EGERVÁRY J. HIPERMATRIX-ALGORITMUSÁNAK ALKALMAZÁSA TÖBBFÁZISÚ TRANSZFORMÁTOROK MATEMATIKAI VIZSGÁLATÁRA

LOVASS-NAGY VIKTOR

Bevezetés

Jelen dolgozat célja, hogy a matrix-elmélet néhány legújabb eredményének [1] felhasználásával keresse az egy- és többfázisú transzformátorokban fellépő stacionárius és tranziens villamos folyamatok matematikai leírására szolgáló differenciálegyenletrendszerek egységes és áttekinthető megoldását.

A tárgyalás általánossága végett feltételezzük, hogy a vizsgálandó transzformátor n fázisú, azaz $2n$ számú, adott ohmikus ellenállással és öninduktivitással bíró, egymással induktíve csatolt tekercsből álló rendszer. Feltételezzük továbbá, hogy úgy a transzformátor „primer oldal"-át alkotó n számú tekercs, mint a transzformátor „szekunder oldal"-ának tekintett n darab tekercs úgynevezett „csillag-kapcsolás"-ban vannak összekötve.[1)] Vezessük be a következő jelöléseket:

r_{pk} ... transzformátor primer oldalán levő k-adik tekercs ohmikus ellenállása,

r_{sk} ... a transzformátor szekunder oldalán levő k-adik tekercs ohmikus ellenállása,

l_{pkk} ... a transzformátor primer oldalán levő k-adik tekercs öninduktivitása,

l_{skk} ... a transzformátor szekunder oldalán levő k-adik tekercs öninduktivitása;

l_{pkl} ... a transzformátor primer oldalán levő k-adik és l-edik tekercsek közötti kölcsönös induktivitás,

l_{skl} ... a transzformátor szekunder oldalán levő k-adik és l-edik tekercsek közötti kölcsönös induktivitás,

1) A feltételezett „csillag-kapcsolás" esetére levezetett eredményekből az egyéb kapcsolás-típus esetére érvényes összefüggések már egyszerű számítás segítségével nyerhetők.

m_{kl} ... a transzformátor primer oldalán levő k-adik tekercs és a szekunder oldalon levő l-edik tekercs közötti kölcsönös induktivitás.

Jelöljük továbbá a primer oldal k-adik tekercsében folyó áramerősséget i_{pk}-val, a tekercs feszültségét pedig u_{pk}-val; hasonlóképpen jelöljük a szekunder oldal k-adik tekercsében folyó áramerősséget i_{sk}-val, a tekercs feszültségét pedig u_{sk}-val.

A transzformátor matrix-alakban felírt differenciálegyenletében szereplő matrixok a következők:

a) Oszlop-matrixok:

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_{p1}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{pn}(t) \\ i_{s1}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{sn}(t) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_{p1}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{pn}(t) \\ u_{s1}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{sn}(t) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{i}_0 = \begin{bmatrix} i_{p1}(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{pn}(0) \\ i_{s1}(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{sn}(0) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{p1}(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{pn}(0) \\ u_{s1}(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{sn}(0) \end{bmatrix}.$$

b) Kvadratikus matrixok:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{p1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{p2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & r_{pn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{s1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{s2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & r_{sn} \end{bmatrix} =$$

$$= \langle r_{p1}, r_{p2}, \dots, r_{pn}, r_{s1}, r_{s2} \dots, r_{sn} \rangle; \text{ (diagonál-matrix)};$$

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} l_{p11} & l_{p12} & \dots & l_{p1n} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ l_{p21} & l_{p22} & \dots & l_{p2n} & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{pn1} & l_{pn2} & \dots & l_{pnn} & m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \\ m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} & l_{s11} & l_{s12} & \dots & l_{s1n} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{n2} & l_{s21} & l_{s22} & \dots & l_{s2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} & l_{sn1} & l_{sn2} & \dots & l_{snn} \end{bmatrix}$$

(itt $l_{pjk}=l_{pkj}$, $l_{sjk}=l_{skj}$, $m_{jk}=m_{kj}$.)

Kirchhoff ,,második'' törvényéből [2] a primer oldal k-adik tekercsére, illetve a szekunder oldal k-adik tekercsére a következő összefüggések írhatók fel :

(1) $$r_{pk}i_{pk}+\sum_{\nu=1}^{n} l_{pk\nu}\frac{d}{dt}i_{p\nu}+\sum_{\nu=1}^{n} m_{k\nu}\frac{d}{dt}i_{s\nu}=u_{pk},$$

illetve

(2) $$r_{sk}i_{sk}+\sum_{\nu=1}^{n} l_{sk\nu}\frac{d}{dt}i_{s\nu}+\sum_{\nu=1}^{n} m_{k\nu}\frac{d}{dt}i_{p\nu}=u_{sk}.$$

Az (1), illetve (2) egyenleteket a primer és szekunder oldal valamennyi tekercsére képezve, egy állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, mely $2n$ darab egyenletből áll ; e differenciálegyenlet-rendszer a fenti jelölések felhasználásával a következő matrix-differenciálegyenletté foglalható össze :

(3) $$\mathbf{L}\frac{d}{dt}\boldsymbol{i}+\mathbf{R}\boldsymbol{i}=\boldsymbol{u}.$$

A továbbiak során feladatunkat a (3) lineáris, állandó együtthatós, inhomogén matrix-differenciálegyenletnek az $\boldsymbol{i}(0)=\boldsymbol{i}_0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldásának meghatározára képezi. E probléma megoldása tetszésszerinti elemekkel bíró ellenállás-, illetve induktivitás-matrix esetén is előállítható [3], különösen érdekes alakban állítható azonban elő a megoldás azon esetben, midőn a transzformátor felépítése olyan, hogy egyrészt a primer oldalon elhelyezett tekercsek anyagi és geometriai adatai azonosak, másrészt a szekunder oldal tekercsei is egyformák, továbbá a tekercsek elhelyezésében ciklikus szimmetria mutatkozik.[2)] Ez esetben ugyanis az ellenállás-, illetve az induktivitás-matrix a következő alakot nyeri (hipermatrix-alakban írva):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p \mathbf{E} & 0 \\ 0 & r_s \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

(itt $\mathbf{E}$ az n-edrendű egységmatrix); illetve

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L}_s \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{L}_p$, $\mathbf{L}_s$ és $\mathbf{M}$ mind n-edrendű ciklikus matrixok, tehát a következő alakban írhatók (lásd: [4], 451. oldal):

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(l_{p0}, l_{p1}, \ldots, l_{p(n-1)})\,; \quad l_{p\nu} = l_{p(n-\nu)}$$

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{L}_s(l_{s0}, l_{s1}, \ldots, l_{s(n-1)})\,; \quad l_{s\nu} = l_{s(n-\nu)}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(m_0, m_1, \ldots, m_{n-1})\,; \quad m_\nu = m_{n-\nu}\,.$$

Az alábbi tárgyalás során feltesszük, hogy a vizsgált „n-fázisú" transzformátor ilyen ciklikus szimmetriával bír. Feltesszük továbbá, hogy valamennyi tekercs feszültsége az időnek függvénye, éspedig ugyanazon periódussal bír, tehát $\boldsymbol{u} = e^{j\omega t}\boldsymbol{u}_0$ alakban írható.[3)]

1. §. A matrix-differenciálegyenlet megoldása

A (3) egyenlet — amelynek $\mathbf{L}$ és $\mathbf{R}$ együttható-matrixai, a fentiek értelmében, ciklikus blokkokból álló hipermatrixok, és $\boldsymbol{u} = e^{j\omega}\, \boldsymbol{u}_0$, — célszerű a következőképpen átalakítani:

$$\text{(4)} \qquad \frac{d}{dt}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i} + \sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i} = e^{j\omega t}\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\,(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\boldsymbol{u}_0.$$

Legyen $\mathbf{T}$ az a matrix, amelynek segítségével $\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}$ diagonál-alakra hozható (lásd: [1], 212. oldal), azaz amely kielégíti az alábbi egyenleteket:

$$\mathbf{T}(\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}})\,\mathbf{T}^* = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \mathbf{A}\,; \qquad \mathbf{T}\mathbf{T}^* = \mathbf{E}\,.$$

(Itt $\mathbf{T}^*$-on a $\mathbf{T}$ matrix *konjugált transzportáltja* értendő.)

[2)] A ciklikus szimmetria feltételezése kétfázisú transzformátor esetén minden további nélkül jogosult; háromfázisú transzformátor esetén pedig általában megengedhető (százalék nagyságrendű) elhanyagolás árán akkor is feltételezhető, ha a valóságban a traszformátor kialakítása nem bír ciklikus szimmetriával.

[3)] Az $\boldsymbol{u}_0$ oszlop-matrix komponensei komplex számok is lehetnek. A levezetendő eredmény valós része fogja szolgáltatni az adott elektrotechnikai feladat megoldását.

A **T** matrix segítségével a (4) egyenlet a következőképpen írható át:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i}+\mathbf{AT}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i}=e^{j\omega t}\mathbf{AT}\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}u_0. \tag{5}$$

Célszerű továbbá az $\boldsymbol{i}(0)=\boldsymbol{i}_0$ kezdeti feltételt $\mathbf{T}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i}(0)=\mathbf{T}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i}_0$ alakban írni. Bevezetve az $\boldsymbol{x}=\mathbf{T}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i}$ és a $\boldsymbol{g}=e^{j\omega t}\mathbf{AT}\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}u_0$ rövid jelöléseket, az (5) differenciálegyenletet és a hozzátartozandó kezdeti feltételt így is írhatjuk:

$$\dot{\boldsymbol{x}}+\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}\,; \qquad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0. \tag{6}$$

Nyilván a (6) inhomogén differenciálegyenletet és az $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ inhomogén kezdeti feltételt egyidejűleg kielégítő $\boldsymbol{x}(t)$ függvény $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ összegként állítható elő, ahol $\boldsymbol{x}_1$ kielégíti az $\dot{\boldsymbol{x}}_1+\mathbf{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{g}$ inhomogén differenciálegyenletet és az $\boldsymbol{x}_1(0)=0$ homogén kezdeti feltételt, továbbá $\boldsymbol{x}_2$ kielégíti az $\dot{\boldsymbol{x}}_2+\mathbf{A}\boldsymbol{x}_2=0$ homogén differenciálegyenletet és az $\boldsymbol{x}_2(0)=\boldsymbol{x}_0$ inhomogén kezdeti feltételt.

Az irodalomból ismeretes (lásd: [4], 212. oldal), hogy

$$\boldsymbol{x}_1=\int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\boldsymbol{g}(\tau)\,d\tau$$

és

$$\boldsymbol{x}_2=e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{x}_0.$$

Tehát (bevezetve a $\boldsymbol{g}=e^{j\omega t}\boldsymbol{g}_0$ jelölést) írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{x}=e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{x}_0+\left[\int_0^t e^{(\mathbf{A}+j\omega\mathbf{E})\tau}d\tau\right]e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{g}_0\,, \tag{7}$$

azaz, az integrálás elvégzése és kis átalakítása után

$$\boldsymbol{x}=e^{j\omega t}(j\omega\mathbf{E}+\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{g}_0+e^{-\mathbf{A}t}\left[\boldsymbol{x}_0-(j\omega\mathbf{E}+\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{g}_0\right]. \tag{8}$$

Minthogy $\boldsymbol{x}=\mathbf{T}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i}$, tehát $\boldsymbol{i}=\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}\mathbf{T}^*\boldsymbol{x}$, azaz:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}=&\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}\mathbf{T}^*e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{T}\sqrt{\mathbf{R}}\,\boldsymbol{i}_0-\\&-\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}\mathbf{T}^*\left[\mathbf{A}(j\omega\mathbf{E}+\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E}\cdot e^{j\omega t}-e^{-\mathbf{A}t})\right]\mathbf{T}\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}u_0.\end{aligned} \tag{9}$$

2. §. A levezetett megoldás alkalmazása az egyfázisú transzformátorra

Annak érdekében, hogy a fentiekben levezetett (9) összefüggésnek az n-fázisú transzformátorra való alkalmazása során nyert eredmény értékeléséhez összehasonlítási anyaggal rendelkezünk, mindenekelőtt bemutatjuk a (9) képletnek az egyfázisú transzformátorra való alkalmazását.

Az egyfázisú transzformátor esetében nyilván:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_p & m \\ m & l_s \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix}.$$

Ez esetben tehát

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} = \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} l_s & -m \\ -m & l_p \end{bmatrix},$$

továbbá

$$\sqrt{\mathbf{R}}\, \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} = \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_s & -m \\ -m & l_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} r_p l_s & -\sqrt{r_p r_s}\, m \\ -\sqrt{r_p r_s}\, m & r_s l_p \end{bmatrix}.$$

Az $\sqrt{\mathbf{R}}\, \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$ matrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{(l_p l_s - m^2)} \, \frac{r_p l_s + r_s l_p \mp \sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}}{2},$$

az $\sqrt{\mathbf{R}}\, \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$ matrix sajátvektorainak komponensei pedig például a következőképpen írhatók:[4]

$$\gamma = \cos \frac{\varphi}{2}, \qquad \sigma = \sin \frac{\varphi}{2},$$

ahol

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2 m \sqrt{r_p r_s}}{r_p l_s - r_s l_p}.$$

Az $\sqrt{\mathbf{R}}\, \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$ matrix sajátértékeinek és sajátvektorainak ismeretében írhatjuk, hogy

$$\sqrt{\mathbf{R}}\, \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}.$$

[4] Az itt felhasznált összefüggések helyessége a

$$\begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}$$

szorzat kiszámítása és λ_1, λ_2, γ, σ értékeinek behelyettesítése által egyszerűen igazolható.

Az egyfázisú transzformátor esetében tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix}.$$

Minthogy az **A** matrixnak bármely polinomja vagy hatványsorba fejthető függvénye a következő alakban írható:

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

tehát

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{T}^* f(\mathbf{A})\,\mathbf{T}\,(\sqrt{\mathbf{R}}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2) & -\sqrt{\dfrac{r_s}{r_p}}\,\gamma\sigma\,[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \\ -\sqrt{\dfrac{r_p}{r_s}}\,\gamma\sigma\,[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] & \sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2) \end{bmatrix}.$$

Ez az összefüggés még a következőképpen is írható: minthogy

$$\gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2) = \frac{1+\cos\varphi}{2} f(\lambda_1) + \frac{1-\cos\varphi}{2} f(\lambda_2) =$$

$$= \frac{1}{2}[f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] + \frac{\cos\varphi}{2}[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)],$$

továbbá

$$\sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2) = \frac{1-\cos\varphi}{2} f(\lambda_1) + \frac{1+\cos\varphi}{2} f(\lambda_2) =$$

$$= \frac{1}{2}[f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] - \frac{\cos\varphi}{2}[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)];$$

és $\gamma\sigma = \dfrac{1}{2}\sin\varphi$, tehát

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\,\mathbf{T}\,f(\mathbf{A})\,\mathbf{T}^*\,(\sqrt{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2}[f(\lambda_1)+f(\lambda_2)]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2}[f(\lambda_1)-f(\lambda_2)]\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sqrt{\frac{r_s}{r_p}}\sin\varphi\\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}}\sin\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[f(\lambda_1)+f(\lambda_2)]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} -\right.$$

$$\left. -[f(\lambda_1)-f(\lambda_2)]\frac{1}{\sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4r_p r_s m^2}}\begin{bmatrix}r_p l_s - r_s l_p & -2r_s m\\ -2r_p m & r_s l_p - r_p l_s\end{bmatrix}\right\}.$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\,\mathbf{T}\,f(\mathbf{A})\,\mathbf{T}^*\,(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & \sigma\\ -\sigma & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & -\sigma\\ \sigma & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{r_p}}[\gamma^2(\lambda_1)+\sigma^2 f(\lambda_2)] & -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}}\gamma\sigma[f(\lambda_1)-f(\lambda_2)]\\ -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}}\gamma\sigma[f(\lambda_1)-f(\lambda_2)] & \frac{1}{r_s}[\sigma^2 f(\lambda_1)+\gamma^2 f(\lambda_2)]\end{bmatrix};$$

amely összefüggés a γ, σ és φ között fennálló, fentebb felsorolt identitások figyelembevételével a következőképpen alakítható át:

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\,\mathbf{T}\,f(\mathbf{A})\,\mathbf{T}^*\,(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} = \frac{1}{2}[f(\lambda_1)+f(\lambda_2)]\begin{bmatrix}\frac{1}{r_p} & 0\\ 0 & \frac{1}{r_s}\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2}[f(\lambda_1)-f(\lambda_2)]\begin{bmatrix}\frac{1}{r_p}\cos\varphi & -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}}\sin\varphi\\ -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}}\sin\varphi & -\frac{1}{r_s}\cos\varphi\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \frac{1}{\sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p}(r_p l_s - r_s l_p) & -2m \\ -2m & \frac{1}{r_s}(r_s l_p - r_p l_s) \end{bmatrix} \right\}$$

A $(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* \sqrt{\mathbf{R}}$, továbbá $(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}$ itt levezetett kifejezéseit felhasználva, az (9) képletből az egyfázisú transzformátor tekercseiben fellépő áramokra a következő matrix-összefüggést nyerjük:

$$\begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ [e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}] \frac{1}{d} \begin{bmatrix} r_p l_s - r_s l_p & -2 r_s m \\ -2 r_p m & r_s l_p - r_p l_s \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda_1}{j\omega + \lambda_1} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{\lambda_2}{j\omega + \lambda_2} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_2 t}) \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} + \right.$$

$$+ \left[\frac{\lambda_1}{j\omega + \lambda_2} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_1 t}) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\lambda_2}{j\omega + \lambda_2} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_2 t}) \right] \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p}(r_p l_s - r_s l_p) & -2m \\ -2m & \frac{1}{r_s}(r_s l_p - r_p l_s) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix}$$

(A rövidebb és áttekinthetőbb írásmód végett bevezettük a

$$d = \sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}$$

rövidítést.)

Abban a speciális esetben, amikor a transzformátor primer és szekunder oldala egyforma, azaz $r_p = r_s = r$ és $l_p = l_s = l$, nyilván

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{l^2 - m^2} \frac{2rl \mp 2rm}{2}; \quad \lambda_1 = \frac{r}{l+m}; \quad \lambda_2 = \frac{r}{l-m};$$

továbbá

$$d = 2\,rm,$$

tehát[5])

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Bigg\{ & \left[e^{-\frac{r}{l-m}t} + e^{-\frac{r}{l+m}t}\right]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \\
& + \left[e^{-\frac{r}{l-m}t} + e^{-\frac{r}{l+m}t}\right]\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\Bigg\}\begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{2}\Bigg\{\Bigg[\frac{r - j\omega(l-m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t}\right) + \\
& + \frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l-m)^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t}\right)\Bigg]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \\
& - \Bigg[\frac{r - j\omega(l-m)}{r^2 + \omega^2(l-m)^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t}\right) - \\
& - \frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l+m}t}\right)\Bigg]\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\Bigg\}\begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

---

[5]) Például a megegyező primer és szekunder oldallal bíró egyfázisú transzformátor „rövidzárási áramait'' a (10) képletből $u_{p0} = U_0 e^{j\psi}$, $u_{s0} = 0$, $i_{p0} = I_0\, e^{j\psi}$, $i_{s0} = 0$ helyettesítéssel nyerhetjük. (Ez esetben tehát a primer feszültséget $U_0 e^{j\omega t}$, a primer feszültséggel megegyező fázisú mágnesezési áramot pedig $I_0 \exp(j\omega t)$ alakban írjuk; a szekunder oldal rövidzárásának pillanatában a primer feszültség és a mágnesezési áram fázisszöge : ψ.) Ha r-et — az irodalomban szokásos módon — induktivitásokhoz képest elhanyagolhatóan kicsinynek tekintjük, a *rövidzárási* áramokra a következő képletek adódnak :

$$
\begin{aligned}
i_{pr} = & \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{r}{l-m}t} + e^{-\frac{r}{l+m}t}\right) I_0\, e^{j\psi} - 2j\,\frac{U_0}{\omega\, l\left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)}\, e^{j(\omega t + \psi)} + \\
& + \left(\frac{l+m}{l}\, e^{-\frac{r}{l-m}t} - \frac{l-m}{l}\, e^{-\frac{r}{l-m}t}\right) j\, \frac{U_0}{\omega\, l\left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)}\, e^{j\psi} :
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_{sr} = & -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{r}{l-m}t} - e^{-\frac{r}{l+m}t}\right) I_0\, e^{j\psi} + 2\,\frac{m}{l}\, j\,\frac{U_0}{\omega\, l\left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)}\, e^{j(\omega t + \psi)} - \\
& - \left(\frac{l+m}{l}\, e^{-\frac{r}{l-m}t} - \frac{l-m}{l}\, e^{-\frac{r}{l+m}t}\right) j\, \frac{U_0}{\omega\, l\left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)}\, e^{j\psi},
\end{aligned}
$$

Ezek a képletek olyan alakra hozhatók, amelyek megegyeznek a *Handbuch der Physik*

3. §. A levezetett megoldás alkalmazása többfázisú transzformátorokra

Abban az esetben, ha a vizsgált „n-fázisú" transzformátor a fentebb vázolt ciklikus szimmetriával bír, tehát a **L** és **R** matrixok ciklikus blokkokból álló hipermatrixok, a (9) összefüggésből az alábbiakban vázolt módon olyan képletet nyerhetünk, amely az egyfázisú transzformátorra fentebb levezetett eredménnyel figyelemreméltó analógiát mutat.

Ez esetben ugyanis (lásd: [1], 215. oldal, (9)):

$$\mathbf{L}^{-1} = \operatorname{adj}\mathbf{L}\,(\det\mathbf{L}\cdot\times\mathbf{E})^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{L}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s(\mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & -\mathbf{M}(\mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \\ -\mathbf{M}(\mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & \mathbf{L}_p(\mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Továbbá

$$\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r_p\,\mathbf{L}_s(\mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & -\sqrt{r_p r_s}\,\mathbf{M}(\mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \\ -\sqrt{r_p r_s}\,\mathbf{M}(\mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & r_s\mathbf{L}_p(\mathbf{L}_p\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Minthogy $\mathbf{L}_p$, $\mathbf{L}_s$ és **M** mind ciklikus matrixok, e matrixok sajátértékei

---

XVII. kötetének 359. oldalán található (26) és (27) jelű képletekkel, ha bevezetjük az

$$I_{pr} = \frac{U_0}{j\omega l\left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)} = -j\,\frac{U_0}{\omega l\left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)}$$

és

$$I_{sr} = -\frac{m}{l}\,I_{pr}$$

jelöléseket a rövidzárási áramok stacionárius értékei számára és felhasználjuk az $\frac{m}{l+m} \cong \frac{1}{2}$ közelítést. Ez esetben ugyanis az általunk levezetett képletek a következő alakot öltik:

$$i_{pr} = I_{pr}\left[e^{j(\omega t+\psi)} - \frac{m}{l}\,e^{j\psi}\,e^{-\frac{r}{l-m}t}\right] + \frac{1}{4}\,I_0\,e^{j\psi}\,e^{-\frac{r}{l+m}t}$$

$$i_{sr} = I_{sr}\left[e^{j(\omega t+\psi)} - e^{j\psi}\,e^{-\frac{r}{l-m}t}\right] + \frac{1}{4}\,I_0\,e^{j\psi}\,e^{-\frac{r}{l+m}t}$$

Ha még bevezetjük az áramerősségek „effektív értékei"-nek jelölésére az $I_{0\,eff} = J_0$, $I_{1k\,eff} = J_{1k}$ $I_{2k\,eff} = J_{2k}$ jelöléseket, az általunk levezetett képletek valós része megadja a *Handbuch der Physik* idézett képleteit:

$$\mathcal{Re}(i_{pr}) = \sqrt{2}\,J_{1k}\left[\cos(\omega t + \psi) - \frac{m}{l}\cos\psi\,e^{-\frac{r}{l-m}t}\right] + \frac{\sqrt{3}}{4}\,J_0\cos\psi\,e^{-\frac{r}{l+m}t};$$

$$\mathcal{Re}(i_{sr}) = \sqrt{2}\,J_{2k}\left[\cos(\omega t + \psi) - \psi\,e^{-\frac{r}{l-m}}\right] + \frac{\sqrt{2}}{4}\,J_0\cos\psi\,e^{-\frac{r}{l+m}t}$$

az ismert módon (lásd: [1], 218. oldal) a következőképpen nyerhetők:

$\mathbf{L}_p$ k-adik sajátértéke: $\lambda_{pk} = l_{p0} + l_{p1}\,\omega_k + \ldots + l_{p(n-1)}\,\omega_k^{n-1}$;
$\mathbf{L}_s$ k-adik sajátértéke: $\lambda_{sk} = l_{s0} + l_{s1}\,\omega_k + \ldots + l_{s(n-1)}\,\omega_k^{n-1}$;
$\mathbf{M}$ k-adik sajátértéke: $\mu_k = m_0 + m_1\,\omega_k + \ldots + m_{n-1}\,\omega_k^{n-1}$;

ahol $\omega_k = e^{2k\pi j/n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, azaz az „$n$-edik egységgyökök" közül a k-adik.

A $\mathbf{L}_p$, $\mathbf{L}_s$ és $\mathbf{M}$ sajátértékeinek ismeretében[6)] írhatjuk, hogy

$$\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}} = \frac{1}{n}\left[\begin{array}{c:c} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r_p\lambda_{sk}}{\lambda_{pk}\lambda_{sk}-\mu_k^2}\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1,\overline{\omega}_k,\ldots,\overline{\omega}_k^{n-1}] & \displaystyle -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{r_p r_s}\,\mu_k}{\lambda_{pk}\lambda_{sk}-\mu_k^2}\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1,\overline{\omega}_k,\ldots,\overline{\omega}_k^{n-1}] \\ \hdashline \displaystyle -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{r_p r_s}\,\mu_k}{\lambda_{pk}\lambda_{sk}-\mu_k^2}\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1,\overline{\omega}_k,\ldots,\overline{\omega}_k^{n-1}] & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r_p\lambda_{pk}}{\lambda_{pk}\lambda_{sk}-\mu_k^2}\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1,\overline{\omega}_k,\ldots,\overline{\omega}_k^{n-1}] \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda_{pk}\lambda_{sk}-\mu_k^2}\begin{bmatrix} r_p\lambda_{sk} & -\sqrt{r_p r_s}\,\mu_k \\ -\sqrt{r_p r_s}\,\mu_k & r_s\lambda_{pk}\end{bmatrix}\cdot\times\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1,\overline{\omega}_k,\ldots,\overline{\omega}_k^{n-1}]$$

A továbbiakban szükségünk lesz azon $\mathbf{T}$, illetve $\mathbf{T}^*$ matrixokra, amelyekkel a $\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}$ matrixot balról, illetve jobbról megszorozva, a $\mathbf{T}\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{T}^*$ szorzat-matrix *diagonál-matrix* lesz. E $\mathbf{T}$, illetve $\mathbf{T}^*$ matrixok a következőképpen állíthatók elő (lásd [1], 218. oldal):

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^*\mathbf{P}^*(\mathbf{U}^* \cdot\times \mathbf{E}_2),$$

illetve

$$\mathbf{T}^* = (\mathbf{U} \cdot\times \mathbf{E}_2)\,\mathbf{P}\mathbf{V}.$$

[6)] Ugyanis, ha $\mathbf{C}_1$ és $\mathbf{C}_2$ tetszés szerinti ciklikus matrixok, nyilván:

$$f_1(\mathbf{C}_1)\,f_2(\mathbf{C}_2) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_1(\lambda_{1k})\,f_2(\lambda_{2k})\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1,\overline{\omega}_k,\ldots,\overline{\omega}_k^{n-1}]$$

ahol λ_{1k}, illetve λ_{2k} a $\mathbf{C}_1$, illetve $\mathbf{C}_2$ matrix k-adik sajátértéke.

Jelen esetben:[7]

$$\mathbf{U} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-1} \\ 1 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_{n-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ha bevezetjük (a rövidebb és áttekinthetőbb írásmód végett) a következő rövidítéseket:

$$\frac{r_p \lambda_{sk}}{\lambda_{pk}\lambda_{sk} - \lambda_k^2} = \varphi_k$$

$$-\frac{\sqrt{r_p r_s}\,\mu_k}{\lambda_{pk}\lambda_{sk} - \mu_k^2} = \varrho_k$$

$$\frac{r_s \lambda_{pk}}{\lambda_{pk}\lambda_{sk} - \mu_k^2} = \psi_k$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$(\mathbf{U}^* \cdot\times \mathbf{E}_2)\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\,(\mathbf{U}\cdot\times \mathbf{E}_2) =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} \varphi_0 & 0 & \dots & 0 & \varrho_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & \varrho_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \varrho_{n-1} \\ \hline \varrho_0 & 0 & \dots & 0 & \psi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varrho_1 & \dots & 0 & 0 & \psi_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varrho_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \psi_{n-1} \end{array}\right]$$

[7] Ugyanis $\mathbf{T}^*$ a $\mathbf{T}$ matrix *konjugált* transzponáltját jelenti!

Továbbá :

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\0\end{bmatrix}[1\ 0] & \begin{bmatrix}0\\1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\0\end{bmatrix}[1\ 0] & \dots & \begin{bmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\1\end{bmatrix}[1\ 0] \\ \begin{bmatrix}1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\0\end{bmatrix}[0\ 1] & \begin{bmatrix}0\\1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\0\end{bmatrix}[0\ 1] & \dots & \begin{bmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\1\end{bmatrix}[0\ 1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \dots & \mathbf{P}_{1n}\\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \dots & \mathbf{P}_{2n}\end{bmatrix}.$$

(Jelen esetben $\mathbf{P}$ olyan hipermatrix, amelynek $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \dots$ blokkjai diadikus szorzatok. E diádok oszlop-vektorai n eleműek ; maga a $\mathbf{P}$ hipermatrix $2n$ blokkból, azaz két sorból és n oszlopból áll.)

Amint egyszerű matrix-aritmetikai számítással igazolható :

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{U}^*\cdot\times\mathbf{E}_2)\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\,(\mathbf{U}\cdot\times\mathbf{E}_2)\,\mathbf{P}=$$

$$=\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} \varphi_0 & \varrho_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \varrho_0 & \psi_0 & 0 & 0 & & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \varphi_1 & \varrho_1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varrho_1 & \psi_1 & & 0 & 0\\ \hline \dots & & \dots & & \dots & \dots & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_{n-1} & \varrho_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \varrho_{n-1} & \varphi_{n-1} \end{array}\right]=$$

$$=\left\langle \begin{bmatrix}\varphi_0 & \varrho_0\\ \varrho_0 & \psi_0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\varphi_1 & \varrho_1\\ \varrho_1 & \psi_1\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}\varphi_{n-1} & \varrho_{n-1}\\ \varrho_{n-1} & \psi_{n-1}\end{bmatrix}\right\rangle.$$

E diagonál-hipermatrix fődiagonálisában álló másodrendű kvadratikus matrixok bármelyike előállítható

$$\begin{bmatrix} \varphi_k & \varrho_k \\ \varrho_k & \psi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_k & \sigma_k \\ -\sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^*_{k1} & 0 \\ 0 & \lambda^*_{k2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_k & -\sigma_k \\ \sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}$$

alakban, ahol

$$\lambda^*_{k1}, \lambda^*_{k2} = \frac{1}{\lambda_{pk}\lambda_{sk} - \mu_k^2} \, \frac{r_p \lambda_{sk} + r_s \lambda_{pk} \mp \sqrt{(r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk})^2 + 4 r_p r_s \mu_k^2}}{2}$$

jelenti a

$$\begin{bmatrix} \varphi_k & \varrho_k \\ \varrho_k & \psi_k \end{bmatrix}$$

matrix sajátértékeit, és $\gamma_k = \cos \alpha_k/2$; $\sigma_k = \sin \alpha_k/2$ jelentik a szóbanforgó matrix sajátvektorainak komponenseit. Itt

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{-2\mu_k \sqrt{r_p r_s}}{r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}}.$$

Tehát jelen esetben $\mathbf{V} = \langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_{n-1} \rangle$, ahol

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \gamma_k & -\sigma_k \\ \sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}^*_k = \begin{bmatrix} \gamma_k & \sigma_k \\ -\sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{V}^*\mathbf{P}^*(\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_2) \sqrt{\mathbf{R}}\, \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}\, (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_2)\, \mathbf{P}\, \mathbf{V} =$$

$$= \Big\langle \langle \lambda^*_{01}, \lambda^*_{02} \rangle, \langle \lambda^*_{11}, \lambda^*_{12} \rangle, \ldots, \langle \lambda_{n-1,1}, \lambda_{n-1,2} \rangle \Big\rangle = \mathbf{A}.$$

Ezen $\mathbf{A}$ matrix bármely polinomja, vagy hatványsorba fejthető függvénye

$$f(\mathbf{A}) = \Big\langle \langle f(\lambda^*_{01}), f(\lambda^*_{02}) \rangle, \ldots, \langle f(\lambda^*_{n-1,1}), f(\lambda^*_{n-1,2}) \rangle \Big\rangle$$

alakba írható, tehát:

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\, \mathbf{T}^* f(\mathbf{A})\, \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}}) =$$

$$= (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\, \mathbf{T}^* \Big\langle \langle f(\lambda^*_{01}), f(\lambda^*_{02}) \rangle, \ldots, \langle f(\lambda^*_{n-1,1}), f(\lambda^*_{n-1,2}) \rangle \Big\rangle\, \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}}\,.$$

A továbbiak során feladatunkat a $(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\, \mathbf{T}^* f(\mathbf{A})\, \mathbf{T}(\sqrt{\mathbf{R}})$ szorzat kiszámítása képezi.

Nyilvánvaló, hogy

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{T}^* =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}}\mathbf{E}_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_p}}\mathbf{E}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \ldots, \mathbf{P}_{1n} \\ \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \ldots, \mathbf{P}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{V}_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}}\mathbf{U} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}}\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{12}\mathbf{V}_1 & \ldots & \mathbf{P}_{1n}\mathbf{V}_{n-1} \\ \mathbf{P}_{21}\mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{22}\mathbf{V}_1 & \ldots & \mathbf{P}_{2n}\mathbf{V}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Továbbá

$$\mathbf{T}\sqrt{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0^* & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_1^* & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{V}_{n-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^* & \mathbf{P}_{21}^* \\ \mathbf{P}_{12}^* & \mathbf{P}_{22}^* \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{P}_{1n}^* & \mathbf{P}_{2n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^* & 0 \\ 0 & \mathbf{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p}\mathbf{E}_n & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s}\mathbf{E}_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0^*\mathbf{P}_{11}^* & \mathbf{V}_0^*\mathbf{P}_{21}^* \\ \mathbf{V}_1^*\mathbf{P}_{12}^* & \mathbf{V}_1^*\mathbf{P}_{22}^* \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{V}_{n-1}^*\mathbf{P}_{1n}^* & \mathbf{V}_{n-1}^*\mathbf{P}_{2n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p}\mathbf{U}^* & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s}\mathbf{U}^* \end{bmatrix}.$$

Nyilván

$$\mathbf{P}\mathbf{V}f(\mathbf{A})\mathbf{V}^*\mathbf{P}^* =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{12}\mathbf{V}_1 & \ldots & \mathbf{P}_{1n}\mathbf{V}_{n-1} \\ \mathbf{P}_{21}\mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{22}\mathbf{V}_1 & \ldots & \mathbf{P}_{2n}\mathbf{V}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_{01}^*) & 0 \\ 0 & f(\lambda_{02}^*) \end{bmatrix} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \ldots & \begin{bmatrix} f(\lambda_{n-1,1}^*) & 0 \\ 0 & f(\lambda_{n-1,2}^*) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0^*\mathbf{P}_{11}^* & \mathbf{V}_0^*\mathbf{P}_{21}^* \\ \mathbf{V}_1^*\mathbf{P}_{12}^* & \mathbf{V}_1^*\mathbf{P}_{22}^* \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{V}_{n-1}^*\mathbf{P}_{1n}^* & \mathbf{V}_{n-1}^*\mathbf{P}_{2n}^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0^2 f(\lambda_{01}^*) + \sigma_0^2 f(\lambda_{02}^*) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \ldots & \gamma_{n-1}^2 f(\lambda_{n-1,2}^*) + \sigma_{n-1}^2 f(\lambda_{n-1,2}^*) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\gamma_0\sigma_0[f(\lambda_{01}^*) - f(\lambda_{02}^*)] & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \ldots & -\gamma_{n-1}\sigma_{n-1}[f(\lambda_{n-1,1}^*) - f(\lambda_{n-1,2}^*)] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\gamma_0\sigma_0[f(\lambda_{01}^*) - f(\lambda_{02}^*)] & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \ldots & -\gamma_{n-1}\sigma_{n-1}[f(\lambda_{n-1,1}^*) - f(\lambda_{n-1,2}^*)] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sigma_0^2 f(\lambda_{01}^*) + \gamma_0^2 f(\lambda_{02}^*) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \ldots & \sigma_{n-1}^2 f(\lambda_{n-1,1}^* + \gamma_{n-1}^2 f(\lambda_{n-1,2}^*) \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}}\mathbf{U} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}}\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p}\mathbf{U}^* & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s}\mathbf{U}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}\mathbf{D}_{11}\mathbf{U}^* & \sqrt{\frac{r_s}{r_p}}\mathbf{U}\mathbf{D}_{12}\mathbf{U}^* \\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}}\mathbf{U}\mathbf{D}_{12}\mathbf{U}^* & \mathbf{U}\mathbf{D}_{22}\mathbf{U}^* \end{bmatrix}$$

Ha $\mathbf{D} = \langle d_0, d_1, \ldots, d_{n-1} \rangle$ tetszésszerinti diagonál-matrix és

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{n}} [\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}],$$

továbbá

$$\mathbf{U}^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_0^* \\ \boldsymbol{u}_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{u}_{n-1}^* \end{bmatrix},$$

ahol

$$\boldsymbol{u}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u}_k^* = [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}];$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{U}\,\mathbf{D}\,\mathbf{U}^* = \frac{1}{n} [\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}] \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \ldots & d_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{u}_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_k^*.$$

Tehát a szóbanforgó matrix-szorzat végeredményben így írható (analógiában az egyfázisú transzformátornál levezetett megfelelő összefüggéssel):

$$(\sqrt{\mathbf{R}})'\,(\mathbf{U} \times \mathbf{E}_2)\,\mathbf{P}\mathbf{V}\,f(\mathbf{A})\,\mathbf{V}^*\mathbf{P}^*(\mathbf{U}^* \times \mathbf{E}_2)\sqrt{\mathbf{R}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} [\gamma_k^2 f(\lambda_{k1}^*) + \sigma_k^2 f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}] & -\sqrt{\frac{r_s}{r_p}}\,\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}] \\ -\sqrt{\frac{r_p}{r_s}}\,\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}] & \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} [\sigma_k^2 f(\lambda_{k1}^*) + \gamma_k^2 f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}] \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \gamma_k^2 f(\lambda_{k1}^*) + \sigma_k^2 f(\lambda_{k2}^*) & -\sqrt{\frac{r_s}{r_p}}\,\gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}}\,\gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] & \sigma_k^2 f(\lambda_{k1}^*) + \gamma_k^2 f(\lambda_{k2}^*) \end{bmatrix} \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \omega_k^{n-1}]$$

Vagy felhasználva a „direkt szorzat" írásmód által nyújtott lehetőséget az eredmény áttekinthetőbbé tételére:

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{T}\,f(\mathbf{A})\,\mathbf{T}^*\sqrt{\mathbf{R}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{[f(\lambda_{k1}^*)+f(\lambda_{k2}^*)]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. -[f(\lambda_{k1}^*)-f(\lambda_{k2}^*)]\frac{1}{\sqrt{(r_p\lambda_{sk}-r_s\lambda_{pk})^2+4\,r_p r_s \mu_k^2}}\begin{bmatrix} r_p\lambda_{sk}-r_s\lambda_{pk} & -2\,r_s\mu_k\\ -2\,r_p\mu_k & r_s\lambda_{pk}-r_p\lambda_{sk}\end{bmatrix}\right\}\cdot\times$$

$$\cdot\times\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1,\bar{\omega}_k,\ldots,\bar{\omega}_k^{n-1}]\,.$$

A fenti részletes levezetésben közölt számításokkal teljesen analóg módon adódik, hogy

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{T}\,f(\mathbf{A})\,\mathbf{T}^*\,(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{[f(\lambda_{k1}^*)+f(\lambda_{k2}^*)]\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}}\end{bmatrix} - \right.$$

$$-[f(\lambda_{k1}^*)-f(\lambda_{k2}^*)]\frac{1}{\sqrt{(r_p\lambda_{sk}-r_s\lambda_{pk})^2+4\,r_s r_p\mu_k^2}}\cdot$$

$$\left.\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{r_p}(r_p\lambda_{sk}-r_s\lambda_{pk}) & -2\mu_k\\ -2\mu_k & \frac{1}{r_s}(r_s\lambda_{pk}-r_p\lambda_{sk})\end{bmatrix}\right\}\cdot\times\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1,\bar{\omega}_k,\ldots,\bar{\omega}_k^{n-1}]\,.$$

Tehát a (9) képlet az „n-fázisú" transzformátor esetén az alábbi alakot nyeri (teljes analógiában az egyfázisú transzformátorra levezetett megfelelő képlettel):

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_p\\ \boldsymbol{i}_s\end{bmatrix} = \left\{\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{[e^{-\dot{\lambda}_{k1}t}+e^{-\dot{\lambda}_{k2}t}]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \right.\right.$$

$$- [e^{-\lambda_{k1}^{*} t} - e^{-\lambda_{k2}^{*}}] \frac{1}{d_k^*} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk} & -2 r_s \mu_k \\ -2 r_p \mu_k & r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk} \end{bmatrix} \Bigg\} \cdot \times$$

$$\cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}] \Bigg\} \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} + \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left[\frac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} + \left[\frac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{d_k^*} \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) & -2 \mu_k \\ -2 \mu_k & \frac{1}{r_s} (r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk}) \end{bmatrix} \right] \Bigg\} \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}] \Bigg\} \cdot \begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix} .$$

Minthogy további tetszésszerinti $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ matrix esetén fennállnak az alábbi azonosságok:

$$[\mathbf{K} \cdot \times (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^*)]\, \boldsymbol{i}_0 = \begin{bmatrix} k_{11} \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^* & k_{12} \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^* \\ k_{21} \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^* & k_{22} \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_{p0} \\ \boldsymbol{i}_{s0} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^* \boldsymbol{i}_{p0}) + k_{12} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^* \boldsymbol{i}_{s0}) \\ k_{21} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^* \boldsymbol{i}_{p0}) + k_{22} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^* \boldsymbol{i}_{s0}) \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^* \boldsymbol{i}_{p0} \\ \boldsymbol{u}^* \boldsymbol{i}_{s0} \end{bmatrix} \right\} \cdot \times \boldsymbol{u}$$

tehát az „n-fázisú" transzformátor fenti képletet a következő alakba is írható:

$$
(11)\quad
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_p \\ \boldsymbol{i}_s \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left\{ \left[(e^{-\lambda_{k1}^* t} + e^{-\lambda_{k2}^* t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right.\right. \\[2ex]
- (e^{-\lambda_{k1}^* t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \dfrac{1}{d_k^*} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk} & -2 r_s \mu \\ -2 r_p \mu_k & r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk} \end{bmatrix} \Bigg] \cdot \begin{bmatrix} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_k^\nu I_{p,\nu+1} \\ \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_k^\nu I_{s,\nu+1} \end{bmatrix} - \\[2ex]
- \left[\left(\dfrac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) + \dfrac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right) \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{p_s} \end{bmatrix} + \right. \\[2ex]
+ \left(\dfrac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) - \dfrac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right) \dfrac{1}{d_k^*} \cdot \\[2ex]
\left. \left. \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r_p} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) & -2 \mu_k \\ -2 \mu_k & \dfrac{1}{r_s} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_k^\nu U_{p,\nu+1} \\ \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_k^\nu U_{s,\nu+1} \end{bmatrix} \right] \right\} \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}.
\end{cases}
$$

Itt

$$
\boldsymbol{i}_{p0} = \begin{bmatrix} I_{pn} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{pn} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{i}_{s0} = \begin{bmatrix} I_{s1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{sn} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u}_{p0} = \begin{bmatrix} U_{p1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{pn} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u}_{s0} = \begin{bmatrix} U_{s1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{sn} \end{bmatrix}.
$$

A levezetett képletekben szereplő skalár- és matrix-mennyiségek kiszámítása a gyakorlat számára érdekességgel bíró két- és háromfázisú esetben a következőképpen történik:

Kétfázisú transzformátor:

$(n = 2)$

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} l_{s0} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_0 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\omega_0 = 1; \quad \omega_1 = -1}$$

$$\lambda_{p1} = l_{p0} + l_{p1}; \quad \lambda_{p2} = l_{p0} - l_{p1};$$

$$\lambda_{s1} = l_{s0} + l_{s1}; \quad \lambda_{s2} = l_{s0} - l_{s1};$$

$$\mu_1 = m_0 + m_1; \quad \mu_2 = m_0 - m_1;$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_0^\nu I_{p,\nu+1} = I_{p1} + I_{p2};$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_1^\nu I_{p,\nu+1} = I_{p1} - I_{p2};$$

$$\sum_{=0}^{n-1} \overline{\omega}_0^\nu U_{p,\nu+1} = U_{p1} + U_{p2};$$

Háromfázisú transzformátor:

$(n = 3)$

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_p & 0 & 0 \\ 0 & r_p & 0 \\ 0 & 0 & r_p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p0} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p1} & l_{p0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} l_{s0} & l_{s1} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s0} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s1} & l_{s0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_1 \\ m_1 & m_0 & m_1 \\ m_1 & m_1 & m_0 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\omega_0 = 1; \quad \omega_1 = \varepsilon; \quad \omega_2 = \overline{\varepsilon};}$$

$$\lambda_{p1} = l_{p0} + 2\,l_{p1}; \quad \lambda_{p2} = \lambda_{p3} = l_{p0} - l_{p1};$$

$$\lambda_{s1} = l_{s0} + 2\,l_{s1}; \quad \lambda_{s2} = \lambda_{s3} = l_{s0} - l_{s1};$$

$$\mu_1 = m_0 + 2\,m_1; \quad \mu_2 = \mu_3 = m_0 - m_1;$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_0^\nu I_{p,\nu+1} = I_{p1} + I_{p2} + I_{p3};$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_1^\nu I_{p,\nu+1} = I_{p1} + \overline{\varepsilon} I_{p2} + \varepsilon I_{p3} =$$
$$= I_{p1} - \frac{1}{2}(I_{p2} + I_{p3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j (I_{p2} - I_{p3})$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_2^\nu I_{p,\nu+1} = I_{p1} + \varepsilon I_{p2} + \overline{\varepsilon} I_{p3} =$$
$$= I_{p1} - \frac{1}{2}(I_{p2} + I_{p3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j (I_{p2} - I_{p3});$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_0^\nu U_{p,\nu+1} = U_{p1} + U_{p2} + U_{p3};$$

Kétfázisú transzformátor:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_1^{\nu} U_{p,\nu+1} = U_{p1} - U_{p2};$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_0^{\nu} I_{s,\nu+1} = I_{s1} + I_{s2};$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_1^{\nu} I_{s,\nu+1} = I_{s1} - I_{s2};$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_0^{\nu} U_{s,\nu+1} = U_{s1} + U_{s2};$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_1^{\nu} U_{s,\nu-1} = U_{s1} - U_{s2}.$$

Háromfázisú transzformátor:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_1^{\nu} U_{p,\nu+1} = U_{p1} + \overline{\varepsilon} U_{p2} + \varepsilon U_{p3} =$$

$$= U_{p1} - \frac{1}{2}(U_{p2} + U_{p3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j(U_{p2} - U_{p3})$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_2^{\nu} U_{p,\nu+1} = U_{p1} + \varepsilon U_{p2} + \overline{\varepsilon} U_{p3} =$$

$$= U_{p1} - \frac{1}{2}(U_{p2} + U_{p3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j(U_{p2} - U_{p3});$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_0^{\nu} I_{s,\nu+1} = I_{s1} + I_{s2} + I_{s3};$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_1^{\nu} I_{s,\nu+1} = I_{s1} + \overline{\varepsilon} I_{s2} + \varepsilon I_{s3} =$$

$$= I_{s1} - \frac{1}{2}(I_{s2} + I_{s3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j(I_{s2} - I_{s3});$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_2^{\nu} I_{s,\nu+1} = I_{s1} \varepsilon I_{s2} + \overline{\varepsilon} I_{s3} =$$

$$= I_{s1} - \frac{1}{2}(I_{s2} + I_{s3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j(I_{s2} - I_{s3});$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_0^{\nu} U_{s,\nu-1} = U_{s1} + U_{s2} + U_{s3};$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_1^{\nu} U_{s,\nu+1} = U_{s1} + \overline{\varepsilon} U_{s2} + \varepsilon U_{s3} =$$

$$= U_{s1} - \frac{1}{2}(U_{s2} - U_{s3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j(U_{s2} - U_{s3})$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_2^{\nu} U_{s,\nu+1} = U_{s1} + \varepsilon U_{s2} + \overline{\varepsilon} U_{s3} =$$

$$= U_{s1} - \frac{1}{2}(U_{s2} + U_{s3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j(U_{s2} - U_{s3})$$

Abban a speciális esetben, midőn a primer és a szekunder oldal egyforma, azaz $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$ és $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_s$, a képlet a következő alakot nyeri:
tehát

$$\lambda_{k1}^*, \lambda_{k2}^* = \frac{1}{\lambda_k^2 - \mu_k^2} \frac{2\, r\, \mu_k \mp 2\, r\, \mu_k}{2};$$

$$\lambda_{k1}^* = \frac{r}{\lambda_k + \mu_k}; \qquad \lambda_{k2}^* = \frac{r}{\lambda_k + \mu_k},$$

tehát

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_p \\ \boldsymbol{i}_s \end{bmatrix} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left[\left(e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} + e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right. \right.$$

$$+ \left(e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_k^\nu I_{p,\nu+1} \\ \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_k^\nu I_{s,\nu+1} \end{bmatrix} +$$

$$+ \left[\left(\frac{r - j\omega\,(\lambda_k - \mu_k)}{r^2 + \omega^2 (\lambda_k - \mu_k)^2} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} \right) + \right. \right.$$

$$+ \frac{r - j\omega\,(\lambda_k + \mu_k)}{r^2 + \omega^2 (\lambda_k + \mu_k)^2} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$- \left(\frac{r - j\omega\,(\lambda_k - \mu_k)}{r^2 + \omega^2 (\lambda_k - \mu_k)^2} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{r - j\omega\,(\lambda_k + \mu_k)}{r^2 + \omega^2 (\lambda_k + \mu_k)^2} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot$$

$$\left. \cdot \begin{bmatrix} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_k^\nu U_{p,\nu+1} \\ \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \overline{\omega}_k^\nu U_{s,\nu+1} \end{bmatrix} \right\} \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}.$$

IRODALOM

[1] E. EGERVÁRY : „On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **15** (1954) 211—222.
[2] A. SOMMERFELD : *Elektrodynamik.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949. (p. 140.)
[3] LOVASS-NAGY V.—GYŐRY T. : „Csatolt rezgőkörök matematikai vizsgálata." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 65—79.
[4] EGERVÁRY J. : „Matrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.

(Beérkezett: 1955. IX. 27.)

ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРМАТРИЧНОГО АЛГОРИФМА Е. ЭГЕРВАРИ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ МНОГОФАЗИСНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

В. ЛОВАШ-НАДЬ

Резюме

Цель настоящей работы дать единое и обозримое решение системы дифференциальных уравнений, описывающих стационарные и *транзиэнтные* электрические процессы, протекающие в многофазисных трансформаторах, с помощью некоторых новейших результатов теории матриц, полученных Е. ЭГЕРВАРИ, система неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (1) и (2), математически описывающая некоторый n-фазисный трансформатор, может быть пердставлена единственным матричным дифференциальным уравнением (3), решение которого в случае любых матричных коэффициентов может быть получено из общей формулы, выведенной в одной из предыдущих работ автора [3].

В том случае, когда трансформатор таков, что во-первых, материальные и геометрические данные катушек, расположенных на первичной стороне, тождественны, во-вторых, катушки вторичной стороны также одинаковы, наконец, в расположении катушек наблюдается циклическая симметрия, матричные коэффициэнты, фигурирующие в уравнении (3), суть гиперматрицы состоящие из циклических блоков. В этом случае решение общего вида (9) уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $i(0) = i_0$ может быть приведено к виду (11), если использовать гиперматричный алгорифм Е. ЭГЕРВАРИ [1] и привести гиперматрицы, фигурирующие в решении общего вида (9) и состоящие из циклических и поэтому попарно перестановочных блокков, к диагональному виду. Выведенная таким образом формула (11) даёт обозримое и годное для численных вычислений решение проблемы и совершенно аналогична формула (10), описывающей однофазисный трансформатор.

В конце работы автор применяет полученные общие результаты для случая двух- и трехфазисных трансформаторов.

ON AN APPLICATION OF J. EGERVÁRY'S HYPERMATRIX ALGORISM TO THE MATHEMATICAL INVESTIGATION OF POLYPHASE TRANSFORMERS

V. LOVASS-NAGY

Summary

The object of this paper is to present, by employing some of the latest results of the matrix theory obtained by J. EGERVÁRY, the solution of the system of inhomogeneous linear differential equations with constant coefficients serving for the mathematical description of stationary and transient phenomena occurring in polyphase-transformers The system of differential equations serving for the mathematical investigation of an

n-phase transformer, consisting of differential equations of the form (1), respectively (2), can be compounded into the single matrix differential equation (3).

If the coefficient matrices of the equation (3) are arbitrary matrices, the solution of equation (3) is obtained by a formula deduced by the author in one of his earlier papers [3].

In case the construction of the transformer is such that the geometrical and material constants of the primary coils are equal as well as the secondary coils are identical and the arrangement of both the primary and the secondary coil system has a cyclical symmetry, the coefficient matrices of the equation (3) are hypermatrices the blocks of which are cyclic matrices. In this case the solution (9) of the equation (3) satisfying the initial condition $\boldsymbol{i}(0) = \boldsymbol{i}_0$ can be transformed into the formula (11), applying the hypermatrix-algorism of J. EGERVÁRY [1] and constructing the spectral decompositions of the hypermatrices occurring in the formula (9), the blocks of which are cyclic matrices and therefore are pairwise commutable. The formula (11) thus obtained gives the solution of the problem, in a concise form, which is also appropriate for numerical computations and analogous with the formula (10) serving for the description of single-phase transformers.

At the end of the paper the author presents the application of the above deduced results for the calculation of two-phase and three-phase transformers.