált sajátvektorok választása az

$$A = \sum_{k=1}^r \lambda_k u_k u_k^*$$

(kanonikus) felbontást adja.

7. §. Általános lineáris egyenletrendszer megoldása fokozatos dimenziócsökkentéssel

A lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló legtöbb klasszikus és modern módszer az (1) reguláris, inhomogén egyenletrendszerrel foglalkozik. Az (1) egyenletrendszer megoldása azonban nyilvánvalóan megegyezik az

$$[A, -b] \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = 0, \quad |A| \neq 0$$

homogén egyenletrendszernek $x_{n+1} = 1$ -hez tartozó partikuláris megoldásával. Tehát az

$$(7) \quad AX = 0, \quad \varrho(X) = n - \varrho(A)$$

általános homogén egyenlet megoldására szolgáló megfelelő eljárásnak magában kell foglalnia az inhomogén egyenlet megoldását is.

Felhasználva az A matrix bázisfaktorokra való bontását, a (7) egyenlet megoldására igen egyszerű és explicit eljárást adhatunk meg. Legyen A egy bázisfaktorokra bontott alakja $A = BC^*$. Ekkor a B matrixnak van baloldali inverze, következésképpen az

$$AX = 0$$

egyenlet megoldása egyértelmű a

$$C^* X = 0$$

egyenlet megoldásával.

Nyilvánvaló azonban, hogy

$$|C^* C| \neq 0, \quad C^* \{E - C(C^* C)^{-1} C^*\} = 0$$

$$\varrho\{E - C(C^* C)^{-1} C^*\} = n - \varrho(A),$$

innen következik, hogy

$$(8) \quad \mathbf{X} = \mathbf{E} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^* \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^*$$

a (7) egyenlet teljes megoldása.

A megoldásnak ez az alakja csupán elméleti szempontból jelentős, mivel meglehetősen bonyolult matrix-műveleteket tartalmaz.

Most megmutatjuk, hogy a (7) egyenlet egy, a (8) formulának megfelelő teljes megoldását megkaphatjuk az előzőekben kifejtett rangesőkcentő eljárás véges iterációjával.

Ebből a célból írjuk a (7) egyenletet

$$(9) \quad \mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* \\ \mathbf{a}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad \text{vagy} \quad \begin{array}{l} \mathbf{a}_1^* \mathbf{X} = 0 \\ \mathbf{a}_2^* \mathbf{X} = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \mathbf{X} = 0 \end{array}$$

alakban.

Ezen egyenletek mindegyikét rangesőkcentő művelet segítségével fogjuk kielégíteni. Ez a módszer azokat az egyenleteket, amelyek a megelőzőknek következményei, automatikusan eliminálja.

Az (5) összefüggésnek megfelelően (kiindulva az egységmatrixból, vagyis $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ esetén) kiszámítjuk az

$$(10) \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^*},$$

$(n-1)$ -edrangú szimmetrikus projektort. \mathbf{X}_1 kielégíti (9) első egyenletét, amint arról közvetlenül meggyőződhetünk:

$$\mathbf{a}_1^* \mathbf{X}_1 = \mathbf{a}_1^* - \frac{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^*}.$$

Most két esetet kell megkülönböztetnünk:

1. Ha $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 = 0$ akkor $\mathbf{a}_2^* = \text{konst.} \cdot \mathbf{a}_1^*$ (mivel \mathbf{X}_1 $(n-1)$ -edrangú), azaz (9) második egyenlete az elsőnek következménye, ennél fogva elhagyható.

2. Ha $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \neq 0$ akkor mivel \mathbf{X}_1 pozitív szemidefinit, $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2 \neq 0$, s így a következő iterációs lépés

$$(11) \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - \frac{\mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1}{\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2}.$$

A (11) összefüggésből látható, hogy \mathbf{X}_2 kielégíti az $\mathbf{a}_1^* \mathbf{X}_2 = 0$ egyenletet. Ezenkívül \mathbf{X}_2 kielégíti (9) második egyenletét is, ami az

$$\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_2 = \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 - \mathbf{a}_2^* \frac{\mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1}{\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2}.$$

összefüggésből közvetlenül látható. Megjegyezzük, hogy $\mathbf{X}_2^2 = \mathbf{X}_2$, tehát \mathbf{X}_2 $(n-2)$ -edrangú szimmetrikus projektor.

Tegyük fel, hogy \mathbf{X}_k kielégíti az

$$\mathbf{a}_1^* \mathbf{X}_k = \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_k = \dots = \mathbf{a}_{\nu_k-1}^* \mathbf{X}_k = 0$$

egyenleteket és $\mathbf{a}_{\nu_k}^* \mathbf{X}_k \neq 0$, továbbá

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^*; \quad \mathbf{X}_k^2 = \mathbf{X}_k; \quad \varrho(\mathbf{X}_k) = n - k \quad (k = 1, 2, \dots, \nu_k).$$

Ekkor az általános iterációs lépés

$$(12) \quad \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \frac{\mathbf{X}_k \mathbf{a}_{\nu_k} \mathbf{a}_{\nu_k}^* \mathbf{X}_k}{\mathbf{a}_{\nu_k}^* \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k \mathbf{a}_{\nu_k}}$$

és \mathbf{X}_{k+1} kielégíti az

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_{k+1}^*; \quad \mathbf{X}_{k+1}^2 = \mathbf{X}_{k+1}, \quad \varrho(\mathbf{X}_{k+1}) = n - k - 1$$

összefüggéseket.

Ezzel tehát — figyelmen kívül hagyva azokat az egyenleteket, amelyek az előzőknek következményei — végül eljutunk ahhoz, az $(n - r)$ -edrangú \mathbf{X}_r szimmetrikus projektorhoz, amely valamennyi egyenletet kielégíti, azaz

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_r = 0, \quad \varrho(\mathbf{X}_r) = n - r.$$

E módszer geometriai interpretációja a következő. Az $\mathbf{A} \mathbf{X} = 0$ egyenlet megoldását megtalálni annyit jelent, mint meghatározni \mathbf{A} sorvektor-terének ortogonális komplementumát. Az első lépés (10) a teljes n -dimenziós vektorteret arra az $(n - 1)$ -dimenziós altérre redukálja, amely ortogonális az \mathbf{a}_1 vektorra. Ha \mathbf{a}_2^* nem párhuzamos \mathbf{a}_1^* -gyel, akkor a második iterációs lépés eredményeként olyan $(n - 2)$ -dimenziós altérre jutunk, amely ortogonális mind az \mathbf{a}_1^* , mind az \mathbf{a}_2^* vektorra. Végül r iterációs lépés után eljutunk \mathbf{A} sorvektor-terének ortogonális komplementumához.

Innen a (3) egyenlet általános megoldását közvetlenül

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_r \mathbf{t}$$

alakban nyerjük, ahol \mathbf{t} tetszőleges paraméter-vektor.

Érvényes tehát a következő

Tétel: Az

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^* \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_r^* \mathbf{x} \end{bmatrix} = 0, \quad \varrho(\mathbf{A}) = r$$

homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_r \mathbf{t}$$

szolgáltatja, ahol \mathbf{t} tetszőleges, \mathbf{A}_r pedig egy $(n - r)$ -edrangú szimmetrikus projektor, amely az

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \frac{\mathbf{X}_k \mathbf{a}_{v_k} \mathbf{a}_{v_k}^* \mathbf{X}_k}{\mathbf{a}_{v_k}^* \mathbf{X}_k \mathbf{a}_{v_k}}$$

iterációval nyerünk. Azok az $\mathbf{a}_{\mu}^* \mathbf{X} = 0$ egyenletek, amelyekre $\mu \neq v_k$, az előző egyenletek következményei és automatikusan eliminálódnak.

Abból a célból, hogy a (7) egyenlet lineárisan független megoldásainak egy teljes rendszerét megkapjuk, meg kell határozni az \mathbf{X}_r matrix

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^*; \quad \mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-r}]$$

bázisfaktorokra bontott alakját (ez legcélszerűbben a [2]-ben közölt eljárás segítségével valósítható meg). Ekkor, mivel \mathbf{A} szimmetrikus projektor, az $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-r}$ vektorok automatikusan eleget tesznek az $\mathbf{y}_i^* \mathbf{y}_j = \delta_{ij}$ összefüggésnek, tehát a (7) egyenlet lineárisan független megoldásainak egy ortonormált rendszerét alkotják.

Abból a célból, hogy az (1) reguláris inhomogén egyenletet megoldjuk, az

$$[\mathbf{A}, -\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_{n+1} \end{bmatrix} = 0$$

homogén egyenletnek azt a partikuláris megoldását kell megtalálnunk, amely eleget tesz az $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{1}$ feltételnek. Ez esetben azonban $\varrho[\mathbf{A}, -\mathbf{b}] = \varrho[\mathbf{A}] = = n$, $\varrho(\mathbf{Y}) = 1$, tehát \mathbf{Y}_n

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n+1} \end{bmatrix} [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}]$$

alakban írható, ahol $y_{n+1} \neq 0$ és ezzel (1) megoldására

$$x_1 = \frac{y_1}{y_{n+1}}; \quad x_2 = \frac{y_2}{y_{n+1}}; \quad \dots, \quad x_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}$$

adódik.

Ha az általunk bevezetett módszert más véges iterációs eljárásokkal hasonlítjuk össze, azt látjuk, hogy a szükséges műveletek száma ugyanolyan nagyságrendű, mint akár a Gauss-féle kiküszöböléses módszernél, akár a konjugált irányok módszerénél, továbbá úgy véljük, hogy ezen módszer teljes általánossága és a műveletek egyszerűsége miatt (csupán vektorok skaláris és diadikus szorzatát kell számítani) a nevezettek mellett is figyelmet érdemel.

Végül megjegyezzük, hogy az (5) összefüggésben, a diádokban szereplő oszlopvektorok, módszerünk egyéb alkalmazásainál, tetszőlegesen választhatók. Ez az eljárás pl. eredményesen felhasználható homogén lineáris diofantikus egyenletrendszerek iteratív megoldása során [7].

8. §. Példa

Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert az általános rangsökkentő eljárással :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ -6x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ugyanez matrixegyenletként felírva :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tekintettel arra, hogy megoldásként az ismeretlenek értékeire csupán viszonyszámokat kapunk, a számítás során fellépő törteket elkerülhetjük azáltal, hogy a (10), (11) és általában a (12) összefüggések jobboldalát a nevezővel végigszorozzuk. Ezzel tehát

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1 \mathbf{E} - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^* = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = (\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2) \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 = 8 \cdot \begin{bmatrix} 16 & 4 & -4 & 24 \\ 4 & 28 & 26 & 6 \\ -4 & 26 & 28 & -6 \\ 24 & 6 & -6 & 36 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{a}_3^* \mathbf{X}_2 = 0$ és $\mathbf{a}_4^* \mathbf{X}_2 = 0$, a megoldást $\mathbf{x} = \mathbf{Xt}$ alakban kapjuk, ahol \mathbf{t} tetszőleges vektor, és az \mathbf{X} mátrixot \mathbf{X}_2 diadikus felbontásának segítségével nyerjük:

$$\frac{1}{8} \mathbf{X}_2 = \mathbf{XX}^* = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása :

$$\begin{aligned} x_1 &= 4t_1 \\ x_2 &= t_1 + t_2 \\ x_3 &= -t_1 + t_2 \\ x_4 &= 6t_1 \end{aligned}$$

ahol t_1 és t_2 tetszőleges paraméterek.

IRODALOM

- [1] T. BANACHIEWICZ : „Méthode de résolution numérique des équations linéaires du calcul des déterminants et des inverses, et de réduction des formes quadratiques.” *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A., Sciences Math.* (1938) 393—404.
- [2] E. EGERVÁRY : „On a property of the projector matrices and its application to the canonical reduction of matrix functions.” *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) **15** (1953) 1—6.
- [3] EGERVÁRY J. : „Matrix-függvények kanonikus előállításáról és azok néhány alkalmazásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.
- [4] E. EGERVÁRY : „On a lemma of Stieltjes on matrices.” *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) **15** (1954) 99—103.
- [5] EGERVÁRY J. : „Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 11—32.
- [6] E. EGERVÁRY : „Über die Factorisation von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen.” *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **35** (1955) 111—118.
- [7] E. EGERVÁRY : „Auflösung homogenen linearen diophantischen Gleichungssystemen mit Hilfe von Projektormatrizen.” *Publicationes Mathematicae* (sajtó alatt).
- [8] Д. К. ФАДДЕЕВ—И. С. СОМИНСКИЙ : *Сборник задач высшей алгебре*. Гостехиздат, Москва, 1949. (2.-е изд.)
- [9] G. E. FORSYTHE : „Solving linear algebraic equations can be interesting.” *Bulletin of the American Mathematical Society* **59** (1953) 299—329.
- [10] M. R. HESTENES—E. STIEFEL : „Method of conjugate gradients for solving linear systems.” *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **49** (1952) 409—436.
- [11] G. SCHULZ : „Iterative Berechnung der reziproken Matrix.” *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **13** (1933) 57—59.
- [12] R. SOURIAU : „Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices.” *Comptes Rendus de l'Académie Sci. (Paris)* **227** (1948) 1010—1011.
- [13] R. ZURMÜHL : „Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme.” *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **29** (1949) 76—84.

(Beérkezett : 1956. II. 13.)

СТАРЫЕ И НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. ЭГЕРВАРИ

Резюме

Первая часть работы содержит короткое перечисление общеизвестных старых и новых методов решения систем линейных уравнений : методы, связанные с характеристическим уравнением матрицы, сходящиеся итерационные процессы, решение *конечной итерацией* (ГАУСС—БАНАХИЕВИЧ, ШТИФЕЛ—ХЕСТЕНЕС). Во второй части работы автор даёт общий метод понижения ранга, частным случаем которого являются большинство методов конечной итерации. Этот метод понижения ранга основывается на следующей теореме : Если из какой нибудь матрицы \mathbf{A} вычтёт *diady* \mathbf{bc}^* её ранг понизится на единицу в том и только в том случае, если \mathbf{bc}^* может быть записана в виде

$$\mathbf{bc}^* = \frac{\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A}}{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{u}}$$

где \mathbf{u} и \mathbf{v} любые векторы, удовлетворяющие условию $\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u} \neq 0$. С помощью этой теоремы автор разрабатывает простой новый метод решения наиболее общих систем линейных уравнений.

Этот метод непосредственно даёт ортогональное дополнение пространства, образованного стоящими в отдельных строках матрицы векторами.

OLD AND NEW METHODS FOR SOLVING LINEAR EQUATIONS

J. EGERVÁRY

Summary

The first part of the paper contains a short survey of generally known old and new methods for solving linear equations : methods related to the characteristic equation of the matrix, convergent iterative processes, finite iterations (GAUSS—BANACHIEWICZ, STIEFEL—HESTENES). In the second part of the paper the author develops a general rank-diminishing procedure, which contains most of the finite iterations, as particular cases. This rank-diminishing is founded on the following theorem : By the subtraction of a dyade \mathbf{bc}^* from a given matrix \mathbf{A} , the rank of \mathbf{A} decreases exactly by one if and only if \mathbf{bc}^* has the form

$$\mathbf{bc}^* = \frac{\mathbf{A} \mathbf{v} \mathbf{v}^* \mathbf{A}}{\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u}},$$

where \mathbf{u} and \mathbf{v} are arbitrary vectors subject only to the condition $\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u} \neq 0$.

By means of this theorem the author indicates a simple and new method for solving the most general system of linear equations. This method furnishes directly the orthogonal complement of the row-space of the given matrix.